HZ BOOKS
华章教育

CRC Press
Taylor & Francis Group

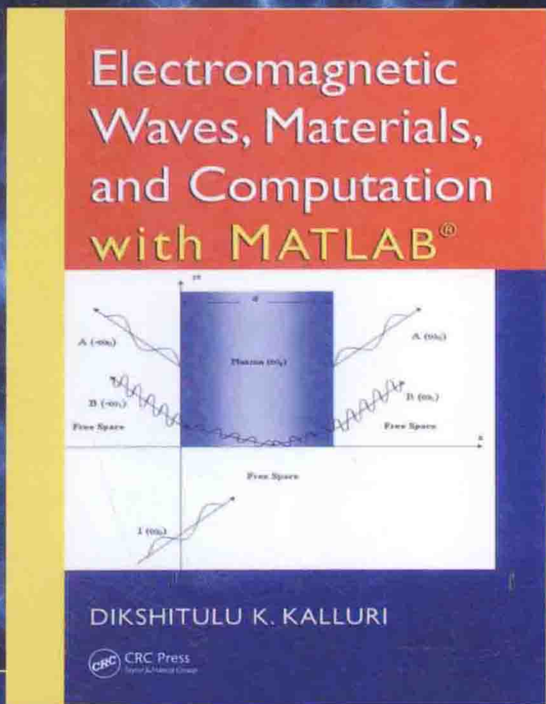
国外电子与电气工程技术丛书

电磁场与波

电磁材料及MATLAB计算

[美] Dikshitulu K. Kalluri 著
马西奎 沈瑶 邹建龙 等译

Electromagnetic Waves, Materials, and Computation with MATLAB



机械工业出版社
China Machine Press

Kalluri教授的这本书涉及的知识面极其广泛。除了探讨等离子体与波之间的相互作用外，还讨论了用于求解各种问题的许多新颖的计算方法。该书中包含的内容和材料大部分都是原创性的，可作为一本很好的研究生课程教材。另外，该书对从事等离子体物理或工程的研究或开发的任何人，都是一本必备的参考书。

—— Igor Alexeff博士，田纳西大学电气工程系

该书非常适合于高年级工程学科的学生阅读。内容全面，但却使复杂问题简单化。

—— Andrew M. Sessler，劳伦斯伯克利实验室

一本写得非常细致并且对于学生和专业人员都非常有用的书。写作方法特别有助于电气工程师对电路进行更深层次的研究，并帮助他们建立如传输线模拟等概念。Kalluri教授将先前分散于电磁学各个领域中的许多日益重要的概念集中到这本清晰和连贯的学术巨著中。

—— Michael A. Fiddy，北卡罗来纳大学夏洛特分校

本书特色

- 涵盖传统的电磁波和电磁材料的内容，特别对电路概念与场作了广泛类比，把传输线处理为分布参数电路，使读者易于掌握场和波的概念与理论，并深入理解场和波与电路的联系。
- 讨论电磁计算方法及其在电磁波工程中的应用，特别是用于求解各种问题的许多新颖的计算方法，如有限差分法、加权余量法、矩量法、有限元法、时域有限差分法以及基于微扰和变分技术的近似解析方法。
- 强调理论与实践的紧密结合，提供许多案例研究和实际例子，并涉及许多前沿研究成果，突出电磁波在等离子体和复杂媒质中的传播问题，这是其他同类书中前所未见的。
- 探究有界简单媒质中的电磁学，复杂媒质的方程和计算，采用MATLAB和FDTD方法来处理电磁分析专题和一系列相关专题，讲述如何使用高级软件编写代码，并直接运行程序进行计算和设计。

作者简介

Dikshitulu K. Kalluri 博士，是马萨诸塞大学洛厄尔分校电气与计算机工程系的教授。他在威斯康星大学麦迪逊分校获得电气工程硕士学位，并在堪萨斯大学劳伦斯校区获得电气工程博士学位。Kalluri博士是电磁材料与光学系统领域中的国际知名学者，在复杂媒质研究方面是世界所公认的开拓者，有很高的造诣。后与劳伦斯伯克利实验室、加利福尼亚洛杉矶大学、南加利福尼亚大学和田纳西大学的研究小组进行过作研究。从1984年开始，他任教于马萨诸塞大学洛厄尔分校，担任电磁材料与光学系统（CEMOS）中心联席主任，并组建了电磁学和复杂媒质研究实验室。Kalluri博士是电子和电信工程师学会的会士，同时也Eta Kappa Nu荣誉协会和 Sigma Xi专业协会的会员，发表了多篇学术论文和综述文章。

CRC Press
Taylor & Francis Group

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·锡 彬

上架指导：电磁场

ISBN 978-7-111-46713-7

9 787111 467137 >

定价：95.00元

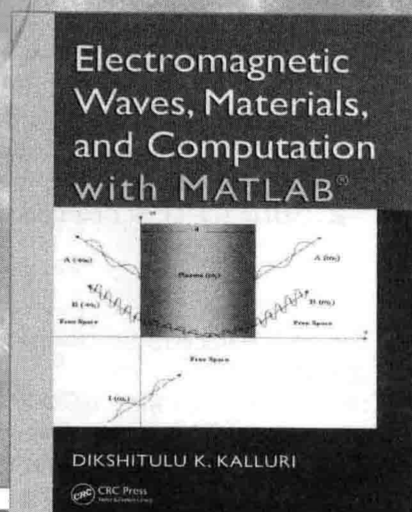
国外电子与电气工程技术丛书

电磁场与波

电磁材料及MATLAB计算

[美] Dikshitulu K. Kalluri 著
马西奎 沈瑶 邹建龙 等译

Electromagnetic Waves, Materials, and Computation with MATLAB



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与波——电磁材料及 MATLAB 计算 /（美）凯鲁瑞（Kalluri,D. K.）著；马西奎等译 .
—北京：机械工业出版社，2014.6
（国外电子与电气工程技术丛书）
书名原文：Electromagnetic Waves, Materials, and Computation with MATLAB

ISBN 978-7-111-46713-7

I. 电… II. ①凯… ②马… III. ①电磁场 ②电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 100443 号

本书版权登记号：图字：01-2013-5985

Electromagnetic Waves, Materials, and Computation with MATLAB by Dikshitulu K. Kalluri（978-1-4398-3867-9）.

本书借助 MATLAB，采用一种综合的现代方法来阐述电磁场与波的相关概念，给出了用于求解各种问题的许多新颖计算方法，所涉及的知识面极其广泛，内容主要包括简单媒质中电磁场的一维、二维和三维问题的时谐方程、波传播的解及其应用，复杂媒质（复杂材料、人工电磁材料、色散媒质、等离子体、运动媒质）中电磁场方程和计算方法，电磁场问题的计算方法（有限差分法、矩量法、有限元法以及时域有限差分法），诸多附录（涵盖一系列相关专题和技术）以及大量习题等。

本书适合作为高等院校电气、电子信息类专业高年级本科生和研究生的教材，也适合电磁波科研工作者以及从事相关工作的工程师阅读使用。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）
责任编辑：谢晓芳　　责任校对：殷　虹
印　　刷：藁城市京瑞印刷有限公司　　版　　次：2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：185mm×260mm　1/16　　印　　张：31.75
书　　号：ISBN 978-7-111-46713-7　　定　　价：95.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自 1998 年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与 Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer 等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出 Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Mark I. Montrose、David A. Johns 、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Dikshitulu K. Kalluri 、Bhag Singh Guru、Stephane Mallat 等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www. hzbook. com

电子邮件：hzjsj@hzbook. com

联系电话：(010) 88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街 1 号

邮政编码：100037

HZ BOOKS 华章教育

华章科技图书出版中心

译 者 序

这是马萨诸塞大学洛厄尔分校的 Kalluri（凯鲁瑞）教授于 2012 年出版的电磁场与波教科书。在国内外现有的为数众多的电磁场与波教材中，这本书与众不同。这主要是得益于书中的素材基于凯鲁瑞教授从 1984 年起在马萨诸塞大学洛厄尔分校教授电磁场与波课程时的讲稿和教学笔记，其中大多数内容和素材都是原创性的工作成果，而不是以前教科书的翻版和修订。凯鲁瑞教授是电磁材料与光学系统领域中的国际知名学者，在复杂媒质研究方面是世界公认的开拓者，有很高的造诣。他先后与劳伦斯伯克利实验室、加利福尼亚大学洛杉矶分校、南加利福尼亚大学和田纳西大学的研究小组进行过合作，并于多个夏季在空军实验室担任研究助理。从 1984 年开始，他任教于马萨诸塞大学洛厄尔分校，担任电磁材料与光学系统（CEMOS）中心的联席主任。

全书包括 21 章正文和 37 个附录，特别是 37 个附录写得非常详细，几乎占了全书的一半篇幅。这本书内容全面，所涉及的知识面极其广泛，但却使复杂问题简单化。

在全书 21 章正文中，有 7 章讨论有界简单媒质中的电磁场与波，涉及简单媒质中电磁场的准静态和静态近似、一维问题的解、二维问题的解和波导、三维问题的解、球面波及其应用以及波的其他问题；有 6 章讨论复杂媒质中的电磁场与波，涉及复杂材料的电磁模型、人工电磁材料、各向同性冷等离子体中的波、空间色散和热等离子体、各向异性媒质和磁等离子体中的波、各向异性晶体中的光波；有 7 章讨论电磁计算方法及其在电磁波工程中的应用，涉及有限差分法、加权余量法、矩量法、有限元法、时域有限差分法以及基于微扰和变分技术的近似解析方法。除了以冷等离子体、热等离子体、磁等离子体和各向异性晶体为例，讨论时间色散、空间色散、不均匀性和各向异性对波传播的影响外，还另辟一章专门讨论时变媒质的一种特殊情况，即运动媒质。此外，特别讨论了用于求解各种问题的许多新颖的计算方法，仅仅这些数学讨论就足以体现这本书的参考价值。可以说，本书突出了电磁波在等离子体和复杂媒质中的传播问题，这是其他同类书中前所未见的。在从事等离子体物理研究或等离子体物理工程开发的任何人的书架上，都应该有这本书的身影。

附录包含一些高级或比较新的专题，供对此感兴趣的学生阅读。这也给教师提供了一个选择高级专题的机会。附录中有三分之一是对某电磁场专题的一个基本介绍。

除正文和附录外，本书还包括大量习题，这些习题是帮助学生更深刻地理解和掌握书中内容的一种最有效的方法。

这是一本写得非常细致并对学生和专业人员都非常有用的书，它将先前分散于电磁学各个领域中的许多日益重要的概念集中到一部学术巨著中。该书在写作中对电路概念与场做了广泛类比，这样做不仅有助于读者掌握场和波的概念与理论，并且为深入理解场和波与电路的联系开创了很好的条件。在突出理论与重视实践之间的平衡方面，该书有其独特之处，值得我们借鉴。凯鲁瑞教授在全书中穿插了许多案例研究和实际例子，举例说明了如何导出直观的近似解。凯鲁瑞教授对这门课程的丰富教学经验，使得他能够以一种帮助读者从概念上掌握数学问题的方式来组织和表述相关的内容与素材。

这本书的特点是，不仅涵盖传统的电磁波和电磁材料的内容，还包括针对广泛的工程应用需要掌握的内容，涉及许多前沿研究成果。尽管本书中包括的章节要远远多于在一学

期3学分的课程中所能介绍的内容，但其课时的安排具有可选择性，即使是对于只选修一门电磁学课程的学生，也可以根据电磁场专题的不同来确定起点，从目录中选取相应章节满足3～6学分课程的需要。而在学生需要的时候，他们可以通过自学去掌握其余的内容。我们认为一本教材应该作为某些当前活跃的研究领域的一个起点，并激发学生对这些研究领域的兴趣。因此这本书既适合高等院校电气、电子信息类专业高年级本科生和研究生作为教材使用，也适合电磁波科研工作者以及从事实际工作的工程师作为继续学习的参考指南。

受机械工业出版社的委托，我们将该书翻译成中文，希望本书在积极促进并加速我国电磁场与波的教材建设和课程建设的同时，能有助于推动我国读者进一步跟踪与掌握电磁场和电磁波理论在等离子体和复杂媒质中的应用。

本书由马西奎和沈瑶主译，邹建龙和王嘉玮参与了翻译工作。全书译稿由马西奎教授统一审校。

原书中有少量输入和排版的疏漏，在翻译过程中做了改动。限于译者的水平，翻译不当或表述不清楚乃至错误之处，欢迎读者批评指正，我们将不胜感激。

马西奎

于西安交通大学电气工程学院

2014年4月

前　言

有关电磁学的科目至今仍然是电气工程（EE）专业本科阶段的一门核心课程，然而在大多数美国大学中，电磁学的教学课时被缩减到原来的一半（以一门 3 学分的课程取代了过去的两门课程）。现在拥有电气工程学士学位的毕业生，在更短的时间内匆忙地学习与以前同样的课程内容，常常会忽略对基本概念的理解，而是去记忆大量的公式，他们把这些公式看作基于书中例题来进行计算的窍门。其中有些人幸运地选修了微波技术、RF 设计、天线或光纤等后续课程，这样部分地加强了对某一应用领域的理解。利用很容易获得的商业软件，在没有从概念上理解预期的解决方案的条件下，就可以进行程序计算和设计。商业软件是用户友好的以至于我们通常得到一个绚丽多彩的形象化解，即使它是该物理问题的一个错误模拟。毕业后，在新工作中，受到老板一两次温和的斥责时，新毕业的学生才会认识到需要知道要模拟的合适的模型是什么以及期望什么样的定性结果。尽管软件是非常有用的，但是它却不可能代替人们对求解问题时所涉及的每一步骤从概念上的理解。幸运的是，对于新毕业的学生来说，或许有这样一个大学，它提供研究生课程，并且有一个专门的教师或教授，他知道这些被一些顶级公司录用的聪明学生并不比在公司里已经工作了一二十年的老员工笨。另一方面，他们能够轻松自如、非常娴熟地使用计算机与在线资源。他们愿意挑战自己，迅速学会用概念和分析而不是程序计算来思考问题；然而，他们想通过学习一些实例来把所学到的知识与技术应用相结合。除此之外，当发现他们在某一技术领域所深入学到的技术能够应用于另一个具有相同工程科学基础的技术领域时，他们感到很有趣，科技的各个领域之间往往是相通的，电磁理论也是一样。在专门研究以电磁理论为基础的某一技术领域之前，这样的研究生抽不出时间选修超过一门或两门研究生电磁场课程，即使他们本身喜爱电磁场理论。

电磁理论是传统的学科，在这方面已经出版了许多优秀的教材。从事电磁学教学和研究的很多人都曾受益于基于经典教材的研究生课程，这些都相当于未商品化的电磁学软件。对于那些依旧喜欢这种传统的电磁场学习和研究方法的人，我们仍然建议他们在两到三年的时间里认真学习这些研究生教材，通过全面掌握所有专题的数学处理方法获得启发。

我认为相对于物理专业的学生来说，在给电气工程专业学生讲授电磁场时，可以在所讲授的材料方面做一些巧妙的变化。第一个变化就是利用电气专业学生很强的电路基础知识，把传输线处理为分布参数电路。

以下是在选取本书中第一部分到第五部分内容时有关动机、论据和一般主题的一些想法。

1）作为分布参数电路，传输线是集总参数电路理论的一种必然推广和延伸。对于电气工程师来说，以电压和电流作为独立变量的传输线上的标量波并不是那样抽象，并给出了适合于电气工程师思考问题的基本框架。传输线比拟，即使它们不是物理上的（人工），似乎也有助于电气工程师掌握更抽象的概念。

2）我已经擅自把简单电磁媒质定义为 ε、μ 和 σ 都是标量常数的一种媒质。这对应于电路中的集总参数描述，例如，电容 C、电感 L、电导 G 或电阻 R 的定义。它也大致相当于通常在本科生课程中所求解的问题。某些纯粹的理论学者会反对这个定义。他们可能会

把自由空间介质看成简单介质，愿意把简单介质的定义扩展到理想各向同性介质。实际上，除各向同性介质以外，任何媒质都是一种复杂媒质。

3）我已经以功利的观点来区别简单媒质问题和复杂媒质问题。在4个麦克斯韦方程中有2个是相同的，材料的电磁性质是由本构关系引入的。给定边界条件和源就能确定问题的解。许多实际问题都会涉及复杂媒质以及复杂媒质的边界。然而，从教学的角度来看，可以将问题分为两类：（a）具有复杂边界的简单介质，（b）具有简单边界的复杂介质。例如，简单边界可以是一个平面，这时就可以采用直角坐标来描述。

4）本书第一部分论述了有界简单媒质中的电磁场。在引入时域方程之后，我们分别得到了一维、二维和三维问题的时谐方程、波传播的解以及它们的应用。在一维问题中，首先考虑了平面边界问题，然后考虑了圆柱形边界问题及其应用。从第一条原则开始，对于沿 z 轴无限长细导线中有正弦电流流过的理想问题，解释了获得一维模型（对于矢量位的 z 分量 A_z）的过程。然后，考虑到问题中的对称性，显然 A_z 至多是一个关于圆柱径向坐标 ρ 的函数。这是建立一个合乎研究目的的模型的简单例子，而不是由于不必要的细节，使得我们的分析陷于困境，实际上，不必要的细节会增加问题的复杂程度。作为增加复杂程度的一个例子，对于上述问题，我们可以将细导线上的一段微元看作一个赫兹偶极子，然后对无限长细导线进行无穷积分。

5）已经表明，上述问题的常微分方程在原点处存在奇异性，且存在两个独立解，其中一个解在原点处有奇异性。在提到可以利用幂级数法获得这样的方程的解之后，给出了其级数形式解并且将其指定为零阶第一类贝塞尔函数。因此，引入了贝塞尔函数且与三角函数进行了比较，同时介绍了贝塞尔函数的应用。

6）选取矩形和圆柱形波导作为二维问题的例子。在定义了波导问题之后，介绍了众所周知的求偏微分（PD）方程解的分离变量技术。已经表明，这种方法把PD方程转化为几个受分离常数约束的常微分方程。在特殊函数的讨论中，我们的重点是培养对这些函数的使用兴趣，使它们能方便地用于求常微分方程的特征值和特征向量。以扇形波导为例，介绍了分数贝塞尔函数的应用。在这些例子中，对于每一个具体问题，说明了如何基于给定的和隐含的（基于问题的物理特性）边界条件，从容许函数模板来选择合适的函数去构造解的技术。

7）作为三维问题中的一个例子，第4章讨论了矩形谐振腔。在假设边界是理想导体的条件下，介绍了计算场分量（特征矢量）和谐振频率（特征值），以及利用谐振腔腔壁表面电流计算损耗的著名近似方法。留给学生一些课外习题，目的是检验他们是否能够通过观察写出圆柱形谐振腔的解。

8）第4章和第5章中的波导与谐振腔问题实质上基于标量函数（对于TM问题是 E_z，对于TE问题是 H_z）所满足的亥姆霍兹方程的解。之所以可以进行这样的分解，是因为对于这些问题，可以识别出哪一个是纵向方向和哪一个是横向截面。在球形几何形状中，不容易识别出标量函数。从原理上来说，必须求解更普遍的矢量亥姆霍兹方程。因此，我们需要运用更多的数学知识。可以使用以前的技术，即首先考虑在球坐标系中标量亥姆霍兹方程的解 F，然后通过所定义的向量 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 把它与 TM^r 和 TE^r 模式联系起来。对于只选修一学期课程的学生，可以省略第5章，因为这一章的内容会影响学生对简单概念的理解。

9）在低频（准静态）或静态应用情况下，第6章中将标量亥姆霍兹方程近似为拉普拉斯方程。首先快速回顾了一维问题、在三个主要坐标系统中应用容许函数的模板技术和用正交函数来展开一个任意函数，这些正交函数就是第3章和第4章中解的模式（特征矢量）。为了说明这些方法在电磁场问题中的应用，提供了大量课外习题。为适合电气工程专业本科学生阅读，比较直观地编写了关于电磁波各方面的专题，特别是在7.2节中。对

于那些希望在高频电路和网络方面有所发展的学生，7.3 节是特别有意义的。7.5～7.7 节通常可以作为独立的课程来深入地研究，在这里只是对这些专题进行了简单介绍。

10）本书第二部分讨论了复杂媒质中的电磁场，其中至少有一个电磁参数不是标量常数。第 8 章介绍了各种复杂材料的组成关系，包括超导体以及在微观相互作用中最常用的经典简单模型。

11）以冷等离子体、热等离子体、磁等离子体和各向异性晶体为例，研究了时间色散、空间色散、不均匀性和各向异性对波传播的影响。第 14 章讨论了时变媒质的特殊情况，即运动媒质。对几种电磁分析的技术也进行了一定深度的分析。第 9 章讨论了等离子体、手性材料和左手材料的电磁模型以及实验模拟。

12）第二部分介绍了每种复杂性的支配效应。这一部分旨在像描述一个系统元件的输入与输出关系一样，建立一种联系复杂性种类与支配效应的系统化方法。以综合的方法，通过系统元件之间的互连可以得到一个理想的输出。10.10 节提到了一个例子，即把下列这样两种不希望的支配效应结合起来：(a) 在展宽脉冲过程中出现的色散，(b) 当孤波在色散非线性介质中传播时，使脉冲陡峭到能维持其形状所期望的综合效应过程中的非线性。

13）第三部分旨在介绍工业中广泛应用的各种商业电磁学软件的核心算法的基础，讨论和说明了有限差分法、矩量法、有限元法以及时域有限差分法。用只有几个单元的手算简单例子和 MATLAB 代码简单例子来解释隐含在算法中的概念。由于尽可能直接地使用算法的公式，所有编程是非常简单的。给学生提供一些像传输线、波导和静电问题这样的实际例子，以便他们能够编写代码和求解问题。鼓励学生利用商业软件计算相同的问题，以便验证结果并加深对算法的理解。当然，有一些商业软件有很强大的后处理能力以及更有效和精确的算法，这一部分的目的并不是阻止学生使用这些商业软件，而是更自信、更满意地使用这些商业软件。

全书前三个部分所包含的内容，足以作为高年级本科生和一年级研究生课程的教材，每门课可占 3 学分。出于这样的目的，我在马萨诸塞大学洛厄尔分校过去 24 年的教学中采用了各种各样的版本来组织教学素材（对于课程 16.507：电磁波和材料，对于课程 16.532：计算电磁学)。在每一次教学中，有大约三分之二的学生来自于基于电磁技术的专业。

第四部分由各章的附录所组成。[⊖]其中的一些包含某一推导或解释的详细过程，这些推导或解释的详细过程并不是核心概念，如果把它们放在正文中会分散读者对重点内容的注意力，为了完整起见，把它们放到了附录中。另一方面，附录还包含了一些高级或比较新的专题，供对此感兴趣的学生阅读。这也给教师提供了一个选择高级专题的机会，可以选择他们电磁研究小组目前所感兴趣的研究专题。附录中有三分之一是对某一电磁场专题的基本介绍。我们没有继续对其进行更深入的讨论，但是应该指出它可以按照相关章中的类似方法来继续进行讨论。例如，第 13 章论述了“各向异性晶体的光波”。其中的分析基于由介电常数张量所联系的 D 和 E 的本构关系式。附录 13A 系统地阐述了在存在静磁场时，复杂媒质铁氧体的磁导率张量。

第五部分是一个重要的教学工具，包括课外习题、15 分钟的小测验以及家庭测试。作者以往都是以下面的方式来使用这些教学工具的：课后留一些习题作为课外作业，在下一次课堂上，通常根据技术应用和模型特点来告诉学生这个问题的重要性，并会对这个作业做一些简要讨论，也会提供解题的思路。定期进行 15 分钟的小测验（每三或四个 50 分钟课时，目的是检查学生是否掌握了课外作业中的重点概念)。在学期中间和课程结束时，会对学生进行家庭测试或开卷考试，其中题量相当大。学生所反馈回来的信息总是肯定的，他们认为第

⊖ 请注意，第 3 章、第 5 章、第 8 章、第 13 章、第 15 章、第 19 章和第 20 章没有对应的附录。

五部分中的习题是他们更深刻地理解和掌握书中内容的一种最有效的方法。

尽管本书中包括的素材要远远多于在一学期 3 学分的课程中所能介绍的内容，但我坚信这本书还是非常实用的，即使是对于只选修一门电磁学研究生课程的学生，在需要的时候，也可以通过自学去掌握其余的内容。我认为一本研究生教材应该作为某些当前活跃的研究领域的一个起点，并激发学生对这些研究领域的兴趣。

本书目的是在电磁场问题的理论、直观近似解以及商业软件应用和软件解的解释之间达到平衡。

Dikshitulu K. Kalluri

致谢

这本书中的素材基于我从 1984 年起在马萨诸塞大学洛厄尔分校教授三门研究生课程时的讲义。关于电磁学的许多名著已经列在了书目资源列表中。这个列表也包括了我的老师们在教授我学习电磁学时用过的教材。我把它们列在了致谢部分，因为我的一部分讲义是基于这些教材的。只要能清楚地回忆起，我都尽量地把在每一个章节中所引用过的资源列为参考文献，但是由于某些说不清楚的原因，难免会有一些遗漏。在此，我要向教授我电磁场课程的老师们、我在学习时用过的电磁场教材和参考书的作者们以及我在教授电磁场课程时用过的教材的作者们表达深深的感谢。实际上，该列表还应当包括那些曾经对我有深远影响的大量经典教材和著作。

我很感激马萨诸塞大学洛厄尔分校在 2005 年批准我的学术休假年，同时我也很感激工程学院院长 John Ting 博士提供部分资金资助学生帮助我准备手稿，还要感谢电气与计算机工程系系主任 Craig Armiento 博士提供的便利，以及他对我写这本书所给的鼓励。

在教授电磁场领域中的研究生核心课程时，我有机会与许多学生进行交流。非常感谢他们对建设和完善这门课程所做出的努力。最近，我们电磁场领域中的三个博士生 Hamzeh Zaradat、Younes Elasri 和 Anas Mokhlis 参与了把课堂笔记整理成手稿的工作。Hamzeh 帮助我完善了第 18 章的编写，并为此章配备了插图。

我非常感谢我现在的几位在读博士研究生 Sebahattin Eker、Constantine Taki Markos 和 Robert Lade，他们积极地参与了这本书的全部过程。他们非常熟悉本书的内容，他们的许多建议对我编辑内容有着很重要的影响。Taki 是附录 11A 的合著者。Robert 帮助我准备了本书第一部分的附录，在交稿截止日期到来之前，只要需要他就自愿地给予我无限的帮助，以及试图帮助我缓解焦虑。Robert 和 Taki 编辑了本书第五部分。

在我以前的博士研究生中，我特别希望提及其中的三个人。Joo Hwa Lee（在本科学生 Gary Nigg 和我的妻子 Kamala 的协助下）在准备本书第一部分和第二部分的第一稿中担当了重要的角色，Ji Chil Young 和 Monjurul Ehsan 准备了第三部分的第一稿。

在这里还要特别向我以前的博士研究生 Jinming Chen 表示诚挚的谢意。2008 年，他建议我应该根据教授的其中两门研究生课程所使用的电子版讲义出版一本内容全面的教材，正是这个建议促使我认真地开始了本书的写作工作。他认为这样一本书也会使我们学校以外的学生和读者受益。从那时起，他担任了项目经理/素材的首席注释者/顾问和批评家。他与我一起准备了幻灯片、本书第五部分的习题答案以及在线可以下载的本书教师手册的资料。

当我提出延长交稿日期的要求时，CRC 出版社（Taylor & Francis Group）的 Nora Konopka、Ashley Gasque 和 Marsha Pronin 耐心地等待着交稿。在我交稿后，他们就立刻编辑加工书稿，使得本书在 2011 年 8 月得以出版。在出版这样一本大书的种种过程中，他们温文尔雅地与我一起处理各种各样的问题，感谢他们！

目　录

出版者的话
译者序
前言

第一部分　有界简单媒质中的电磁场

第1章　简单媒质中的电磁场 ………… 2
1.1　引言 ………… 2
1.2　简单媒质 ………… 2
1.3　时变电磁学 ………… 3
1.4　时谐场 ………… 5
1.5　准静态和静态近似 ………… 6
第2章　简单媒质中的电磁场：一维问题的解 ………… 7
2.1　无源媒质中的均匀平面波（$\rho_V=0$，$J_{源体积}=0$） ………… 7
2.2　良导体近似 ………… 8
2.3　良导体中的均匀平面波：趋肤效应 ………… 8
2.4　PEC和电介质分界面上的边界条件 ………… 8
2.5　交流电阻 ………… 9
2.6　圆导线的交流电阻 ………… 10
2.7　电压和电流正弦波：传输线 ………… 10
2.8　有限长度传输线 ………… 12
2.9　电磁波极化 ………… 13
2.10　波沿任意传播方向 ………… 14
2.11　波的反射 ………… 15
2.12　p波的入射：平行极化情况 ………… 15
2.13　s波的入射：垂直极化情况 ………… 16
2.14　临界角和表面波 ………… 16
2.15　一维柱面波和贝塞尔函数 ………… 18
参考文献 ………… 21
第3章　二维问题和波导 ………… 22
3.1　直角坐标系中的二维解 ………… 22
3.2　矩形波导中的TM_{mn}模式 ………… 23
3.3　矩形波导中的TE_{mn}模式 ………… 25
3.4　矩形波导中的主模：TE_{10}模式 ………… 26
3.5　波导中的功率流：TE_{10}模式 ………… 26
3.6　由非理想导体和电介质引起的TE_{10}模式的衰减 ………… 27
3.7　圆柱波导：TM模式 ………… 27
3.8　圆柱波导：TE模式 ………… 28
3.9　扇形波导 ………… 28
3.10　电介质圆柱波导——光纤 ………… 29
参考文献 ………… 30
第4章　三维问题的解 ………… 31
4.1　PEC边界矩形腔：TM模式 ………… 31
4.2　PEC边界矩形腔：TE模式 ………… 32
4.3　空腔的Q值 ………… 32
参考文献 ………… 33
第5章　球面波及其应用 ………… 34
5.1　半积分型贝塞尔函数 ………… 34
5.2　标量亥姆霍兹方程的解 ………… 35
5.3　矢量亥姆霍兹方程 ………… 36
5.4　TM^r模式 ………… 36
5.5　TE^r模式 ………… 37
5.6　球形腔 ………… 37
第6章　拉普拉斯方程：静态和低频近似 ………… 39
6.1　一维问题的解 ………… 39
6.2　二维问题的解 ………… 39
6.3　三维问题的解 ………… 46
参考文献 ………… 48
第7章　关于波的其他问题 ………… 49
7.1　群速度v_g ………… 49
7.2　格林函数 ………… 49
7.3　网络公式 ………… 51
7.4　周期介质的阻带 ………… 55
7.5　辐射 ………… 56
7.6　散射 ………… 61

7.7 衍射 …… 64
参考文献 …… 68

第二部分 复杂媒质中的电磁场

第 8 章 复杂材料的电磁模型 …… 70
8.1 电偶极子体分布 …… 70
8.2 频变介电常数 …… 71
8.3 金属模型 …… 72
8.4 等离子体媒质 …… 73
8.5 电介质的极化 …… 74
8.6 混合方程 …… 76
8.7 良导体和半导体 …… 77
8.8 理想导体和超导体 …… 78
8.9 磁性材料 …… 82
参考文献 …… 85
第 9 章 人工电磁材料 …… 86
9.1 人工电介质和等离子体模拟 …… 86
9.2 左手材料 …… 90
9.3 手性介质 …… 98
参考文献 …… 100
第 10 章 各向同性冷等离子体中的波：色散媒质 …… 102
10.1 基本方程 …… 102
10.2 电介质与电介质空间分界面 …… 104
10.3 半空间等离子体的反射 …… 105
10.4 等离子体平板的反射 …… 106
10.5 穿过等离子体平板的功率隧道 …… 109
10.6 非均匀等离子体平板问题 …… 110
10.7 等离子体层的周期分布 …… 111
10.8 表面波 …… 113
10.9 半空间等离子体的暂态响应 …… 115
10.10 孤波 …… 117
参考文献 …… 117
第 11 章 空间色散和热等离子体 …… 118
11.1 可压缩气体中的波 …… 118
11.2 热等离子体中的波 …… 119
11.3 有损热等离子体的本构关系 …… 122
11.4 无损热等离子体的电介质模型 …… 123
11.5 有损热等离子体的导体模型 …… 123
11.6 空间色散和非局域金属光学 …… 124
11.7 等离子态的技术定义 …… 124
参考文献 …… 125
第 12 章 各向异性媒质和磁等离子体中的波 …… 126
12.1 引言 …… 126
12.2 各向异性冷等离子体媒质的基本场方程 …… 126
12.3 一维方程：纵向传播及 L 波和 R 波 …… 127
12.4 一维方程：横向传播及 O 波 …… 129
12.5 一维解：横向传播及 X 波 …… 129
12.6 有损磁等离子体媒质的介电张量 …… 131
12.7 磁等离子体层的周期分布 …… 132
12.8 表面磁等离子体 …… 132
12.9 周期介质中的表面磁等离子体 …… 133
12.10 磁导率张量 …… 133
参考文献 …… 133
第 13 章 各向异性晶体中的光波 …… 134
13.1 双轴晶体中波沿主轴的传播 …… 134
13.2 沿任意方向波的传播 …… 135
13.3 沿任意方向波的传播：单轴晶体 …… 136
13.4 k 曲面 …… 137
13.5 群速度作为极角的函数 …… 138
13.6 各向异性半空间的反射 …… 139
参考文献 …… 139
第 14 章 运动媒质中的电磁场 …… 140
14.1 引言 …… 140
14.2 斯涅尔定律 …… 140
14.3 伽利略变换 …… 141
14.4 洛伦兹变换 …… 143

14.5 洛伦兹标量、矢量和张量 …… 145
14.6 四维空间中的电磁场方程 …… 146
14.7 电磁场的洛伦兹变换 ………… 148
14.8 频率变换和相位不变性 ……… 149
14.9 运动平面的反射 ……………… 149
14.10 运动电介质的本构关系 …… 152
14.11 相对论粒子动力学 ……… 152
14.12 等离子体的参数变换 ……… 153
14.13 运动等离子体平板的反射 … 154
14.14 运动等离子体媒质的布儒斯特角和临界角 ……… 155
14.15 垂直于入射面运动的约束等离子体 …………… 155
14.16 运动等离子体的波导模式 … 155
14.17 运动等离子体媒质的脉冲响应 ……………………… 155
参考文献 …………………………… 155

第三部分 电磁计算

第 15 章 引言和一维问题 ………… 158
15.1 电磁场问题：微分和积分方程 ……………………… 158
15.2 离散化和代数方程组 ………… 159
15.3 一维问题 ………………… 159
参考文献 ………………………… 172
第 16 章 二维问题 ……………… 173
16.1 有限差分方法………………… 173
16.2 迭代解法 ………………… 175
16.3 有限元方法 ……………… 176
16.4 二维泊松方程的有限元方法 ……………………… 184
16.5 均匀波导问题的有限元方法 ……………………… 187
16.6 传输线的特性阻抗：有限元方法 ……………………… 201
16.7 矩量法：二维问题………… 203
16.8 矩量法：散射问题………… 207
参考文献 ………………………… 210
第 17 章 有限元方法的高级专题 ………………… 211
17.1 基于节点和棱边的有限元方法 ……………………… 211
17.2 弱形式和加权余量法 ………… 214
17.3 非均匀波导问题……………… 216
17.4 开放边界、吸收边界、条件和散射问题………………… 217
17.5 三维问题 ………………… 225
参考文献 ………………………… 229
第 18 章 利用多个单元分析脊形波导 ………………… 230
18.1 均匀脊形波导……………… 230
18.2 非均匀波导………………… 236
第 19 章 时域有限差分法 ……… 241
19.1 真空中的传输线…………… 241
19.2 时域有限差分解…………… 242
19.3 数值色散 ………………… 244
19.4 非均匀、非色散媒质中的波：FDTD 解 …………… 246
19.5 非均匀、色散媒质中的波 …… 248
19.6 德拜材料中的波：FDTD 解………………………… 250
19.7 稳定极限和 courant 条件 …… 250
19.8 开放边界 ………………… 250
19.9 激励源 …………………… 251
19.10 频率响应 ……………… 251
参考文献 ………………………… 252
第 20 章 电磁脉冲与开关等离子体平板相互作用的时域有限差分法模拟 ……………… 253
20.1 引言 ……………………… 253
20.2 FDTD 方程的建立 ………… 254
20.3 连续波与开关等离子体平板的相互作用………………… 256
20.4 脉冲波与开关等离子体平板的相互作用………………… 257
参考文献 ………………………… 260
第 21 章 基于微扰和变分技术的近似解析方法 ……………… 261
21.1 空腔的微扰………………… 261
21.2 变分技术和稳定公式 ……… 266
参考文献 ………………………… 270

第四部分 附录

附录 1A 矢量公式和坐标系 ……… 272

附录 1B　滞后位和静态位 ············ 278
附录 1C　坡印廷定理 ················ 283
附录 1D　麦克斯韦方程的低频近似：R、L、C 和忆阻器 M ······ 284
附录 2A　当趋肤深度 δ 与导线半径 a 可比拟时圆导线的交流电阻 ························ 288
附录 2B　传输线：功率计算 ········ 291
附录 2C　史密斯圆图简介 ··········· 293
附录 2D　非均匀传输线 ·············· 304
附录 4A　高频时良导体中的损耗计算：表面电阻 R_S ······ 309
附录 6A　受限傅里叶级数的展开 ··· 310
附录 7A　二维和三维格林函数 ······ 312
附录 9A　热等离子体媒质的实验模拟 ························· 320
附录 9B　波在手性媒质中的传播 ··· 325
附录 10A　表面波激励引起等离子体羽衣的反向散射 ············ 327
附录 10B　电磁辐射的经典光子理论 ···························· 335
附录 10C　时变媒质中的光子加速 ························· 338
附录 11A　夹在两半无限大电介质之间的热各向同性等离子体平板的薄膜反射特性 ······ 351
附录 11B　非均匀热磁等离子体中波的一阶耦合微分方程 ······ 365
附录 11C　热漂移单轴电子等离子体的波导模式 ················· 367
附录 12A　法拉第旋转与自然旋转 ······························ 371
附录 12B　铁氧体和磁导率张量 ······ 373
附录 14A　电磁波与运动有界等离子体的相互作用 ······ 375
附录 14B　平面电磁波斜入射到运动媒质时所产生的辐射压力 ······················ 380
附录 14C　斜入射在相对运动单轴等离子体平板上的电磁波的反射和透射 ······ 383
附录 14D　以相对论速度运动的等离子体媒质的布儒斯特角 ························ 394
附录 14E　运动等离子体对电磁波的全反射 ····················· 398
附录 14F　电磁波与垂直于入射面运动的有界等离子体间的相互作用 ··················· 401
附录 16A　MATLAB 程序 ················ 408
附录 16B　余切公式 ···················· 416
附录 16C　诺依曼边界条件：有限元方法 ················· 418
附录 16D　标准面积积分 ··············· 422
附录 16E　求场问题解的数值方法 ····························· 425
附录 17A　场奇异性问题 ··············· 434
附录 18A　输入数据 ··················· 436
附录 18B　主程序 ······················ 452
附录 18C　函数程序 ··················· 455
附录 21A　复坡印廷定理 ··············· 465

第五部分　习题

习题 ·· 468

书目资源列表 ······························ 492

第一部分

有界简单媒质中的电磁场

第1章

简单媒质中的电磁场[⊖]

1.1 引言

经典电磁现象统一用麦克斯韦方程组来描述；这些矢量(参见附录1A)方程可以用偏微分方程表示成如下形式：

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1.3}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

其中，在标准单位(RMKS)制中，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度(V/m)，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度(A/m)，$\boldsymbol{D}$ 是电通量密度(C/m^2)，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度(Wb/m^2)，$\boldsymbol{J}$ 是电流体密度(A/m^2)，ρ_{V}是电荷体密度(C/m^3)。

在上述方程中，$\boldsymbol{J}$ 包括源电流体密度 $\boldsymbol{J}_{\text{source}}$。

通常，明确地给出电流连续性方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

和一个以速度 v 运动的点电荷 q 上的受力方程

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + v\times \boldsymbol{B}) \tag{1.6}$$

以便求出问题的解。在上述方程中，q 是电荷(C)，v 是速度(m/s)。

通过引入动态电磁位可以使得复杂电磁场问题变得易于求解(参见附录1B)：

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1.8}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 是磁矢位(Wb/m)，Φ 是标量电位(V)。

某种电磁材料对电磁场的影响由场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 之间的本构关系所反映。

1.2 简单媒质

简单媒质的本构关系式如下：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{1.11}$$

式中，ε_0 和 μ_0 分别是自由空间的介电常数与磁导率，它们的值分别是：

$$\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9} \quad (\mathrm{F/m}) \tag{1.12}$$

⊖ 第1章的附录参见附录1A～1D。

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\mathrm{H/m}) \tag{1.13}$$

不同材料的相对介电常数 ε_r（也叫做介电常数）、相对磁导率 μ_r 和电导率 σ(S/m)分别具有不同的值。进一步来说，可以假定一种简单媒质的 ε_r、μ_r 和 σ 都是正的标量常数（参见图 1.1）。



图 1.1　某种材料作为一种简单媒质的理想化

在一定的频段中求解某些电磁问题时，对材料行为采用这样的理想化探究方法是可行的。事实上，在基础电磁场课程中通常仅探究这样一类问题。尽管进行了这样的理想化处理，但是由于在一个给定空间中材料的大小、形状和构成不同，可能仍然需要用大量的数学知识才能得到电磁场问题的解析解。在两种材料的分界面上，边界两边的场可以由下述边界条件联系起来（见图 1.2）：

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \rho_S \tag{1.14}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{1.15}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{12} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{1.16}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{12} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K} \tag{1.17}$$



图 1.2　边界条件

在上述各式中，ρ_S 是电荷面密度(C/m^2)，$\boldsymbol{K}$ 是电流面密度(A/m)，$\hat{\boldsymbol{n}}_{12}$ 是垂直于分界面由媒质 1 指向媒质 2 的单位矢量，如图 1.2 所示。

1.3　时变电磁学

到目前为止，所建立的方程都是为了确定简单媒质中的时变电磁场。对于无损耗($\sigma=0$)的简单媒质来说，通常通过求位函数 $\boldsymbol{A}$ 和电位 Φ 而得到解，位函数 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 满足波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{1.18}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{1.19}$$

式中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{1.20}$$

在获得上述方程时，我们运用了洛伦兹条件：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{1.21}$$

方程式(1.18)和方程式(1.19)中的右端项都是电磁场的场源。如果已知电磁场的场源，利用滞后位可以求得方程式(1.18)和方程式(1.19)的解分别为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{\text{源体积}} \frac{[\boldsymbol{J}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.22}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{\text{源体积}} \frac{[\rho_V]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.23}$$

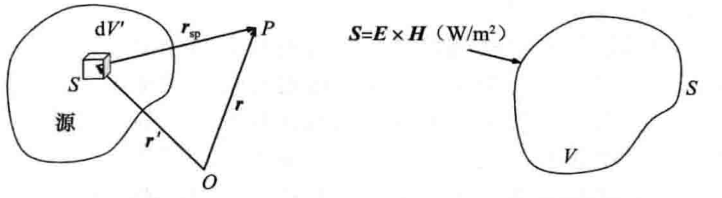
这里，符号[]表示在某一给定滞后时刻的值，即

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right) \tag{1.24}$$

$$[\rho_V] = \rho_V\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right) \tag{1.25}$$

其中，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别是表示场点与源点的位置矢量（见图 1.3a）。在求出 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 后，利用式(1.7)和式(1.8)就可求得电磁场。然后，可以得到在表面 S 上的功率密度 $\boldsymbol{S}$（W/m²）：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1.26}$$



a）源点和场点　　b）坡印亭定理

图 1.3 源点和场点的位置矢量

$\boldsymbol{S}$ 是瞬时功率密度。根据坡印亭定理，在由闭合曲面 S 所包围的体积 V（图 1.3b）中，有

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V + \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V = 0 \tag{1.27}$$

方程式(1.27)可以由方程式(1.1)和方程式(1.2)导出，它是能量守恒定律的一种数学表述。

脉冲电流源的辐射

这里通过一个简单例子来说明在自由空间中时变电流所辐射的时变电场和磁场的计算。设电流源是沿长度 h 很小的一小段细线上的脉冲电流。可以将该电流源看成是一个点电偶极子，其电流为

$$I(t) = I_0 \delta(t) \tag{1.28a}$$

这里 $\delta(t)$ 是一个脉冲函数，其定义为

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \tag{1.28b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \tag{1.28c}$$

沿长度 h 很小的一小段细线上的脉冲电流的几何形状如图 1.4 所示。

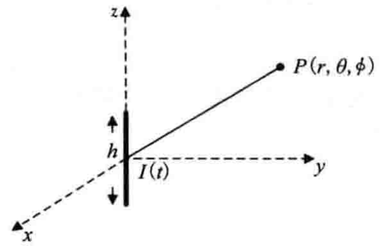


图 1.4 当 h 很小时，脉冲电流源可以等价成一个点电偶极子

因为电流源是一小段细线电流，所以式(1.22)简化为

$$\boldsymbol{A}_P(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\text{源长度}} \frac{I\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right)}{r_{sp}} \hat{z}\, \mathrm{d}z' \tag{1.29}$$

和

$$I\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right) = I_0 \delta\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right)$$

由于 h 很小，可以用 r 来近似 r_{sp}，这时由式(1.29)可得

$$\boldsymbol{A}_P(\boldsymbol{r},t) = \hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right)}{r}\int_{\text{源长度}} \mathrm{d}z' = \hat{z}\frac{\mu_0 I_0 h}{4\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right)}{r} \tag{1.30}$$

由于在球坐标系中单位矢量 $\hat{z}$ 可以表示成

$$\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \tag{1.31}$$

所以在球坐标系中矢量位是

$$\boldsymbol{A}_P(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0 I_0 h}{4\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{r_{sp}}{c}\right)}{r}(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) \tag{1.32}$$

时变磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.33}$$

在球坐标系中求旋度，由式(1.32)和式(1.33)得到

$$\boldsymbol{H}=\hat{\phi}\frac{I_0h}{4\pi}\left[\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}+\frac{1}{cr}\delta'\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\sin\theta \tag{1.34}$$

由麦克斯韦方程可以计算出电场强度 $\boldsymbol{E}$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.35}$$

不难计算得到 $E_\Phi=0$ 和

$$E_r=\frac{I_0h\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{u\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right] \tag{1.36a}$$

$$E_\theta=\frac{I_0h\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{u\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\delta'\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr}\right] \tag{1.36b}$$

在上式中，$u(t)$是单位阶跃函数，定义为

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0^-\\ 1, & t>0^+\end{cases} \tag{1.37}$$

上述这个问题具有如下物理意义。如图1.5所示，在 $t=0$ 时刻脉冲电流产生了一个点电偶极子。如果注意到 $\mathrm{d}[u(t)]/\mathrm{d}t=\delta(t)$，那么图1.5中的 q 等于 I_0。式(1.34)和式(1.36)表明在波前到达观察点的 $t=r/c$ 时刻之前场一直为零。在这一时刻，场是不连续的，但是在这一时刻之后，磁场为0，而电场的值与一个电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_e=I_0h\,\hat{z} \tag{1.38}$$

的静态电偶极子的电场相同。

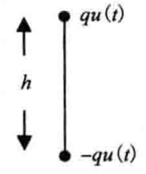


图1.5 脉冲电流源和等价点电偶极子

1.4 时谐场

时谐电磁场是时变电磁场中的一种特定情况，它是指电磁场随时间做正弦(或余弦)变化。因为时谐电磁场类似于正弦稳态电路，所以可以应用相量概念进行分析。对于时谐电磁场，某一场量可以表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1.39}$$

这里$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r})$是场量的相量形式。为避免混淆，在时谐电磁场的瞬时形式与时谐电磁场的相量形式同时出现时，将使用特定符号～来表示时谐电磁场的相量形式。在不存在混淆的可能性时，这个特定符号可以省略掉，使用相同符号来表示时谐电磁场的瞬时形式和相量形式，并且可以从上下文来理解符号的含义。注意到在时域中对时间的偏微分相应于在相量(频域)中乘一个因子 $\mathrm{j}\omega$，因而不难将时谐电磁场的瞬时形式转化成时谐电磁场的相量形式。因此，场的相量形式满足下面的方程：

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.40}$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})=\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.41}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\widetilde{\rho}_V(\boldsymbol{r}) \tag{1.42}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.43}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}\omega\widetilde{\rho}_V=0 \tag{1.44}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.45}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.46}$$

$$\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) + k^2\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = -\mu\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.47}$$

$$\nabla^2\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{r}) + k^2\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\widetilde{\rho}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{1.48}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.49}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{\text{源体积}}\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.50}$$

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{\text{源体积}}\widetilde{\rho}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.51}$$

$$\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\widetilde{\boldsymbol{H}}^*] \tag{1.52}$$

在上述方程中，

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}} = k_0^2\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}} \tag{1.53}$$

$\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\rangle$是功率密度的时间平均值，符号 * 表示复共轭，$k$ 是波数。这几个标记是按照顺序给出的。由时谐源确定的相量场的分析计算过程要比上一节介绍的时变场的相应计算简单得多。我们可以使用方程式(1.50)计算出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，而使用方程式(1.49)由 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\Phi(\boldsymbol{r})$。然后，利用方程式(1.45)和方程式(1.46)分别计算出时谐电场与磁场。此外，还要涉及边界条件。对于时谐情况，在方程式(1.14)～方程式(1.17)所给出的 4 个边界条件中只有两个是独立的。

1.5 准静态和静态近似

在时变电磁场中，当忽略磁感应或位移电流时，称为准静态近似。当忽略磁感应时，称为电准静态近似；当忽略位移电流时，称为磁准静态近似。麦克斯韦方程式(1.1)～方程式(1.4)具有下述形式。

a. 电准静态场

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.54a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{1.55a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1.56a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.57a}$$

b. 磁准静态场

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.54b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1.55b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1.56b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.57b}$$

在上述两种情况中，如果都忽略麦克斯韦方程中的时间偏导数，那么它们将分解成两组描述静电学和静磁学的相互独立的方程。

a. 静电学

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.58a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1.59a}$$

b. 静磁学

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1.58b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.59b}$$

附录 1D 基于一个时变参数定量地讨论了这些近似。

第2章

简单媒质中的电磁场：一维问题的解[⊖]

如果我们能够把问题看成是一维模型，那么用于解决该问题的数学方法会简单得多。大多数时候，一个具有适当的对称性和维度的实际问题常常允许我们使用一维模型。适当地选择坐标系有时候也有助于降低特定问题的维度。下面给出几个这样的基本解。

2.1 无源媒质中的均匀平面波($\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{V}}=0$，$\boldsymbol{J}_{源体积}=0$)

在直角坐标系中，媒质参数为 ε_r、μ_r 和 σ 的一种简单有损媒质具有如下一维(比如 z 轴)解：

$$E_z = H_z = 0 \tag{2.1}$$

$$\eta \boldsymbol{H} = \hat{z} \times \boldsymbol{E} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t \begin{Bmatrix} e^{+jkz} \\ e^{-jkz} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

在上面各式中，大括号{}表示括号内函数的线性组合，$\boldsymbol{E}_t$ 是横截平面(相对于 z)上的电场。对于有损媒质，

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma \tag{2.4}$$

因此，k 是复数。特性阻抗 η 是

$$\eta = \left(\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

它也是复数。如果 k 写为 $\beta - j\alpha$，那么相位因子 $\exp(-jkz)=\exp(-\alpha z - j\beta z)$ 表示一个沿正 z 方向传播而不断衰减的平面波的解。这里，α 称为衰减常数(Np/m)，β 称为相位常数(rad/m)。让方程式(2.4)中的左边和右边的实部和虚部分别相等，然后求解所得的两个方程就可以得到 α 和 β 的显式表达式：

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+T^2} - 1\right]\right\}^{1/2} \quad (\mathrm{Np/m}) \tag{2.6}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+T^2} + 1\right]\right\}^{1/2} \quad (\mathrm{rad/m}) \tag{2.7}$$

式中

$$T = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{2.8}$$

称为损耗正切角。对于低损耗电介质，损耗正切 $T \ll 1$，并且

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad T \ll 1 \tag{2.9}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad T \ll 1 \tag{2.10}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \angle \arctan\left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right), \quad T \ll 1 \tag{2.11}$$

⊖ 第2章的附录参见附录2A～2D。

2.2 良导体近似

对于良导体近似，

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1}{\delta}, \quad T \gg 1 \tag{2.12}$$

$$\eta \approx \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}\angle 45°, \quad T \gg 1 \tag{2.13}$$

在上式中，δ 称为趋肤深度。在这种情况下，特性阻抗也称为表面阻抗 Z_s：

$$\eta = Z_s = R_s + \mathrm{j}X_s = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{2.14}$$

2.3 良导体中的均匀平面波：趋肤效应

在良导体中，沿正 z 方向传播的衰减波可以用相量 $\exp[-(1+\mathrm{j})z/\delta]$来描述，其场的瞬时形式为

$$E(z,t) = E_0 \mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{2.15}$$

$$J(z,t) = J_0 \mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{2.16}$$

式中

$$J_0 = \sigma E_0 \tag{2.17}$$

由式(2.16)可知，在距离良导体表面

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{2.18}$$

处，电流密度的幅度下降为其表面值的 e^{-1}(38.8%)。

在直流(DC)的情况下，$f=0$，$\delta=\infty$，这表明电流密度是均匀的。然而，对于正弦交流(AC)的情况($n=0$)，δ 是有限值，这表明电流密度是非均匀的，并且随传播距离的增加呈指数衰减。例如，在距离良导体表面 4δ 处，电流密度已经几乎衰减到 0 ($\mathrm{e}^{-4}=1.8\%$)。表 2.1 列出了良导体如铜在不同频率下的趋肤深度 δ。

表 2.1 铜的趋肤深度

f	60Hz	1kHz	1MHz	10GHz
δ	1cm	2.45cm	7.75×10^{-2}mm	7.75×10^{-4}mm

在高频情况下，电流几乎被限制在导体表面附近的一薄层内，因此这种现象称为趋肤效应。

2.4 PEC 和电介质分界面上的边界条件

我们也注意到，当 $\sigma=\infty$时，$\delta=0$。这就是在习题 P2.1 中得到的在 PEC(Perfect Electric Conductor，理想导体)中正弦电磁场量为零的原因。如果媒质 1 是 PEC，媒质 2 是电介质，那么边界条件是

$$\hat{n}_{12}\cdot \boldsymbol{D}_2 = \rho_S \tag{2.19}$$

$$\hat{n}_{12}\cdot \boldsymbol{B}_2 = 0 \tag{2.20}$$

$$\hat{n}_{12}\times \boldsymbol{E}_2 = 0 \tag{2.21}$$

$$\hat{n}_{12}\times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{K} \tag{2.22}$$

因此，在分界面上，电场完全垂直于分界面，且等于 ρ_S/ε。而且，磁场是完全与分界面相切的，其大小等于良导体表面上的电流面密度 $\boldsymbol{K}$。

PEC 的边界条件

$$E_t = 0 \tag{2.23}$$

意味着如下条件

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \tag{2.24}$$

成立。式中，$\hat{t}$是单位切向矢量，$\hat{n}$是单位法向矢量。同样，PEC 边界条件

$$H_n = 0 \tag{2.25}$$

意味着如下条件

$$\frac{\partial H_t}{\partial n} = 0 \tag{2.26}$$

也是成立的。

2.5　交流电阻

如图 2.1 所示，为一个位于半空间 $0<x<\infty$ 中的电导率为 σ 的无限厚良导体。

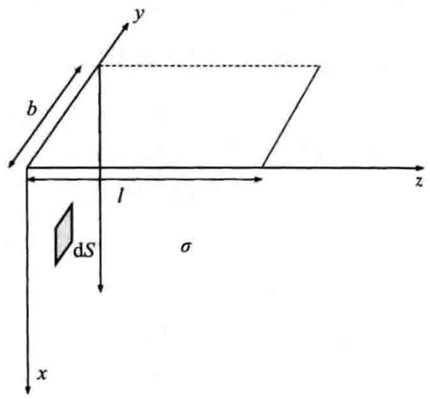


图 2.1　半无限大良导体的交流电阻

电场、磁场和电流密度相量可以分别写为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x) = \hat{z}\,E_0\mathrm{e}^{-x/\delta-\mathrm{j}x/\delta} \tag{2.27}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(x) = -\hat{y}E_0\frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x/\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45^\circ} \tag{2.28}$$

相应的瞬时形式为

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \hat{z}\,E_0\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)\quad(\mathrm{V/m}) \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{H}(x,t) = \hat{y}E_0\frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}-45^\circ\right)\quad(\mathrm{A/m}) \tag{2.30}$$

功率密度的时间平均值为

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \hat{x}\frac{1}{2}E_0^2\frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-2x/\delta}\cos45^\circ = \hat{x}\frac{1}{4}E_0^2\sigma\delta\,\mathrm{e}^{-2x/\delta} \tag{2.31}$$

进入宽度为 b、长度为 l 的导体内的总功率为

$$P = \langle\boldsymbol{S}\rangle_{x=0}bl = \frac{1}{4}E_0^2\sigma\delta bl \tag{2.32}$$

进入宽度为 b 的导体中的总电流为

$$\widetilde{I} = \iint\widetilde{\boldsymbol{J}}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\sigma\widetilde{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^b\int_0^\infty\sigma E_0\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})x/\delta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

完成上述积分，得到

$$\widetilde{I} = \frac{\sigma E_0 b\delta}{\sqrt{2}}\angle-45^\circ \tag{2.34}$$

$$I(t) = \frac{\sigma E_0 b\delta}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-45^\circ) \tag{2.35}$$

把消耗相同功率的电阻定义为一个等效电阻 R_{AC}，也就是说

$$\widetilde{I}_{\mathrm{RMS}}^2R_{\mathrm{AC}} = \text{消耗的功率} = P \tag{2.36}$$

利用式(2.35)，得到

$$\tilde{I}_{\mathrm{RMS}} = \frac{\sigma E_0 b\delta}{2} \tag{2.37}$$

根据式(2.35)和式(2.33)，得到

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sigma b\delta} \tag{2.38}$$

注意，如果电流是均匀分布(DC 情况时)的，那么当导体的厚度为 δ 时，我们将得到与式(2.38)相同的电阻。图 2.2 给出了这种等效关系。

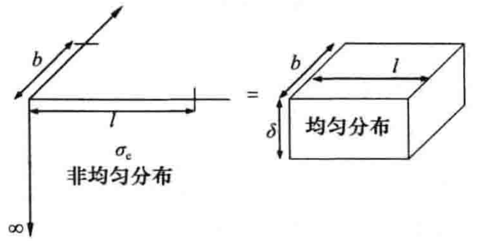


图 2.2 等效电阻

2.6 圆导线的交流电阻

在 $\delta \gg a$ 和 $\delta \ll a$ 两种极端近似情况下，可以简单地计算出半径为 a 和长度为 l 的一段圆导线的交流电阻。当 $\delta \gg a$ 时，电流可以看做均匀分布，可以使用直流电阻公式

$$R = \frac{1}{\sigma s} = \frac{1}{\sigma \pi a^2}, \quad \delta \gg a \tag{2.39}$$

来近似计算交流电阻。

当 $\delta \ll a$ 时，可以应用上一节中的分析结果。因为 $\delta \ll a$，圆导线可以看做一块半无限厚的良导体。因此，其横截面的有效面积 S_{eff}(见图 2.3)是

$$S_{\mathrm{eff}} = \pi[a^2 - (a-\delta)^2] \approx 2\pi a\delta, \quad \delta \ll a \tag{2.40}$$

最后得到

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2\pi\sigma a\delta}, \quad \delta \ll a \tag{2.41}$$

当 δ 与 a 近似相等时，交流电阻的计算就要复杂得多。在这种情况下，我们不得不使用在圆柱坐标系中所得到的一维解(参见附录 2A)。

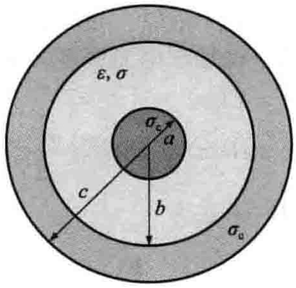


图 2.3 同轴电缆的横截面

2.7 电压和电流正弦波：传输线

传输线由两根导体构成，它们把电磁波从电磁源导引到电磁负载。传输线理论中的一种方法是分布参数电路理论。在这种方法中，我们先考虑传输线上的一段长度为 Δz 的微元，并用传输线的单位长度电路参数 R'、L'、G' 和 C' 来描述其特性。其中，R' 是由非理想导体所引起的电阻，L' 是由导体中电流产生的磁通所引起的电感，G' 是由非理想电介质所引起的电导，C' 是由导体表面上的电荷所引起的电容。我们可以应用电磁理论来计算由所用材料电磁特性及其几何排列所决定的电路参数。平行板传输线和同轴电缆是传输线的两种简单例子。带状线和微带线广泛应用于高频电磁装置中。由于在传输线的横截面上，电磁波可以看成 TEM 波，且在横截面上横向场满足拉普拉斯方程，因此通常以电压和电流为变量来表示传输线理论。此时，电压 V 和电流 I 可以分别写为电场和磁场的积分。

将场看做是静态的，可以计算出参数 G'、L' 和 C'。对于同轴电缆(见图 2.3)，这些参数的计算公式分别是[1]

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \tag{2.42}$$

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.43}$$

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \tag{2.44}$$

显然，用于计算 R'的公式和由导体的内电感所产生的对计算 L'的公式的修正部分都与频率有关。前一节已经讨论过高频情况时这些参数的计算。

对于高频情况，即 $\delta \ll a$，

$$R' = \frac{1}{2\pi\sigma_c \delta a} + \frac{1}{2\pi\sigma_c \delta b} \tag{2.45}$$

以及当计及内电感(由导体中的磁通所引起的电感)时，L'的公式为

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + L'' \tag{2.46}$$

式中

$$\omega L'' = R' \tag{2.47}$$

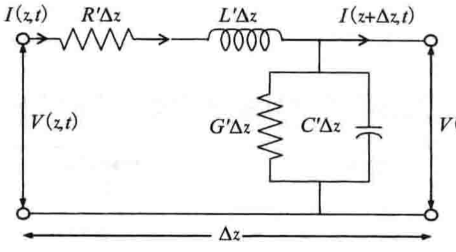


图 2.4　一个传输线微元的电路表示

应用同样的方法，也可以计算其他传输线的参数[1]。如图 2.4 所示，在得到这些参数之后，一段长度为 Δz 的微元传输线可以看成一个二端口网络，并且表示为

$$V(z,t) - V(z+\Delta z,t) = R'\Delta z I(z,t) + L'\Delta z \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \tag{2.48}$$

在 Δz 趋于 0 的极限下，上式可以简化为

$$-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = R' I(z,t) + L' \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \tag{2.49}$$

对电流进行相同的分析，得到

$$I(z,t) - I(z+\Delta z,t) = G'\Delta z V(z+\Delta z,t) + C'\Delta z \frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} \tag{2.50}$$

在 Δz 趋于 0 的极限下，上式可以简化为

$$-\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = G' V(z,t) + C' \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \tag{2.51}$$

方程式(2.49)和方程式(2.51)分别是描述传输线上电压波和电流波的一阶耦合偏微分方程。考虑下述合理的简化，可以很容易地看到波的特性和它与简单电磁波的相似性。作为第一次近似，我们通常忽略传输线中的损耗，得到如下电压 $V(z, t)$的波动方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad R' = G' = 0 \tag{2.52}$$

式中

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{2.53}$$

如果源随时间是正弦变化的，那么

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{V} = 0 \tag{2.54}$$

式中

$$\beta = \frac{\omega}{v} \tag{2.55}$$

解可以写为

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}^{+} + \widetilde{V}^{-} \tag{2.56}$$

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_0^{+} e^{-j\beta z} + \widetilde{V}_0^{-} e^{+j\beta z} \tag{2.57}$$

上标"+"用来表示沿正 z 方向传输的波，上标"−"则表示沿负 z 方向传输的波。由式(2.49)，可以得到电压和电流之间的关系为

$$\widetilde{V}^{+} = Z_0 \widetilde{I}^{+} \tag{2.58}$$

$$\widetilde{V}^{-} = -Z_0 \widetilde{I}^{-} \tag{2.59}$$

式中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{2.60}$$

可以得到传输线波与横电磁波(TEM)之间的如下类比关系：

TEM 波	传输线波	TEM 波	传输线波
E	V	μ	L'
H	I	η	Z_0
ε	C'	$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\beta=\omega\sqrt{L'C'}$

忽略损耗等价于假设导体是理想的($\sigma_c=\infty$)，电介质也是理想的($\sigma=0$)。实际传输线中的导体具有很大但有限的电导率(例如，铜的 $\sigma_c=5.7\times10^7\,\text{S/m}$)，而电介质的电导率很小但不为零(例如，硬橡胶的 $\sigma_c=10^{-15}\,\text{S/m}$)。在这样的情况下，$R'$ 和 G' 都不为零，此时传播常数 γ 为

$$\gamma = jk = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \tag{2.61}$$

且特性阻抗 Z_0 是复数：

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{2.62}$$

正如所期望的，传输线方程的解是沿正向与负向传播的衰减行波的一种线性组合。同样从场的角度看，我们看到电磁场不再是一个纯横电磁波。为了驱动电流在非理想导体中流动，就必须存在一个小的 E_z 分量。这个 E_z 分量沿导体长度方向的积分就是导体两端的电压。这个 E_z 分量与磁场 $\boldsymbol{H}$ 的叉积就是功率密度。功率密度的时间平均值在导体表面上的积分就是在导体中消耗的功率。习题 P2.5 就说明了解传输线问题的近似方法，以及传输线中的功率流动。

2.8 有限长度传输线

如图 2.5 所示，一长度为 d 的传输线在 $z=0$ 的终端处有一个负载，在 $z=-d$ 的始端处与一个电压为 V_g 和内阻为 Z_g 的电压源相连接。由式(2.57)和式(2.58)可知，在端子 AB 处的电压和电流 $\widetilde{I}_g=\widetilde{I}(d)$ 可以写为

$$\widetilde{V}(d) = \widetilde{V}_0^{+} e^{j\beta d} + \widetilde{V}_0^{-} e^{-j\beta d} \tag{2.63}$$

$$\widetilde{I}(d) = \frac{1}{Z_0}(\widetilde{V}_0^{+} e^{j\beta d} - \widetilde{V}_0^{-} e^{-j\beta d}) \tag{2.64}$$

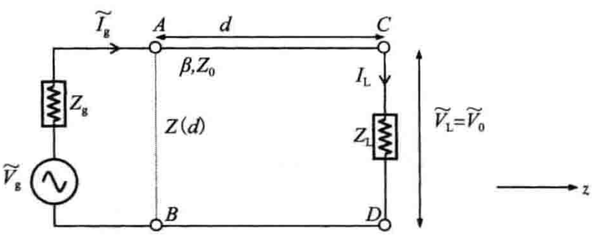


图 2.5 有界传输线

输入阻抗为

$$Z(d) = \frac{\widetilde{V}(d)}{\widetilde{I}(d)} = Z_0\left(\frac{1+\Gamma_0 e^{-j2\beta d}}{1-\Gamma_0 e^{-j2\beta d}}\right) \tag{2.65}$$

式中，Γ_0 是负载处的反射系数，可以写为

$$\Gamma_0 = \frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{V}_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{2.66}$$

将式(2.66)代入式(2.65)中，输入阻抗可以写为另一种形式

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_L \cos\beta d + jZ_0 \sin\beta d}{Z_0 \cos\beta d + jZ_L \sin\beta d} \tag{2.67}$$

由式(2.67)，可以得到几种特殊长度传输线的输入阻抗

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{Z_L} \tag{2.68}$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{2}\right) = Z_L \tag{2.69}$$

如果 $d \ll \lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}$，应用电路近似可得：

$$Z(d) = Z_L, \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1 \tag{2.70}$$

对于一段终端负载匹配的传输线，即 $Z_L = Z_0$，由于 $\Gamma_0 = 0$，因此有

$$Z(d) = Z_L, \quad \text{如果 } Z_L = Z_0 \tag{2.71}$$

式(2.71)表明，对于匹配的传输线来说，传输线的长度对输入阻抗计算没有影响，只有右行波从源传输到负载，不存在反射波，入射波被负载全部吸收。

可以采用一种称为史密斯圆图的图解法来计算输入阻抗[1]。附录 2B 给出了史密斯圆图的理论和应用。

如果负载端是短路或开路，输入阻抗将是电抗性的，且反射系数的模值为 1：

$$Z(d) = \begin{cases} jZ_0 \tan\beta d, & Z_L = 0 \quad (2.72) \\ -jZ_0 \cot\beta d, & Z_L = \infty \quad (2.73) \end{cases}$$

在上述两种情况中，传输线中的波都是驻波，在传输线的一些特定点上，电压恒为零，电源不向负载提供有功功率，仅提供无功功率。

因为电压和电流很容易测量以及电气工程师对这些量都比较熟悉，所以可以将传输线作为描述许多其他电磁现象的一个很有用的类比物。有关传输线理论的详细内容可以参考附录 2B。应用史密斯圆图求解波的反射问题可参见附录 2C。

附录 2D 介绍了非均匀传输线的理论及其应用。

2.9 电磁波极化

在式(2.1)～式(2.3)给出的平面波解中，电场和磁场都可以有 x 和 y 分量。在这里，取

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_t(z) = \widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = \hat{x}\widetilde{E}_x(z) + \hat{y}\widetilde{E}_y(z) \tag{2.74}$$

而且，取

$$\widetilde{E}_x(z) = E_{x0} e^{-jkz} \tag{2.75}$$

$$\widetilde{E}_y(z) = E_{y0} e^{j\delta} e^{-jkz} \tag{2.76}$$

式中，E_{x0}、E_{y0} 和 δ 都是实数。电场的瞬时形式为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x} E_{x0} \cos(\omega t - kz) + \hat{y} E_{y0} \cos(\omega t - kz + \delta) \tag{2.77}$$

如果 $\delta = 0$，该波是线性极化的。这是因为在任一个给定的 z 值平面上，例如 $z = 0$，$\boldsymbol{E}(0, t)$端点在 x-y 平面上的轨迹是一条直线。对于 $\delta = 0$

$$\boldsymbol{E}(0,t) = (\hat{x} E_{x0} + \hat{y} E_{y0}) \cos\omega t \tag{2.78}$$

图 2.6a 描述了这样一种情况。更进一步，如果 $E_{y0} = 0$，称波是沿 x 轴极化的。另一

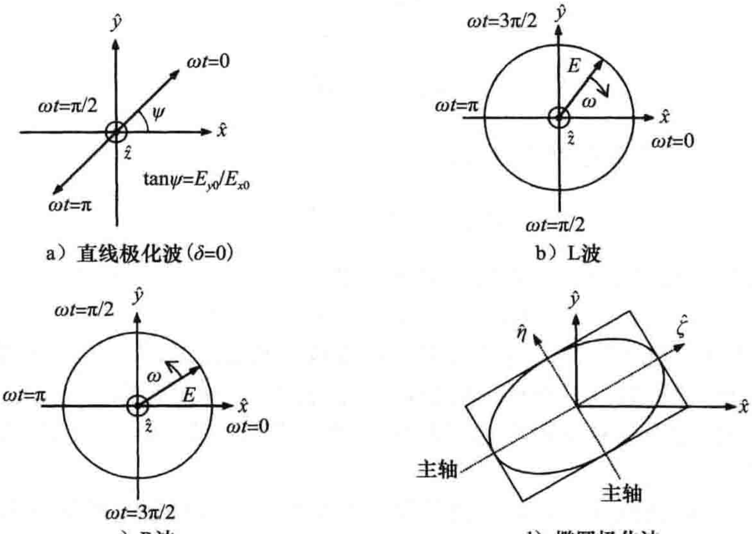
方面，如果 $E_{x0}=0$，称波是沿 y 轴极化的。在本书中，如果 $\delta=\pi/2$ 且 $E_{x0}=E_{y0}=E_0$，称波为左旋圆极化(LHC 极化)或 L 波，也就是说

$$E(z,t) = \hat{x}E_0\cos(\omega t - kz) + \hat{y}E_0\cos(\omega t - kz + \pi/2) \tag{2.79}$$

或写为相量形式

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = (\hat{x} + \mathrm{j}\,\hat{y})E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \quad (\text{L 波}) \tag{2.80}$$

图 2.6b 所示为在不同 ωt 时 $\boldsymbol{E}(0,t)$的图形。$\boldsymbol{E}$ 矢量端点的轨迹是一个圆。如果左手的拇指指向波传播方向，其他四个手指所指的方向就是 $\boldsymbol{E}$ 旋转的方向。



a）直线极化波（δ=0）　b）L波　c）R波　d）椭圆极化波

图 2.6　直线极化波、L 波、R 波与椭圆极化波

如果 $\delta=-\pi/2$ 且 $E_{x0}=E_{y0}=E_0$，称波为右旋圆极化或 R 波，即

$$E(z,t) = \hat{x}E_0\cos(\omega t - kz) + \hat{y}E_0\cos(\omega t - kz - \pi/2) \tag{2.81}$$

或写为相量形式

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = (\hat{x} - \mathrm{j}\,\hat{y})E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \quad (\text{R 波}) \tag{2.82}$$

图 2.6c 所示为不同 ωt 时 $\boldsymbol{E}(0,t)$的图形。$\boldsymbol{E}$ 矢量端点的轨迹是一个圆。如果右手的拇指指向波传播方向，其他四个手指所指的方向就是 $\boldsymbol{E}$ 旋转的方向。

如果上面提到的条件都不能满足，称波为椭圆极化。在这种最一般的情况下，$\boldsymbol{E}$ 端点在 x-y 平面上的轨迹是一个椭圆。椭圆的形状及其手性取决于比值 E_{y0}/E_{x0} 和极化相位差 δ。图 2.6d 所示为一个椭圆极化波。可以证明，椭圆极化波是 L 波和 R 波的一种线性组合。线性极化波是 L 波和 R 波的另一种线性组合。

2.10　波沿任意传播方向

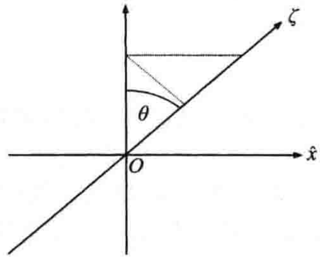


图 2.7　波沿任意传播方向

图 2.7 所示为一个在 x-z 平面上沿 θ 角方向传播的均匀平面波。该波仍然是一个在 ζ 坐标方向上传播的一维波，ζ 坐标可以用 x 和 z 坐标表示成如下形式：

$$\zeta = x\sin\theta + z\cos\theta \tag{2.83}$$

指数因子定义为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\zeta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(Sx+Cz)} \tag{2.84}$$

式中

$$S = \sin\theta, \quad C = \cos\theta \tag{2.85}$$

我们可以考虑两种特殊情形的 TEM 波，一种是电场平行于入射面，另一种是电场垂直于入射面。称前者为 p 波，称后者为 s 波。p 波的磁场垂直于入射面。如果 z 轴垂直于分界面(边界)，那么波阻抗 Z_w 可以定义为电场切向分量和磁场切向分量的比值。如图 2.8 所示，有

$$Z_w = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{E\cos\theta}{H} = \eta\cos\theta \tag{2.86}$$

类似地，对于一个 s 波(见图 2.10)，

$$Z_w = \frac{|E_y|}{|H_x|} = \frac{E}{H\cos\theta} = \frac{\eta}{\cos\theta} \tag{2.87}$$

p 波也称为平行极化波，s 波也称为垂直极化波。

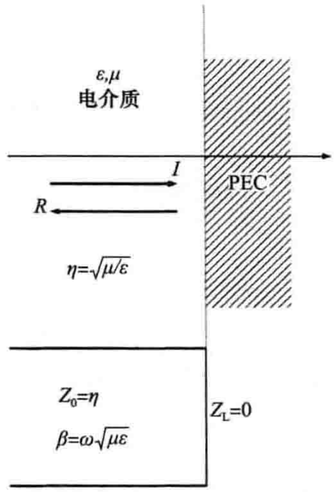


图 2.8　电介质与理想导体的分界面

2.11　波的反射

一般来说，在两种媒质的分界面上，波所携带的能量一部分将透过分界面继续传播，另一部分将被反射回去。在理想导体的表面上，波被完全反射。理想导体上的边界条件 $E_t=0$ 与一段短路传输线的边界条件相似(图 2.8)。

如果分界面不是理想导体表面，而是一个良导体的表面，那么我们应该取负载阻抗为 $Z_L=Z_s$，其中 Z_s 由式(2.14)给出。

2.12　p 波的入射：平行极化情况

图 2.9 所示为一个在 x-z 平面上斜入射的 p 波。其中也画出了相应的传输线模拟。可以将这个问题看做一个电磁场边值问题来求解。未知量可以减化为 E_x^R 和 E_x^T，它们分别是反射波 R 和透射波 T 的电场切向分量。在两种媒质中，其他场分量可以用这两个未知量和 E_x^I 来表示，E_x^I 中的上标 I 表示入射波。对于所有 t 和 x，可由 $z=0$ 处 E 和 H 的切向分量边界条件求出这些未知量：

$$E_{x1} = E_x^I + E_x^R = E_{x2} = E_x^T \tag{2.88}$$

$$H_{y1} = H_y^I + H_y^R = H_{y2} = H_y^T \tag{2.89}$$

对于任意 t 值，这些条件都要满足，这就要求所有波的频率都是相同的；而对于所有 x 值，这些条件都要满足的要求是斯涅尔定律(Snell's law)成立：

$$\omega_1 = \omega_R = \omega_T \tag{2.90}$$

$$k_1\sin\theta_1 = k_R\sin\theta_R = k_2\sin\theta_2 \tag{2.91}$$

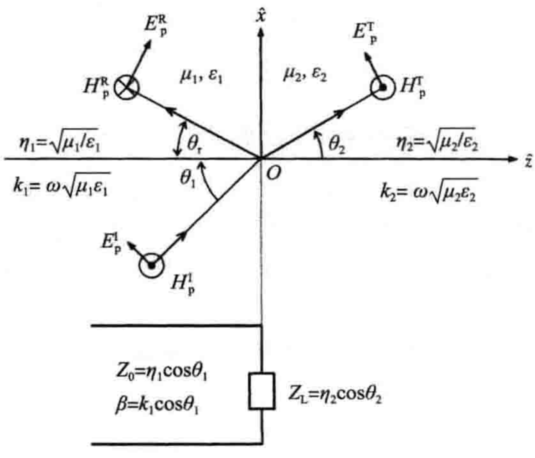


图 2.9　p 波在电介质分界面上的斜入射。传输线模拟

10.2 节和 10.4 节将更详细地讨论这些内容。应用式(2.90)和式(2.91)，解方程式(2.88)和式(2.89)就可以求出边值问题的解。另一方面，我们可以应用图 2.9 中给出的传输线模拟，也可用方程式(2.66)求得反射系数 Γ_0 和透射系数 T_0 分别为

$$\Gamma_0=\frac{V_0^-}{V_0^+}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{\eta_2\cos\theta_2-\eta_1\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}=\frac{E_{xp}^R}{E_{xp}^I}=\Gamma_{p1} \tag{2.92}$$

$$T_0=\frac{V_0}{V_0^+}=1+\Gamma=\frac{2Z_L}{Z_L+Z_0}=\frac{2\eta_2\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}=\frac{E_{xp}^T}{E_{xp}^I}=T_{p1} \tag{2.93}$$

如果下列条件成立，可得反射系数为零：

$$\eta_2\cos\theta_2=\eta_1\cos\theta_1 \tag{2.94}$$

如果利用斯涅尔定律(式(2.91))中 θ_1 和 θ_2 之间的关系，式(2.94)还可以得到进一步简化。由式(2.94)，得到布儒斯特角 $\theta_1=\theta_{Bp}$ 的计算公式为

$$\theta_{Bp}=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{2.95}$$

类似地，对 s 波进行分析表明，对于非磁性材料不存在布儒斯特角 θ_{Bs}。有些时候，对于 p 波，反射系数和折射系数定义为合成电场大小的比值而不是切向分量的比值：

$$T_p=\frac{E_p^T}{E_p^I}=\frac{E_{xp}^T/\cos\theta_2}{E_{xp}^I/\cos\theta_1}=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}T_{p1} \tag{2.96}$$

2.13 s 波的入射：垂直极化情况

图 2.10 所示为一个在 x-z 平面上斜入射的 s 波。其中也画出了相应的传输线模拟。根据前面所述，方程式(2.90)和方程式(2.91)在这里仍然成立。在这种情况下，对于所有的 t 和 x，在 $z=0$ 处的边界条件可以表述为

$$E_{y1}=E_y^I+E_y^R=E_{y2}=E_y^T \tag{2.97}$$

$$H_{x1}=H_x^I+H_x^R=H_{x2}=H_x^T \tag{2.98}$$

由图 2.10 所示的传输线模拟和式(2.66)可知，反射系数和透射系数分别由下列两式给出：

$$\Gamma_s=\frac{E_y^R}{E_y^I}=\frac{\eta_2/\cos\theta_2-\eta_1/\cos\theta_1}{\eta_2/\cos\theta_2+\eta_1/\cos\theta_1} \tag{2.99}$$

$$T_s=\frac{E_y^T}{E_y^I}=\frac{2\eta_2/\cos\theta_2}{\eta_2/\cos\theta_2+\eta_1/\cos\theta_1} \tag{2.100}$$

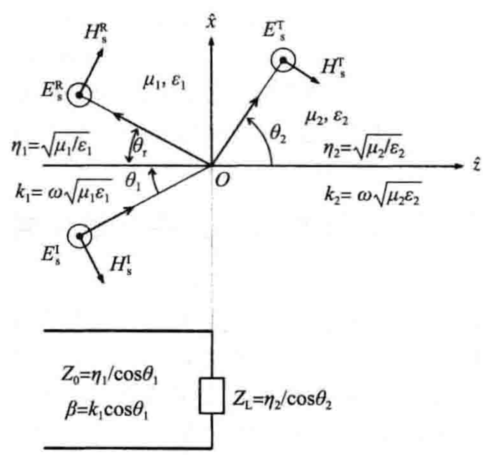


图 2.10 s 波在电介质分界面上的斜入射。传输线模拟

2.14 临界角和表面波

下面考虑波从光密介质到"光疏"介质中的传播。在光学中，通常用折射率 n 来描述非磁性媒质的性质，折射率 n 与介电常数之间的关系为

$$n=\sqrt{\varepsilon_r} \tag{2.101}$$

对于现在所考虑的问题来说，假设 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 或者 $n_1>n_2$。由斯涅尔定律(式(2.91))，可得

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{k_1}{k_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\frac{n_1}{n_2}>1 \tag{2.102}$$

注意，如果 $n_1>n_2$，则 $\theta_2>\theta_1$。当下列条件成立时，折射角 $\theta_2\geqslant 90°$

$$\theta_1=\theta_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1},\quad \theta_2=90° \tag{2.103}$$

把这样的入射角 θ_c 称为临界角。对于这个角度来说，波不再会透过分界面进入媒质 2 继续传播，而事实上波将沿分界面传播。然而，仍然有一个反射波，其反射角度为 $\theta_r=\theta_c$。因为没有功率流进入媒质 2 中，所以认为波被完全反射了。由于 $\theta_2=90°$，对于 p 波传播

来说，媒质 2 的作用相当于一个短路负载；而对于 s 波传播来说，媒质 2 的作用相当于一个开路负载。在这两种情况下，反射系数的大小都是 1。波被完全反射。我们通过考虑 s 波的传播来进一步考察以临界角入射时会发生什么现象。反射系数是 $\Gamma_s=1$ 和 $T_s=2$。而且，

$$\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{T}} = \hat{y}2E_s^{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x} \tag{2.104}$$

$$\boldsymbol{H}_s^{\mathrm{T}} = \hat{z}\frac{2E_s^{\mathrm{I}}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x} \tag{2.105}$$

这表示一个在正 x 方向上沿分界面传播的平面波。透射波、反射波和入射波的时间平均功率密度分别由下式给出

$$\langle \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \rangle = \hat{x}\frac{2|E_s^{\mathrm{I}}|^2}{\eta_2} \tag{2.106}$$

$$\langle \boldsymbol{S}^{\mathrm{R}} \rangle = \frac{2|E_s^{\mathrm{I}}|^2}{2\eta_1}(\hat{x}\sin\theta_1 - \hat{z}\cos\theta_1) \tag{2.107}$$

$$\langle \boldsymbol{S}^{\mathrm{I}} \rangle = \frac{2|E_s^{\mathrm{I}}|^2}{2\eta_1}(\hat{x}\sin\theta_1 + \hat{z}\cos\theta_1) \tag{2.108}$$

图 2.11 所示为媒质 2 中的等相位平面。

当入射角 $\theta_1>\theta_c$ 时，则有

$$\sin\theta_2 = \frac{k_1}{k_2}\sin\theta_1 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1 \tag{2.109}$$

只有当 θ_2 是复数时，才能满足这个方程[2]：

$$\theta_2 = \theta_{\mathrm{R}} + \mathrm{j}\theta_{\mathrm{X}}, \quad \theta_1 > \theta_c \tag{2.110}$$

透射波的电场可以写为

$$\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{T}}(z) = \hat{y}T_s E_s^{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\alpha_e z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_e x} \tag{2.111}$$

式中

$$\alpha_e = k_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_1 - 1}, \quad \theta_1 > \theta_c \tag{2.112}$$

$$\beta_e = k_2\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1, \quad \theta_1 > \theta_c \tag{2.113}$$

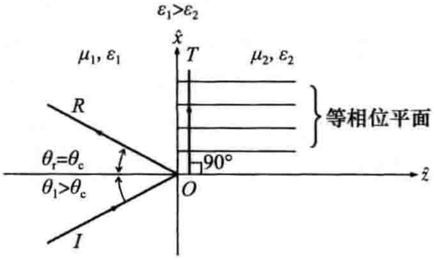


图 2.11　当 $\theta_1=\theta_c$ 时，媒质 2 中的等相位平面

而且，这个波的相速度由下式给出

$$v_{\mathrm{Pe}} = \frac{\omega}{\beta_e} = \frac{v_{\mathrm{P2}}}{\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)\sin\theta_1} < v_{\mathrm{P2}} = \frac{\omega}{k_2} \tag{2.114}$$

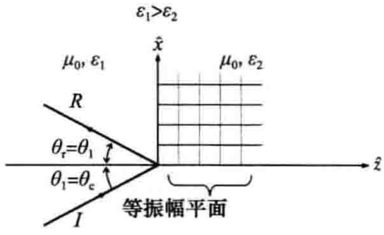


图 2.12　对于 $\theta_1>\theta_c$，等相位平面和等振幅平面

这个波是一个表面波。波沿正 x 轴方向传播，但沿正 z 轴方向衰减。图 2.12 中画出了等振幅平面(虚线)和等相位平面(实线)。当波以相速度 v_{Pe}(v_{Pe}小于媒质 2 中普通波的相速度 v_{P2})沿分界面传播时，波在 z 方向上会迅速地衰减。这种波称为紧束缚的慢表面波。复坡印亭矢量$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} \rangle=(1/2)\mathrm{Im}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$的虚部表示时间平均无功功率密度。当 $\theta_1>\theta_c$ 时，可以证明[3]

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} \rangle = \frac{1}{2}\hat{z}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)^2 - 1}\,\frac{|T_s|^2|E_s^{\mathrm{I}}|^2}{\eta_2}\mathrm{e}^{-2\alpha_e z}, \quad \theta_1 > \theta_c \tag{2.115}$$

波透入媒质的深度为 $1/\alpha_e$，在媒质 2 中的能量是一种储存能量。媒质 2 中的波称为倏逝波。倏逝波的衰减与导电媒质中行波的衰减不同。前者表明在分界面附近出现了波能量的局部化。因为这种透入，可以证明在边界表面处，一有限横截面的光束相对于入射光束来说将会被平移。这种平移称为 Goos-Hanschen 平移，在文献[3]中对其进行了

讨论。

我们将会在其他几种情况下遇到倏逝波。当波的频率低于波导的截止频率时，波导中的波就是一种倏逝波。在等离子体中，当波的频率低于等离子体频率时，波就是一种倏逝波。光纤包层中的波是一种倏逝波。10.5 节通过倏逝波讨论通过一个等离子体平板功率的隧道效应。

2.15 一维柱面波和贝塞尔函数

在自由空间中，一条无限长导线沿 z 轴流过时谐波电流 $\widetilde{I}_0$。根据式(1.50)，很明显矢量位 $\mathbf{A}$ 仅有 z 轴分量，并且由对称性明显地看出，这个分量仅是圆柱坐标系中的径向坐标 ρ 的函数：

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \hat{z} A(\rho) \tag{2.116}$$

根据方程式(1.47)可知，这个分量满足如下微分方程

$$\nabla^2 A + k_0^2 A = 0, \quad \rho > 0 \tag{2.117}$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} \tag{2.118}$$

并且由于 A 仅是 ρ 的函数，方程式(2.117)简化为一个常微分方程，其形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\rho} + k_0^2 A = 0 \tag{2.119}$$

这是贝塞尔方程。贝塞尔方程有两个独立的解 J_0 和 Y_0。这些解类似于余弦函数和正弦函数，它们在笛卡儿坐标系中也都是独立解。在圆柱坐标系中，J_0 和 Y_0 的一种线性组合所给出的函数能表示一个行波。表 2.2 给出了这些函数的级数形式[4]，以及涉及这些函数的微分和积分关系式。表 2.3 列出了这些函数，也给出了在笛卡儿坐标系中类似的函数。因为我们讨论的是贝塞尔函数，所以 J_m 和 Y_m 是下式所示的更一般的贝塞尔方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} + \left[k_0^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right] f = 0 \tag{2.120}$$

表 2.2 贝塞尔函数：定义和关系式

微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(T^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

解

$$J_\nu(T\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{T\rho}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \qquad J_n(T\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{T\rho}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}$$

$$Y_n(T\rho) = \frac{\cos\nu\pi J_n(T\rho) - J_{-\nu}(T\rho)}{\sin\nu\pi}$$

$$H_\nu^{(1)}(T\rho) = J_\nu(T\rho) + \mathrm{j}Y_\nu(T\rho) \qquad H_\nu^{(2)}(T\rho) = J_\nu(T\rho) - \mathrm{j}Y_\nu(T\rho)$$

$$R = AJ_\nu(T\rho) + BY_\nu(T\rho)$$

渐近形式

$$\underset{x\to\infty}{J_\nu(x)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \qquad \underset{x\to\infty}{Y_\nu(x)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$\underset{x\to\infty}{H_\nu^{(1)}(x)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[x-(\pi/4)-(x\pi/2)]} \qquad \underset{x\to\infty}{H_\nu^{(2)}(x)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[x-(\pi/4)-(x\pi/2)]}$$

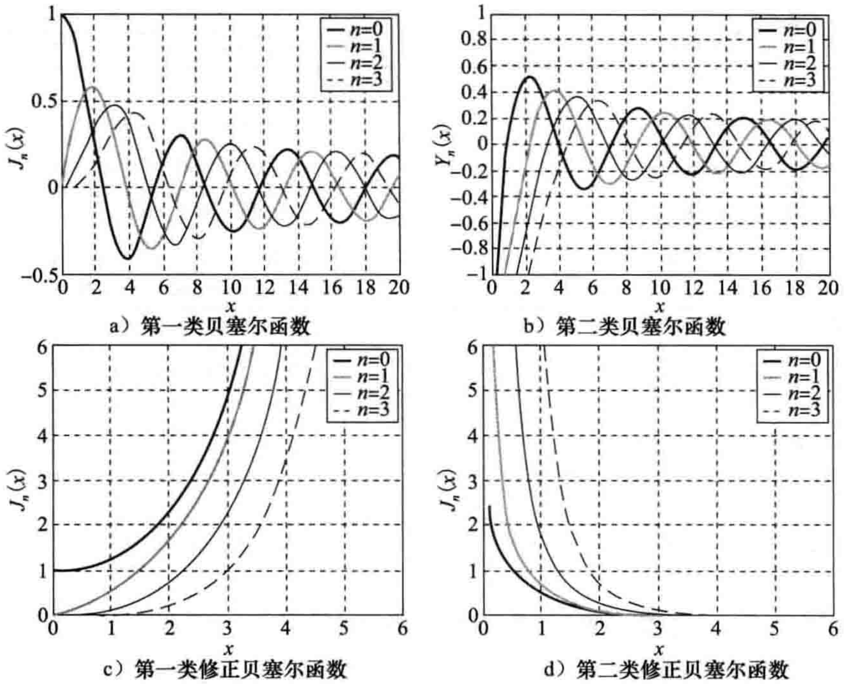
（续）

$\mathrm{j}^{-\nu}J_{\nu}(\mathrm{j}x)=I_{\nu}(x)\underset{x\to\infty}{\to}\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\mathrm{e}^{x}$	$\mathrm{j}^{\nu+1}H_{\nu}^{(1)}(\mathrm{j}x)=\frac{2}{\pi}K_{\nu}(x)\underset{x\to\infty}{\to}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-x}$
微分	
$R_0'(x)=-R_1(x)$	$R_1'(x)=R_0(x)-\frac{1}{x}R_1(x)$
$xR_{\nu}'(x)=\nu R_{\nu}(x)-xR_{\nu+1}(x)$	$xR_{\nu}'(x)=-\nu R_{\nu}(x)+xR_{\nu-1}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}R_{\nu}(x)]=-x^{-\nu}R_{\nu+1}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}R_{\nu}(x)]=x^{\nu}R_{\nu-1}(x)$
$xI_{\nu}'(x)=xI_{\nu}(x)+xI_{\nu+1}(x)$	$xI_{\nu}'(x)=-xI_{\nu}(x)+xI_{\nu-1}(x)$
$xK_{\nu}'(x)=xK_{\nu}(x)-xK_{\nu+1}(x)$	$xK_{\nu}'(x)=-xK_{\nu}(x)-xK_{\nu-1}(x)$
递推公式	
$\frac{2\nu}{x}R_{\nu}(x)=R_{\nu+1}(x)+R_{\nu-1}(x)$	$\frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x)=I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)$
$\frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x)=K_{\nu+1}(x)-K_{\nu-1}(x)$	
积分	
$\int x^{-\nu}R_{\nu+1}(x)\mathrm{d}x=-x^{-\nu}R_{\nu}(x)$	$\int x^{\nu}R_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x=x^{\nu}R_{\nu}(x)$
$\int x^{\nu}R_{\nu}(\alpha x)R_{\nu}(\beta x)\mathrm{d}x=-\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}[\beta R_{\nu}(\alpha x)R_{\nu-1}(\beta x)-\alpha R_{\nu-1}(\alpha x)R_{\nu}(\beta x)],\quad \alpha\neq\beta$	
$\int xR_{\nu}^2(\alpha x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}[R_{\nu}^2(\alpha x)-R_{\nu-1}(\alpha x)R_{\nu+1}(\alpha x)]=\frac{x^2}{2}\left[R_{\nu}'^2(\alpha x)+\left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2x^2}\right)R_{\nu}^2(\alpha x)\right]$	
虚宗量的贝塞尔函数和 Hankel 函数	
$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\left(\tau^2+\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0$	
解	
$I_{\pm\nu}(x)=\mathrm{j}^{\mp\nu}J_{\pm\nu}(\mathrm{j}x)$	$K_{\nu}(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{j}^{\nu+1}H_{\nu}^{(1)}(\mathrm{j}x)$

表 2.3 圆柱坐标系和直角坐标系中的波函数

波型	圆柱坐标系			直角坐标系	
	符号	名称	备注	符号	备注
驻波	$J_0(k_0\rho)$	第一类零阶贝塞尔函数	零点：$k_0\rho=\chi_{0n}$不均匀分布。函数：在原点处为有限值	$\cos(k_0z)$	零点：$k_0z=(2m+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)$均匀分布。偶函数
	$Y_0(k_0\rho)$	第二类零阶贝塞尔函数	零点：非均匀分布。函数：在原点处为无穷大	$\sin(k_0z)$	零点：$k_0z=m\pi$ 均匀分布。奇函数
行波	$H_0^{(2)}(k_0\rho)$	第二类零阶 Hankel 函数$=J_0(k_0\rho)-\mathrm{j}Y_0(k_0\rho)$	$\lim\limits_{k_0\rho\to\infty}H_0^{(2)}(k_0\rho)=\sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\rho}$ 外行波	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}$	正向行波
	$H_0^{(1)}(k_0\rho)$	第一类零阶 Hankel 函数$=J_0(k_0\rho)+\mathrm{j}Y_0(k_0\rho)$	$\lim\limits_{k_0\rho\to\infty}H_0^{(1)}(k_0\rho)=\sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\rho}$ 入射波	$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0z}$	负向行波
倏逝波	$K_0(\alpha\rho)$	第二类零阶修正贝塞尔函数	单调函数，在原点处为无穷大	$\mathrm{e}^{-\alpha z}$	单调函数，在∞处为零
	$I_0(\alpha\rho)$	第二类零阶修正贝塞尔函数	单调函数，在原点处为有限值	$\mathrm{e}^{+\alpha z}$	单调函数，在−∞处为零

在图 2.13 中，给出了不同 m 值时函数 J_m 和 Y_m 的图形。



a）第一类贝塞尔函数　b）第二类贝塞尔函数

c）第一类修正贝塞尔函数　d）第二类修正贝塞尔函数

图 2.13 贝塞尔函数

表 2.4 中列出了贝塞尔函数 J_m 的零点 χ_{mn} 和贝塞尔函数 J_m 的导函数 J'_m 的零点 χ'_{mn}。第二个下标 n 表示这些振荡函数的第 n 个零点。在求解圆柱形波导问题时，将会用到这些高阶贝塞尔函数。

表 2.4 贝塞尔函数及其导数的零点

贝塞尔函数	贝塞尔函数的零点			贝塞尔函数的导数	贝塞尔函数导数的零点		
J_0	2.405	5.520	8.654	J'_0	3.832	7.016	10.173
J_1	3.832	7.016	10.173	J'_1	1.841	5.331	8.536
J_2	5.136	8.417	11.620	J'_2	3.054	6.706	9.969
Y_0	0.894	3.958	7.086	Y'_0	2.197	5.430	8.596
Y_1	2.197	5.430	8.596	Y'_1	3.683	6.942	10.123
Y_2	3.384	6.794	10.023	Y'_2	5.003	8.351	11.574

现在，我们回到载有电流 $\widetilde{I}_0$ 的无限长导线的电磁场问题。当 $k_0\rho$ 趋于无穷大时，为满足外行波的要求，方程式(2.119)的解可以表示为第二类 Hankel 函数的形式(见表 2.2)：

$$\widetilde{A}(\rho) = A_0 H_0^{(2)}(k_0\rho) \tag{2.121}$$

式中，A_0 是一个待定的常数。由麦克斯韦方程和方程式(2.121)，可以得到电场和磁场的所有分量：

$$\widetilde{H}_\phi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial \rho} = -k_0\frac{A_0}{\mu}H'^{(2)}_0(k_0\rho) \tag{2.122}$$

$$\widetilde{H}_\rho = \widetilde{H}_z = 0 \tag{2.123}$$

$$\widetilde{E}_\rho = \widetilde{E}_\phi = 0 \tag{2.124}$$

$$\widetilde{E}_z = -\mathrm{j}\omega A_0 H_0^{(2)}(k_0\rho) \tag{2.125}$$

在 x-y 平面一半径为 ρ 的圆形回路 C 上，应用安培定律，当极限 ρ 趋于 0 时，可以得到常数 A_0 与电流 $\widetilde{I}_0$ 之间的关系为

$$A_0 = -\mathrm{j}\frac{\mu_0}{4}\widetilde{I}_0 \tag{2.126}$$

在得到式(2.126)的过程中，使用了如下小参数近似：

$$\lim_{k_0\rho\to 0} H_1^{(2)}(k_0\rho) = \mathrm{j}\frac{2}{\pi}\frac{1}{k_0\rho} \tag{2.127}$$

场 $\widetilde{E}_z$ 和 $\widetilde{H}_\phi$ 分别由下面两式给出

$$\widetilde{E}_z = -\frac{k_0\eta_0}{4}\widetilde{I}_0 H_0^{(2)}(k_0\rho) \tag{2.128}$$

$$\widetilde{H}_\phi = -\mathrm{j}\frac{k_0}{4}\widetilde{I}_0 H_1^{(2)}(k_0\rho) \tag{2.129}$$

式(2.128)和式(2.129)分别是一维柱面波中的电场和磁场。可以证明，在远区的波阻抗是

$$Z_\mathrm{w} = \lim_{k_0\rho\to\infty}\frac{\widetilde{E}_z}{-\widetilde{H}_\phi} = \eta_0 \tag{2.130}$$

因为波阻抗与介质的本征阻抗相等，所以波是如图 2.14 所示的 TEM 波。

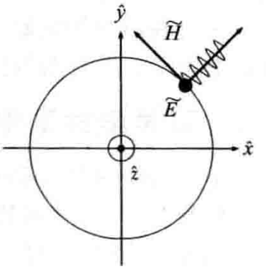


图 2.14　一维柱面波

参考文献

1. Ulaby, F. T., *Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1999.
2. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
3. Lekner, J., *Theory of Reflection*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1987.
4. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T. V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd edition, Wiley, New York, NY, 1994.

第3章

二维问题和波导

前一节介绍了一维问题的解，得到了平面或圆柱 TEM(横电场和磁场)波的解。TEM 波是一种最简单的电磁波。

另一种简单的电磁波是横磁(TM)波或横电(TE)波。例如，当波被导电边界限制(界定)在横平面上，并且沿与横平面相垂直的方向传播时，会产生横磁(TM)波或横电(TE)波。

3.1 直角坐标系中的二维解

下面分析在以下约束下麦克斯韦方程组的解：(1)波沿 z 方向传播，(2)波在 z 方向上有电场分量，(3)在波传播区域内没有波源，(4)在波传播区域中的媒质是无损的。

场量$\widetilde{E}_z$ 满足方程：

$$\nabla^2 \widetilde{E}_z + k^2 \widetilde{E}_z = 0 \tag{3.1}$$

式中

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{3.2}$$

令

$$\widetilde{E}_z(x,y,z) = F(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.3}$$

当 γ 是虚数(即 $\gamma=\mathrm{j}\beta$)时，波是一个沿正 z 方向传播的行波，这里 β 是一个正的实常数。当 γ 是一个纯实数(也即 $\gamma=\alpha$)时，波是一个衰减行波，这里 α 是正的实常数。由于假定媒质是无损的，因此在这种情况下波的衰减是由于波是一个倏逝波。在求出这个解后，将确认这一点。

将式(3.3)代入方程式(3.1)中，得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_c^2 F = 0 \tag{3.4}$$

式中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \tag{3.5}$$

分离变量法是求解偏微分方程(PDE)的一种常用方法。分离变量法在将偏微分方程转化成常微分方程(ODE)的同时，对几个分离常数有一个限制。随着我们继续进行，会自然清楚分离变量的含义。将 F 表示为两个函数的乘积

$$F(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{3.6}$$

这里 f_1 仅为 x 的函数，f_2 仅为 y 的函数。将式(3.6)代入式(3.4)中，得到

$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{1}{f_2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \tag{3.7}$$

上式两端对 x 求偏微分，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 常数 \tag{3.9}$$

记这个常数为$-k_x^2$。式(3.9)就可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 f_1 = 0 \tag{3.10}$$

同理，可以让方程式(3.7)中的第二项等于$-k_y^2$，由此得到如下常微分方程

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2}+k_y^2 f_2=0 \tag{3.11}$$

由式(3.7)，可以得出常数k_x^2和k_y^2应该满足如下约束条件

$$k_x^2+k_y^2=k_c^2 \tag{3.12}$$

把偏微分方程(方程式(3.4))转化成两个常微分方程式(3.9)和方程式(3.10)，而分离常数满足约束条件式(3.12)。每一个常微分方程有两个独立的解。如果常数k_x^2和k_y^2都是负的，就是说，

$$k_x^2=-K_x^2 \tag{3.13}$$

$$k_y^2=-K_y^2 \tag{3.14}$$

这里的K_x^2和K_y^2都是正的，那么两个常微分方程的解都是双曲函数。因此，可以选择的函数是

$$f_1(x)=\left\{\begin{matrix}\sin k_x x\\ \cos k_x x\\ e^{+jk_x x}\\ e^{-jk_x x}\\ \sinh K_x x\\ \cosh K_x x\\ e^{+K_x x}\\ e^{-K_x x}\end{matrix}\right\} \tag{3.15}$$

$$f_2(y)=\left\{\begin{matrix}\sin k_y y\\ \cos k_y y\\ e^{+jk_y y}\\ e^{-jk_y y}\\ \sinh K_y y\\ \cosh K_y y\\ e^{+K_y y}\\ e^{-K_y y}\end{matrix}\right\} \tag{3.16}$$

应用上述函数的一个线性组合就可以构造一个给定问题的解。但是边界条件的不同会影响到对这些函数的选择。下一节将结合示例说明。

3.2　矩形波导中的 TM_{mn} 模式

图 3.1 所示为一个矩形波导的横截面，矩形波导的 PEC 边界分别位于$x=0$或a和$y=0$或b平面。TM 模式中$\widetilde{E}_z\neq 0$和$\widetilde{H}_z=0$。在波导内$\widetilde{E}_z$分量满足方程式(3.1)，然而，在 PEC 边界上$\widetilde{E}_z=0$。在边界$x=0$或a，或者$y=0$或b上，这种边界条件实质上是一种“狄利赫里边界条件”$F(x, y)=0$。对于变量x来说，由于在x轴上要求有多个零点，包括在$x=0$处有一个零点，则必须选择函数$\sin k_x x$。而且

$$\sin k_x a=0 \tag{3.17}$$

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad m=1,2,\cdots,\infty \tag{3.18}$$

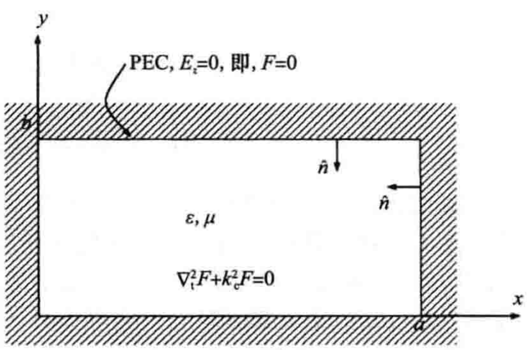


图 3.1　一个矩形波导的横截面。TM 模式。狄利赫里问题

类似地，对于变量 y 来说，也应该选择正弦函数，而且

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1,2,\cdots,\infty \tag{3.19}$$

现在，我们能够写出$\widetilde{E}_z$ 的第 mn 个 TM 模式的表达式：

$$\widetilde{E}_z(x,y,z) = E_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.20}$$

式中，E_{mn}是 TM_{mn}模式的模式常数。由式(3.5)、式(3.12)、式(3.18)和式(3.19)，得到

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{3.21}$$

$$\gamma = \alpha = \sqrt{k_c^2 - k^2}, \quad 如果\ k_c > k \tag{3.22}$$

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad 如果\ k_c < k \tag{3.23}$$

如果要使一个波为行波，而不是倏逝波，那么就必须使方程式(3.23)成立。考虑到 $k^2=(2\pi f)^2\mu\varepsilon$ 和如下定义

$$k_c^2 = (2\pi f_c)^2\mu\varepsilon \tag{3.24}$$

可以得到

$$\alpha = k_c\sqrt{1-\frac{f^2}{f_c^2}}, \quad f < f_c \tag{3.25}$$

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, \quad f > f_c \tag{3.26}$$

式中

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{3.27}$$

因此，根据上式可以引入一个波导模式的截止频率 f_c 的概念。当信号频率 f 大于模式截止频率 f_c 时，这个模式就可以在波导中传播。当 $f<f_c$ 时，这个模式就会逐渐消逝。因为 m 和 n 的最小值都是 1，所以在矩形波导中 TM 模式的最低截止频率是

$$(f_c)_{\mathrm{TM}_{11}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} \tag{3.28}$$

一旦求出$\widetilde{E}_z$ 之后，应用麦克斯韦方程组，就可以得到用$\widetilde{E}_z$ 来表示 TM 波其他场分量的表达式：

$$\widetilde{E}_x = \frac{-\mathrm{j}\beta k_x}{k_c^2}E_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{3.29}$$

$$\widetilde{E}_y = \frac{-\mathrm{j}\beta k_y}{k_c^2}E_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{3.30}$$

$$\widetilde{H}_x = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon k_y}{k_c^2}E_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{3.31}$$

$$\widetilde{H}_y = \frac{-\mathrm{j}\omega\varepsilon k_x}{k_c^2}E_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{3.32}$$

我们已经合理地选择了$\widetilde{E}_z$ 使其在波导的导电壁上满足边界条件 $E_{\tan}=0$。然而，对于 TM 波，还存在其他切向分量，它们在导电壁上也必须为零。例如(见图 3.1)，在 $y=0$ 或 b 上$\widetilde{E}_x=0$。从式(3.29)中可看到，这个边界条件已自动得到满足。从式(3.30)中也可以看到，在 $x=0$ 或 a 的边界上，边界条件 $E_y=0$ 也自动得到满足。因此，对于 TM 波导问题，$\widetilde{E}_z$ 是一个位函数。满足导体上的边界条件$\widetilde{E}_z=0$(狄利赫里边界条件)和麦克斯韦方程就能得到$\widetilde{E}_z$ 的解。其他场分量可以由$\widetilde{E}_z$ 得到，且其他场分量的边界条件也能自动得到

满足。

正如在前面定义 TEM 波的波阻抗一样，还可以定义 TM 波的波阻抗：

$$Z_w = \frac{\widetilde{E}_x}{\widetilde{H}_y} = \frac{-\widetilde{E}_y}{\widetilde{H}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{3.33}$$

当信号频率小于截止频率时，Z_w 是纯虚数，表明在波导横截面上的电场与磁场在时间上相互正交，坡印亭矢量在 z 方向上的分量是虚数，功率流是纯无功的。波是逐渐消逝的。

在无界媒质中，信号的波长 λ 由下式给出

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.34}$$

可以将波导波长 λ_g 定义为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{3.35}$$

当信号频率大于截止频率时，波导波长 λ_g 大于信号在无界媒质中的波长 λ。有时候，定义一个波导的截止波长 λ_c 会更方便：

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \tag{3.36}$$

如果 $\lambda<\lambda_c$，波导模式将是传播模式。

3.3　矩形波导中的 TE_{mn} 模式

TE 模式的 $\widetilde{E}_z=0$，但是 $\widetilde{H}_z\neq 0$。分量 $\widetilde{H}_z$ 满足

$$\nabla^2\widetilde{H}_z + k^2\widetilde{H}_z = 0 \tag{3.37}$$

令

$$\widetilde{H}_z(x,y,z) = G(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.38}$$

函数 G 满足

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_c^2 G = 0 \tag{3.39}$$

式中，k_c^2 仍由式(3.5)给出。

由式（2.26）可知，在 PEC（Perfect Electric Conductor，PEC）壁上，$\widetilde{H}_z$ 的边界条件是

$$\frac{\partial\widetilde{H}_z}{\partial n} = 0 \tag{3.40}$$

如图 3.2 所示，这里 $\hat{n}$ 是单位法向矢量。这个边界条件可以转化为如下关于 G 的边界条件：

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0,\quad x = 0 \text{ 或 } a \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0,\quad y = 0 \text{ 或 } a \tag{3.42}$$

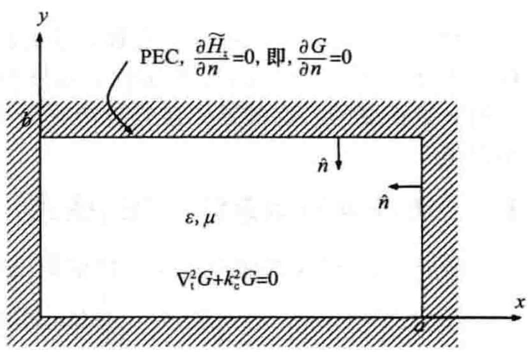


图 3.2　一个矩形波导的横截面。TE、模式。诺依曼问题

像在 TM 波中的情况一样，可以证明，当满足式(3.41)和式(3.42)时，在 PEC 壁上的所有其他边界条件就能自动得到满足：

$$\widetilde{H}_z(x,y,z) = H_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.43}$$

式中，H_{mn} 是 TE_{mn} 模式的模式常数。m 或 n 的最小值是零。对 TE 模式来说，位函数是

$\widetilde{H}_z$，因为在边界上位函数的法向导数为零，所以其边界值问题是诺依曼边值问题。式(3.27)给出了 TE 模式的截止频率 f_c。如果 $a>b$，那么选择 $m=1$ 和 $n=0$，可得到最低的截止 TE 模式。若选择 $m=n=0$，将使波导中所有场分量都是零，这是一个平凡解。

3.4 矩形波导中的主模：TE_{10}模式

式(3.49)给出了矩形波导中所有模式的最低截止频率，这种模式称为主模。在图 3.3 中示出了一个尺寸为 $b/a=1/2$ 的矩形波导的归一化截止频率。通常，一个波导的主模的截止频率设计得要比其工作频率低 30%。从图 3.3 中可以看到，工作频率低于次模 TE_{01} 和 TE_{02}的截止频率，因此在波导中只有主模可以传播。实际上，在波导的激励点附近可以激发出高阶模式，但是由于这些高阶模式是倏逝波，因此它们在距激励源很短的距离处就消失了。考虑到 TE_{10}模式的重要性，让我们更详细地研究这一模式。TE_{10}模式的场由下式给出

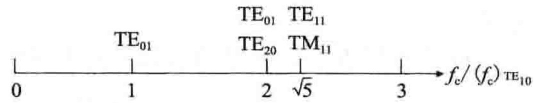


图 3.3 一个尺寸为 $b/a=\frac{1}{2}$的矩形波导的归一化截止频率

$$\widetilde{H}_z = H_{10}\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.44}$$

$$\widetilde{E}_y = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} = \frac{-\mathrm{j}\omega\mu}{\pi/a}H_{10}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.45}$$

$$\widetilde{H}_x = \frac{\gamma}{\pi/a}H_{10}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.46}$$

其他分量都是零。在这种情况下的波阻抗为

$$(Z_w)_{TE_{10}} = -\frac{\widetilde{E}_y}{\widetilde{H}_x} = \frac{\eta}{\cos\psi} \tag{3.47}$$

式中

$$\cos\Psi = \sqrt{1-(f_c/f)^2} \tag{3.48}$$

对于这种情况，TE_{10}模式的截止频率是

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.49}$$

当 $f_c>f$ 时，$\gamma=\mathrm{j}\beta$，β 是实数，这种模式是传播模式，由式(3.47)给出的波阻抗是实数。当 $f_c<f$ 时，$\gamma=\alpha$，α 是实数，这种模式不能传播，其波阻抗是虚数。电场和磁场在时间上是正交的，在波导中没有有功功率流。这种模式是倏逝波，场衰减表明能量储存的局部化。

3.5 波导中的功率流：TE_{10}模式

研究 TE_{10}模式的功率流是一件很简单的事情。由式(3.46)和式(3.47)，得到

$$\langle \boldsymbol{S}_{ZR}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\widetilde{\boldsymbol{H}}^*]\cdot\hat{z} \tag{3.50}$$

$$\langle(\boldsymbol{S}_{ZR})_{TE_{10}}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\eta}{\cos\psi}|H_{10}|^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{\pi x}{a},\quad f>f_c \tag{3.51}$$

式中，ψ 仍然由式(3.48)给出。功率流 P_{10} 由下式给出

$$P_{10} = \int_0^b\int_0^a\langle(\boldsymbol{S}_{ZR})_{TE_{10}}\rangle\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}|H_{10}|^2\frac{\eta}{\cos\psi}\frac{ab}{2} \tag{3.52}$$

3.6 由非理想导体和电介质引起的 TE_{10} 模式的衰减

我们已经看到，当信号频率低于截止频率时，波会衰减。波成为倏逝波。即使 $f>f_c$，波也会由于非理想的材料而衰减。波中场量的指数因子具有如下形式

$$e^{-\gamma z}=e^{-(\alpha_c+\alpha_d)z}e^{-j\beta z} \tag{3.53}$$

在上式中，α_c 是由在构成波导的非理想导体内波能量转化成热能所引起的场量的衰减。α_d 是由在非理想电介质内波能量转化成热能所引起的场量的衰减。这些由下式给出

$$\alpha_c=\frac{R_s(Z_w)_{TE_{10}}}{\eta^2 ba}\left(a+\frac{b\lambda^2}{2a^2}\right)=\frac{R_s}{b\eta\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right] \tag{3.54}$$

$$\alpha_d=\frac{k\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}{2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \tag{3.55}$$

在上式中，R_s 是导体的表面电阻，$\sigma/\omega\varepsilon$ 是媒质的损耗正切。在本章末尾将把衰减常数公式的推导过程作为习题。

3.7 圆柱波导：TM 模式

令

$$\widetilde{E}_z(\rho,\phi,z)=F(\rho,\phi)e^{-\gamma z} \tag{3.56}$$

且

$$F(\rho,\phi)=f_1(\rho)f_2(\phi) \tag{3.57}$$

将分离变量法应用于如下偏微分方程

$$\nabla_t^2F+k_c^2F=0 \tag{3.58}$$

将得到含有分离常数 k_c 和 n 的两个常微分方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{df_1}{d\rho}\right)+\left(k_c^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)f_1=0 \tag{3.59}$$

$$\frac{d^2f_2}{d\phi^2}+n^2f_2=0 \tag{3.60}$$

容易看到，式(3.59)就是贝塞尔方程式(2.120)，所以其解可以写成下列函数乘积的一种线性组合形式：

$$F=\begin{Bmatrix}J_n(k_c\rho)\\Y_n(k_c\rho)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\\cos n\phi\end{Bmatrix} \tag{3.61}$$

因为在场域中包含点 $\rho=0$，所以选择 J_n 作为变量 ρ 的函数，并利用在 $\rho=a$ 的边界条件 $\widetilde{E}_z=F=0$ 可得(见图 3.4)：

$$k_ca=\chi_{nl} \tag{3.62}$$

式中，χ_{nl} 是 J_n 的第 l 个根，在表 2.4 中列出了一部分根。

截止频率由下式给出

$$(f_c)_{TM_{nl}}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{\chi_{nl}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.63}$$

因为当 $n=0$，$l=1$ 时，χ_{nl} 的最小值是 2.405，所以 TM 模式的最低截止频率是

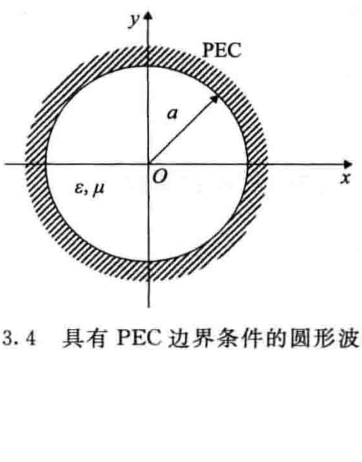


图 3.4 具有 PEC 边界条件的圆形波导

$$(f_c)_{TM_{01}} = \frac{\chi_{01}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2.405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.64}$$

3.8 圆柱波导：TE 模式

令

$$\widetilde{H}_z(\rho,\phi,z) = G(\rho,\phi)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{3.65}$$

同样，利用式(3.61)可以写出 G 的解。然而，在 TE 波的情况下，由诺依曼边界条件

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0 \tag{3.66}$$

可以得到如下条件

$$J'_n(k_c a) = 0 \tag{3.67}$$

式中，关于变量 $k_c\rho$ 求导数。因此，截止波数由下式给出

$$(k_c)_{TE} = \frac{\chi'_{nl}}{a} \tag{3.68}$$

式中，χ'_{nl} 是第一类 n 阶贝塞尔函数的导数的第 l 个根。表 2.4 列出了根 χ'_{nl} 的值。当 $n=1$ 且 $l=1$ 时，出现最小根且其值是 1.841。因此，圆柱波导的最低截止频率为

$$(f_c)_{TE_{11}} = \frac{1.841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.69}$$

3.9 扇形波导

图 3.5 所示为一个具有理想导电边界的扇形波导的横截面。

对于 TM 模式来说，其边界条件是狄利赫里边界条件：

$$F = 0,\quad \phi = 0 \text{ 或 } \alpha \tag{3.70}$$

$$F = 0,\quad \rho = a \tag{3.71}$$

由式(3.71)可知，变量 ρ 的函数应该选用第一类贝塞尔函数，然而，贝塞尔函数的阶数不必是整数，在这种情况下场域限制在 $0<\phi<\alpha$ 内。在圆柱波导情况中，场域的范围是 $0<\phi<2\pi$。在这样的情况下，变量 ϕ 的函数应该选用 $\sin n\phi$ 和 $\cos n\phi$ 的一种线性组合，其中，n 是一个整数。为了确保位函数的唯一性，这样的约束是必要的。注意，仅当 n 是整数时，$\cos n\phi$ 和 $\cos n(\phi+2\pi)$ 才相等。对于扇形截面波导来说，变量 ϕ 的函数仍然是 $\sin\nu\phi$ 和 $\cos\nu\phi$ 的一种线性组合，但是 ν 不必是整数。考虑到这些约束条件，可以将位函数写为

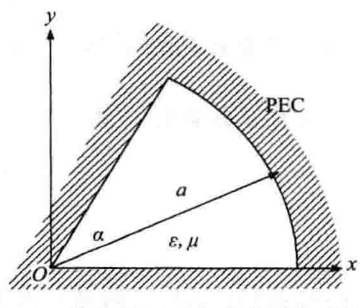


图 3.5 具有 PEC 边界条件的扇形波导

$$F = J_\nu(k_c\rho)\sin\nu\phi \tag{3.72}$$

式中

$$\nu = \frac{n\pi}{\alpha} \quad \text{且} \quad k_c a = \chi_{(n\pi/\alpha)l} \tag{3.73}$$

对于 TE 模式来说

$$G = J_\nu(k_c\rho)\cos\nu\phi \tag{3.74}$$

式中

$$k_c a = \chi'_{(n\pi/\alpha)l} \tag{3.75}$$

3.10　电介质圆柱波导——光纤

在 3.7 节和 3.8 节中已经看到，电磁波可以被一个空心圆柱导电管所导引。在波导内，场可以分为 TM 模式(在边界上 $E_z=0$)或 TE 模式(在边界上 $\partial H_z/\partial n=0$)。在任意一种情况中，圆柱体外的场都为零。试问一个圆柱形电介质棒能导引电磁波吗？答案是肯定的。在前面讨论当电磁波以大于临界角的入射角从光密媒质向光疏媒质中传播时，曾经定性地提到过此种波导可以导引一种表面波。这一节将把这个问题看做边值问题来加以研究。如图 3.6 所示，介电常数在光纤横截面上以阶跃指数形式变化。

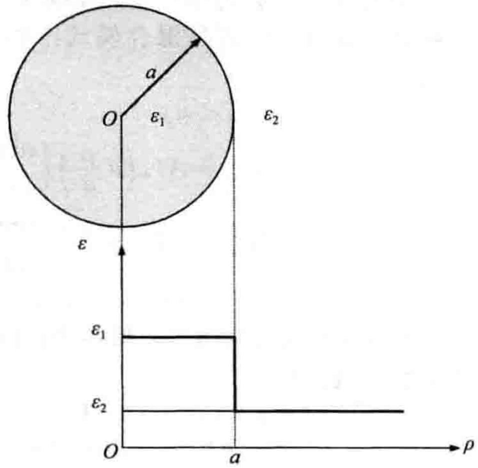


图 3.6　阶跃指数光纤

与导体波导不同，在这里注意，这时的边界条件是在 $\rho=a$ 处对所有 ϕ 和 z 切向电场和磁场都连续。

$$E_{z1}=E_{z2},\quad \rho=a \tag{3.76}$$

$$H_{z1}=H_{z2},\quad \rho=a \tag{3.77}$$

$$E_{\phi1}=E_{\phi2},\quad \rho=a \tag{3.78}$$

$$H_{\phi1}=H_{\phi2},\quad \rho=a \tag{3.79}$$

这表明，一般情况下，不能再将模式分为 TE 模式或 TM 模式。在这种情况下，一般模式可能是既有 E_z 又有 H_z 分量的一个混合模式。然而，我们可以证明，对于 $n=0$ 的特殊情况，光纤波导可以有一个 TM_{0l}或 TE_{0l}的传输模式。让我们来仔细地分析一下 TM 模式情况。当 $0<\rho<a$ 时，我们将 E_z 选择成以 ρ 为自变量的函数 $J_0(k_{c1}\rho)$；当 $a<\rho<\infty$时，选择函数 $K_0(k_{c2}\rho)$。当 $a<\rho<\infty$时，选择修正贝塞尔函数 K_0 就是为了保证电磁场的幅值随 ρ 增大而衰减。这种选择刚好与在式(2.121)中选择$H_0^{(2)}$ 相反，这是由于在式(2.121)中需要在 $\rho=\infty$处有一个向外的圆柱波。因此，E_z 的表达式如下：

$$E_{z1}=A_0J_0(k_{c1}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\quad 0<\rho<a \tag{3.80}$$

$$E_{z2}=B_0K_0(k_{c2}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\quad a<\rho<\infty \tag{3.81}$$

式中

$$k_{c1}^2+\beta^2=k_1^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_1 \tag{3.82}$$

$$-k_{c2}^2+\beta^2=k_2^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_2 \tag{3.83}$$

可以证明[1]，如果下面的超越方程成立，则边界条件(式(3.76)和式(3.79))也就能得到满足：

$$\frac{J_1(k_{c1}a)}{J_0(k_{c1}a)}=-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{k_{c1}}{k_{c2}}\frac{K_1(k_{c2}a)}{K_0(k_{c2}a)} \tag{3.84}$$

因为超越方程有多个解，所以会产生多个 TM 模式。接下来，考虑截止频率的概念在电介质波导中是否也成立。因为对于 k_{c2}^2的负值来说，修正贝塞尔函数 K_0 不再是一个单调函数且媒质 2 中的波也不再是一个倏逝波，所以当 $k_{c2}=0$ 时，便会出现波的截止现象。更进一步分析表明，$k_{c2}=0$ 等价于 $J_0(k_{c1}a)=0$ 或

$$(k_{c1})_{0l}=\frac{\chi_{0l}}{a} \tag{3.85}$$

和

$$(k_{c1})_{01}=\frac{\chi_{01}}{a}=\frac{2.4049}{a} \tag{3.86}$$

注意，在截止频率处

$$k_{c1}^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_1^2 - (k_2^2 + k_{c2}^2) = k_1^2 - k_2^2 \tag{3.87}$$

对于 TE_{0l}模式，特征方程为

$$\frac{J_1(k_{c1}a)}{J_0(k_{c1}a)} = -\frac{k_{c1}}{k_{c2}}\frac{K_1(k_{c2}a)}{K_0(k_{c2}a)} \tag{3.88}$$

如果 $n\neq 0$，此时场不能分离成 TE 模式和 TM 模式。所有的场量都要通过连续条件相互耦合。此时，模式是混合模式，都具有非零的 E_z 和 H_z。在两个区域中，场量可以写为[1]

$$\begin{aligned} &\rho < a, && \rho > a, \\ &E_{z1} = AJ_n\left(u\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}, && E_{z2} = CK_n\left(w\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix} \\ &H_{z1} = BJ_n\left(u\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{Bmatrix}, && H_{z2} = DK_n\left(w\frac{\rho}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{Bmatrix} \\ &u^2 = (k_1^2 - \beta^2)a^2, && w^2 = (\beta^2 - k_2^2)a^2 \end{aligned} \tag{3.89}$$

从麦克斯韦方程可以求得各个横向分量。应用边界条件(式(3.76)～式(3.79))，可以得到特征值方程

$$\left[\frac{k_1 J_n'(u)}{uJ_n(u)}\right]^2 + \left[\frac{k_2 K_n'(u)}{wK_n(u)}\right]^2 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{uw}\left[\frac{kJ_n'(u)k_n'(w)}{J_n(u)J_n(w)}\right]^2 = \frac{\beta^2 n^2 v^4}{u^4 w^4} \tag{3.90}$$

式中

$$v^2 = u^2 + w^2 = (k_1^2 - k_2^2)a^2 \tag{3.91}$$

把超越方程式(3.90)的解记为 χ_{nl}。当 $n\neq 0$时，得到一个混合模式，记为 HEM(混合电场和磁场)。第二个下标为奇数的 HEM 模式称为 HE 模式，而第二个下标是偶数的 HEM 模式称为 EH 模式。HE_{11}模式没有截止频率，因此也常称为主模。由参考文献[2，3]，可以得到当 $\varepsilon_{r1}=2.56$、$\varepsilon_{r2}=1$、$k_2=k_0$ 和 $\lambda_0=2\pi/k_0$ 时，HE_{11}模式、TE_{01}模式和 TM_{01}模式的 β/k_0 随 $2a/\lambda_0$ 的变化关系曲线(见图 3.7)。当 $2a/\lambda_0 < 2.4049/\pi\sqrt{\varepsilon_r - 1}$时，仅有主模 HE_{11}存在。

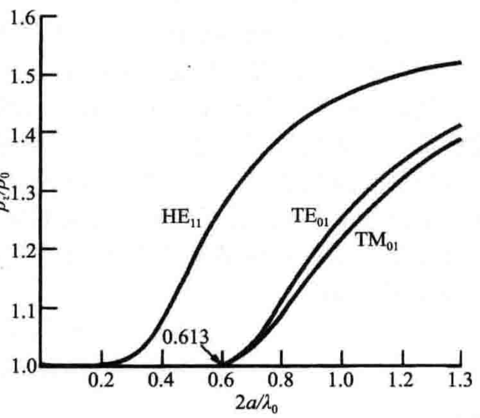


图 3.7 聚苯乙烯棒上前 3 个表面波模式的 β/k_0 比($\varepsilon_r=2.26$)

(图片源自 Collin，R. E. *Field Theory of Guided Waves*，McGraw-Hill，New York，NY，1960.)

参考文献

1. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T. V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd edition, Wiley, New York, NY, 1994.
2. Balanis, C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
3. Collin, R.E. *Field Theory of Guided Waves*, McGraw Hill, New York, NY, 1960.

第4章 三维问题的解

三维问题的解会涉及全部三个空间坐标。在直角坐标系中，讨论三维波是非常直接的，下面将通过一个空腔的例子来讨论三维波。

4.1 PEC 边界矩形腔：TM 模式

图 4.1 所示为一个尺寸为 $a\times b\times h$ 的 PEC 边界矩形腔。

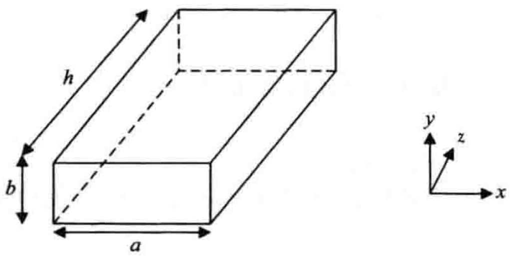


图 4.1 PEC 边界矩形腔

取一段长度为 h 的矩形波导，在 $z=0$ 和 h 处用 PEC 平面将矩形波导封闭，就可以构成这样一个导体空腔。对于 TM 模式，附加的边界条件是

$$\widetilde{E}_{\tan}=0 \quad 在\ z=0\ 或\ h\ 处 \tag{4.1}$$

这个边界条件不是施加在$\widetilde{E}_z$ 上的，但式(4.1)等价于下式(见方程式(2.26))

$$\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial z}=0 \quad 在\ z=0\ 或\ h\ 处 \tag{4.2}$$

由此可以得到

$$\widetilde{E}_z(x,y,z)=E_{mnl}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{l\pi z}{h} \tag{4.3}$$
$$m=1,2,\cdots,\infty,\quad n=1,2,\cdots,\infty,\quad l=0,1,\cdots,\infty$$

在上式中，各个分离常数分别是 $k_x=m\pi/a$，$k_y=n\pi/b$ 和 $k_z=l\pi/h$。因此，得到

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 \tag{4.4}$$

当空腔的尺寸固定时，式(4.4)所表示的频率 ω 取决于 m、n、l、μ 和 ε。对于一个给定的模式和确定的媒质来说，频率 ω 是一个确定的值，称为空腔的谐振频率。谐振频率的值(单位是赫兹)是

$$(f_r)_{\mathrm{TM}_{mnl}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4.5}$$
$$m=1,2,\cdots,\infty,\quad n=1,2,\cdots,\infty,\quad l=0,1,\cdots,\infty$$

最低阶 TM 模式的谐振频率是

$$(f_r)_{\mathrm{TM}_{110}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4.6}$$

4.2 PEC 边界矩形腔：TE 模式

在这种情况下，要满足的附加边界条件是

$$\tilde{H}_z = 0, \quad z = 0 \text{ 或 } h \tag{4.7}$$

现在，很容易得到$\tilde{H}_z$ 的表达式：

$$\begin{gathered}\tilde{H}_z = H_{mnl}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{l\pi z}{h}\\ m = 0,1,2,\cdots,\infty, \quad n = 0,1,2,\cdots,\infty, \quad l = 1,2,\cdots,\infty\end{gathered} \tag{4.8}$$

但是不包括 $m=n=0$。

现在，可以得到谐振频率为

$$\begin{gathered}(f_r)_{\mathrm{TE}_{mnl}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2\right]^{1/2}\\ m = 0,1,2,\cdots,\infty, \quad n = 0,1,2,\cdots,\infty, \quad l = 1,2,\cdots,\infty\end{gathered} \tag{4.9}$$

但是不包括 $m=n=0$。

如果 $h>a>b$，那么最低阶 TE 模式的谐振频率为

$$(f_r)_{\mathrm{TE}_{101}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^{1/2}, \quad h > a > b \tag{4.10}$$

如果 $h>a>b$，由式(4.10)给出的谐振频率低于由式(4.6)给出的谐振频率。

4.3 空腔的 Q 值

波导和空腔问题都假定具有 PEC 边界条件。在求得场量后，可以通过计算在导体壁是非理想情况下的损耗来放宽理想导电边界条件的假设[1]。以 TE_{101} 模式为例，介绍这种方法。将场量写成如下形式：

$$\tilde{E}_y = E_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{h} \tag{4.11}$$

$$\tilde{H}_x = -\mathrm{j}\frac{E_0}{\eta}\frac{\lambda}{2h}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{h} \tag{4.12}$$

$$\tilde{H}_z = \mathrm{j}\frac{E_0}{\eta}\frac{\lambda}{2a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{h} \tag{4.13}$$

通过计算表面电流，就可以得到在导体壁上的功率损耗。表面电流可用磁场表示成如下各式：

前面：$\tilde{K}_y = -\tilde{H}_x\Big|_{z=h}$　　后面：$\tilde{K}_y = \tilde{H}_x\Big|_{z=0}$

左边：$\tilde{K}_y = -\tilde{H}_z\Big|_{x=0}$　　右边：$\tilde{K}_y = \tilde{H}_z\Big|_{x=a}$

$\tilde{K}_x = -\tilde{H}_z\Big|_{y=b}$　　$\tilde{K}_x = \tilde{H}_z\Big|_{y=0}$

顶部：$\tilde{K}_z = \tilde{H}_x\Big|_{y=b}$　　底部：$\tilde{K}_z = -\tilde{H}_x\Big|_{y=0}$

如果导体壁的表面电阻为 R_S，那么损耗由下式给出

$$W_L = \frac{R_S}{2}\left\{2\int_0^b\int_0^a |\tilde{H}_x|^2\Big|_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_0^h\int_0^b |\tilde{H}_z|^2\Big|_{x=0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\int_0^h\int_0^a [|\tilde{H}_x|^2 + |\tilde{H}_z|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right\} \tag{4.14}$$

$$W_L = \frac{R_S\lambda^2}{8\eta^2}E_0^2\left[\frac{ab}{h^2} + \frac{bh}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a}\right)\right] \tag{4.15}$$

如果忽略损耗，那么在空腔中能量将通过电场能和磁场能相互转换。通过计算能量最

大值瞬时储存的能量，我们可以计算出在空腔中的总能量：

$$U=(U_{\mathrm{E}})_{\max}=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^h\int_0^b\int_0^a|\widetilde{E}_y|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\varepsilon abh}{8}E_0^2 \tag{4.16}$$

品质因数 Q 是衡量一个空腔作为一个谐振器好坏的定量描述。品质因数定义为

$$Q=\frac{\omega_{\mathrm{r}}U}{W_{\mathrm{L}}} \tag{4.17}$$

由式(4.14)、式(4.16)和式(4.17)，我们得到

$$Q=\frac{\pi\eta}{4R_{\mathrm{S}}}\left[\frac{2b(a^2+h^2)^{3/2}}{ah(a^2+h^2)+2b(a^3+h^3)}\right] \tag{4.18}$$

对于一个正立方体，上式化简为

$$Q=0.742\frac{\eta}{R_{\mathrm{S}}} \tag{4.19}$$

对于空气介质来说，$\eta=377$，在 10GHz 时铜的 $R_{\mathrm{S}}\approx0.0261$，由此得到品质因数 $Q=$ 10 730。如此大的一个 Q 值不可能由集总电路或者甚至由谐振线而得到。

参考文献

1. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T. V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd edition, Wiley, New York, NY, 1994.

第5章 球面波及其应用

到目前为止，我们已经讨论了平面波和柱面波。在这两种情况中，能够相对容易地基于 TM^z 模式和 TE^z 模式来构造问题的解。通过求解一些波导和空腔问题，已经说明了这些解。这里，上标 z 是为了指出横截面是与 z 轴相垂直，而且所考虑结构的横截面沿 z 轴是不变化的。在球坐标系中，我们找不到任何一个像这样的横截面，因此球面波问题从数学角度来看是比较复杂的。但是，仍然可以将模式分为 TM^r 模式和 TE^r 模式。

球坐标系中的解会涉及特殊函数：球贝塞尔函数，以及连带勒让德函数。球贝塞尔函数与半积分型贝塞尔函数是相关的。

5.1 半积分型贝塞尔函数

在求球坐标系中的标量亥姆霍兹方程的解时，会遇到微分方程

$$u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)+\left[u^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]f=0 \tag{5.1}$$

当展开这个微分方程时，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}u^2}+\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}+\left[1-\frac{(n+1/2)}{u^2}\right]f=0 \tag{5.2}$$

与式(2.120)相比较，很容易发现，f 可以写为如下半积分型贝塞尔函数的一种线性组合形式：

$$f=\begin{Bmatrix}J_{n+1/2}(u)\\ Y_{n+1/2}(u)\\ H^{(1)}_{n+1/2}(u)\\ H^{(2)}_{n+1/2}(u)\\ I_{n+1/2}(u)\\ K_{n+1/2}(u)\end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

可以证明，半积分型贝塞尔函数可以化简为如下更为简单的形式：

$$J_{n+1/2}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^{n+1/2}\left(-\frac{1}{x}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{5.4}$$

$$Y_{n+1/2}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1/2}\left(\frac{1}{x}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\cos x}{x}\right) \tag{5.5}$$

特殊地，由式(5.4)可以得到

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{5.6}$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\cos x\right] \tag{5.7}$$

由式(5.6)和式(5.7)，可以得到半积分型贝塞尔函数及其导数的零点。表5.1和表5.2分别列出了这些零点的值。

表 5.1 半积分型贝塞尔函数 $\chi_{n+1/2,l}$

$J_{1/2}$	$J_{3/2}$	$J_{5/2}$
3.1416	4.4934	5.7635
6.2832	7.7253	9.0950

表 5.2 半积分型贝塞尔函数 $\chi'_{n+1/2,l}$ 的导数的零点

$J'_{1/2}$	$J'_{3/2}$	$J'_{5/2}$
1.1655	2.4605	3.6328
4.6042	6.0293	7.3670

5.2 标量亥姆霍兹方程的解

在球坐标系中，应用分离变量法可以求如下标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \tag{5.8}$$

和

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}+k^2F=0$$

的解。令

$$F=(r,\theta,\phi)=f_1(r)f_2(\theta)f_3(\phi) \tag{5.9}$$

将式(5.9)代入式(5.8)中并对其进行一些数学处理后，得到如下对于 f_1、f_2 和 f_3 的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r}\right)+[k^2r^2-n(n+1)]f_1=0 \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\sin\theta\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]f_2=0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_3}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2f_3=0 \tag{5.12}$$

其中，m 和 n 是两个分离常数。

将

$$r=\frac{u}{k}\ \text{和}\ f_1=\frac{f}{\sqrt{r}}=\sqrt{\frac{k}{u}}f \tag{5.13}$$

代入式(5.10)中，得到方程式(5.2)，其中，f 是在式(5.3)中给出的半积分型贝塞尔函数的一种线性组合。f_1 的解是

$$f_1(r)=\frac{f(u)}{\sqrt{r}}=\frac{f(kr)}{\sqrt{r}} \tag{5.14}$$

若用半积分型贝塞尔函数 $B_{n+1/2}$来定义球贝塞尔函数 b_n，得到

$$b_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}B_{n+1/2}(kr) \tag{5.15}$$

式中，b_n 适合于任意一个球贝塞尔函数 j_n、y_n、$h_n^{(1)}$ 和 $h_n^{(2)}$，而 $B_{n+1/2}$适合于任意一个半积分型贝塞尔函数 $J_{n+1/2}$、$Y_{n+1/2}$、$H_{n+1/2}^{(1)}$和 $H_{n+1/2}^{(2)}$。

方程式(5.11)称为连带勒让德方程，它的解是 n 阶与 m 阶第一类(P_n^m)和第二类(Q_n^m)连带勒让德多项式的线性组合。连带勒让德函数可以表示成如下多项式：

$$P_n^m(x)=(x^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) \tag{5.16}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{5.17}$$

$$Q_n^m(x)=(x^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_n(x) \tag{5.18}$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}P_{l-1}(x)P_{n-1}(x) \tag{5.19}$$

零阶($m=0$)连带勒让德多项式称为勒让德多项式。在式(5.16)～式(5.19)中，$x=$

$\cos\theta$。注意，m是在 $0\sim n$ 之间的一个整数。图 5.1 和表 5.3 给出了若干个勒让德多项式的曲线与表达式。可以看到，在极轴上，也即$\theta=0$或 π，$Q_n\to\infty$。因此，对于在场域中一个包含正或负极轴的问题，只有函数 P_n^m 适合于选作问题的解。方程式(5.12)的解是$\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$ 的线性组合。将 f_1、f_2 和 f_3 的解放在一起，方程式(5.8)的解就可以写为

$$F(r,\theta,\phi)=\begin{Bmatrix} j_n(kr) \\ y_n(kr) \\ h_n^{(1)}(kr) \\ h_n^{(2)}(kr) \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_n^m(\cos\theta) \\ Q_n^m(\cos\theta) \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

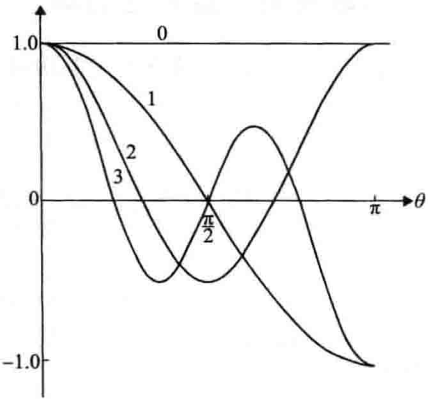


图 5.1 多项式 $P_n(\cos\theta)$。其中标出了阶数 n

表 5.3 勒让德函数

$P_0(\cos\theta)=1$	$Q_1(\cos\theta)=\frac{\cos\theta}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-1$
$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$	$Q_2(\cos\theta)=\frac{3\cos^2\theta-1}{4}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\frac{3\cos\theta}{2}$
$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$	$P_1^1(\cos\theta)=(1-\cos^2\theta)^{1/2}$
$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}(5\cos^2\theta-3\cos\theta)$	$P_2^1(\cos\theta)=3\cos\theta(1-\cos^2\theta)^{1/2}$
$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0,\quad n\neq q$	$P_2^2(\cos\theta)=3(1-\cos^2\theta)$
$\int_0^\pi[P_n(\cos\theta)]^2\sin\theta d\theta=\frac{2}{2n+1}$	$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0,\quad n\neq q$
$Q_0(\cos\theta)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$	$\int_0^\pi[P_n^m(\cos\theta)]^2\sin\theta d\theta=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

5.3 矢量亥姆霍兹方程

在无源区域中，电场和磁场满足矢量亥姆霍兹方程

$$\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}-k^2\widetilde{\boldsymbol{E}}=\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{E}}+k^2\widetilde{\boldsymbol{E}}=0 \tag{5.21}$$

$$\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}-k^2\widetilde{\boldsymbol{H}}=\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{H}}+k^2\widetilde{\boldsymbol{H}}=0 \tag{5.22}$$

在直角坐标系中，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$的每一个坐标分量都满足标量亥姆霍兹方程式(5.8)，但是在球坐标系中的各个分量却不满足方程式(5.8)。

在球坐标系中，可将这些方程的解看成 TE^r、TM^r 和 TEM^r 模式的形式。

5.4 TM^r 模式

考虑如下式所示的矢量场，就可以构造 TM^r 模式

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}=\nabla\times[\hat{r}r\widetilde{F}_e] \tag{5.23}$$

式中，$\widetilde{F}_e$ 满足方程式(5.8)。可以证明，$\widetilde{\boldsymbol{M}}$满足矢量亥姆霍兹方程。比较$\widetilde{\boldsymbol{M}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$，由式(5.23)可以看到

$$H_r=0 \tag{5.24}$$

$$\widetilde{H}_\theta=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_e}{\partial\phi} \tag{5.25}$$

$$\widetilde{H}_\phi=-\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi} \tag{5.26}$$

将上面各个场量看做以电德拜位$\widetilde{F}_e$表示的 TM^r 模式的磁场分量。从麦克斯韦方程，可以得到相应的电场分量为

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}} = j\omega\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{5.27}$$

其展开式为

$$\widetilde{E}_r = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\,\widetilde{F}_e + k^2 r\,\widetilde{F}_e\right] \tag{5.28}$$

$$\widetilde{E}_\theta = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}r\,\widetilde{F}_e \tag{5.29}$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}r\,\widetilde{F}_e \tag{5.30}$$

5.5　TE^r 模式

考虑如下式所示的矢量函数，就可以构造 TE^r 模式

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \nabla\times[\hat{r}r\,\widetilde{F}_m] \tag{5.31}$$

式中，$\widetilde{F}_m$ 满足方程式(5.8)。可以证明，$\widetilde{\boldsymbol{N}}$满足矢量亥姆霍兹方程。比较$\widetilde{\boldsymbol{N}}$和$\widetilde{\boldsymbol{E}}$，由式(5.31)可以看到

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_r = 0 \tag{5.32}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_m}{\partial\phi} \tag{5.33}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_\phi = -\frac{\partial F_m}{\partial\theta} \tag{5.34}$$

我们将上面各式看做 TE^r 模式的电场表达式。由麦克斯韦方程，可以得到相应的磁场分量

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu\widetilde{\boldsymbol{H}} \tag{5.35}$$

其展开式为

$$\widetilde{H}_r = \frac{j}{\omega\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\,\widetilde{F}_m + k^2 r\,\widetilde{F}_m\right] \tag{5.36}$$

$$\widetilde{H}_\theta = \frac{j}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}r\,\widetilde{F}_m \tag{5.37}$$

$$\widetilde{H}_\phi = \frac{j}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}r\,\widetilde{F}_m \tag{5.38}$$

5.6　球形腔

我们通过求一个由半径 $r=a$ 的 PEC 边界条件围成的球形腔的谐振频率，来说明在球坐标系中解的结构。

对于 TM 模式，$\widetilde{F}_e$ 由式(5.20)给出。

由于在场域中包含 $\theta=0$ 或 π，因此选择 P_n^m 作为变量θ的函数。由于需要一个在原点处为有限值的振荡函数，因此对于变量 n 选择 $j_n(kr)$函数。

在 rF_e 中 r 的变化形式由下式给出

$$rj_n(kr) = r\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{n+1/2}(kr) = \sqrt{r}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}J_{n+1/2}(kr) \tag{5.39}$$

为了适应上面的应用，Schelkunoff 定义了另一组球贝塞尔函数：

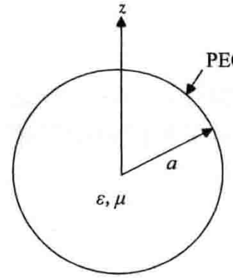


图 5.2　具有 PEC 边界的球形腔

$$\hat{B}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} B_{n+1/2}(x) \tag{5.40}$$

表 5.4 给出了$\hat{J}_n(\zeta)$的根。

表 5.5 列出$\hat{J}'_n(y)=0$ 的根。

表 5.4 $\hat{J}_n$ 的零点

ζ_{np}	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$p=1$	4.493	5.763	6.988
$p=2$	7.725	9.095	10.417
$p=3$	10.904	12.323	13.698

表 5.5 $\hat{J}'_n$ 的零点

ζ'_{np}	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$p=1$	2.744	3.87	4.973
$p=2$	6.117	7.443	8.722
$p=3$	9.317	10.713	12.064

在 $r=a$ 处，PEC 边界条件是$\widetilde{E}_\theta=0$ 和$\widetilde{E}_\phi=0$，由此可以得到如下边界条件

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\widetilde{F}_e)\bigg|_{r=a} = 0 \text{ 也即} \hat{J}'_n(ka) = 0 \tag{5.41}$$

$$(k)^{\mathrm{TM}^r}_{mnp} = \frac{\zeta'_{np}}{a} \tag{5.42}$$

$$(f_r)^{\mathrm{TM}^r}_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\zeta'_{np}}{a}, \quad n,p = 1,2,\cdots,\infty \tag{5.43}$$

注意，n 不能为零，因为

$$P_0^0 = 1 \tag{5.44}$$

以及由式(5.29)和式(5.30)可知，$\widetilde{E}_\theta$ 和$\widetilde{E}_\phi$ 不仅在边界上为零，而且在空腔内部任一点也都为零。因此，$n=0$ 给出了一个平凡解。TM 模式的最低谐振频率为

$$(f_r)^{\mathrm{TM}^r}_{101} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\zeta'_{11}}{a} = \frac{2.744}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}a} \tag{5.45}$$

接下来，考虑 TE^r 模式。由式(5.33)和式(5.34)可知，在这种情况下的边界条件是

$$\frac{\partial F_m}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = 0 \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial\phi}\bigg|_{r=a} = 0 \tag{5.47}$$

它们可以转化为

$$\hat{J}_n(ka) = 0 \tag{5.48}$$

$$(k)^{\mathrm{TE}^r}_{mnp} = \zeta_{np} \tag{5.49}$$

$$(f_r)^{\mathrm{TE}^r}_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\zeta_{np}}{a} \tag{5.50}$$

当 $n=1$ 和 $p=1$ 时，得到谐振频率的最小值

$$(f_r)^{\mathrm{TE}^r}_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{4.493}{a} \tag{5.51}$$

因此，式(5.45)是所有模式的最低谐振频率。球形腔中的模式是高度退化的，也就是说，对于相同的谐振频率可以有许多种不同的场分布。

第6章

拉普拉斯方程：静态和低频近似[⊖]

在一理想传输线上，电压相量$\widetilde{V}$满足常微分方程式(2.54)：

$$\frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial z^2} + \beta^2 \widetilde{V} = 0$$

式中

$$\beta^2 = \omega^2 L' C' = \frac{\omega^2}{v^2}$$

三维亥姆霍兹方程是

$$\nabla^2 \widetilde{\boldsymbol{E}} + k^2 \widetilde{\boldsymbol{E}} = 0$$

式中

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2 \mu \epsilon$$

且∇^2是拉普拉斯算子。

如果频率为零($f=0$)或很低，使得$\beta^2 = k^2 \approx 0$，那么亥姆霍兹方程可以近似为拉普拉斯方程。

静态或低频问题都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{6.1}$$

式中，Φ称为电位。在基本电磁场课程中，已经讨论了在各种坐标系中拉普拉斯方程的一维解，并通过简单的例子进行了说明。为了完整起见，接下来的一节将列出这些解。

6.1 一维问题的解

在直角坐标系中：

$$\Phi(x) = A_1 x + A_2 \tag{6.2}$$

在圆柱坐标系中：

$$\Phi(\rho) = A_1 \ln\rho + A_2 \tag{6.3}$$

$$\Phi(\phi) = A_1 \phi + A_2 \tag{6.4}$$

在球坐标系中：

$$\Phi(r) = \frac{A_1}{r} + A_2 \tag{6.5}$$

$$\Phi(\theta) = A_1 \ln\left(\frac{\tan\theta}{2}\right) + A_2 \tag{6.6}$$

6.2 二维问题的解

6.2.1 直角坐标系

在第3章中，通过解如下亥姆霍兹方程得到了波导问题的解

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_c^2 F = 0 \tag{6.7}$$

⊖ 第6章的附录参见附录6A。

假设

$$F = f_1(x)f_2(y) \tag{6.8}$$

式中，$f_1(x)$和 $f_2(y)$分别由式(3.15)和(3.16)的形式给出，其中 $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$。对于拉普拉斯方程来说，因为 $k_c^2 = 0$，所以有 $k_x^2 = -k_y^2$。

不言而喻，如果变量 x 的函数选择式(3.15)中前四个函数中的任意一个，那么变量 y 的函数就不得不选择式(3.16)中后四个函数中的某一个，并且要求 $|k_x| = |k_y|$。当然，根据边界条件的需要，$f_1(x)$和 $f_2(y)$的选择也可以相互交换。下面就通过一个例子来说明这一点。

例 6.1 图 6.1 为例 6.1 的几何形状。

若边界条件为

B.C.1 $\Phi = 0, \quad y = 0$

B.C.2 $\Phi = 0, \quad y = b$

B.C.3 $\Phi = 0, \quad x = 0$

B.C.4 $\Phi = f(y) = 100\sin\dfrac{3\pi y}{b}, \quad x = a$

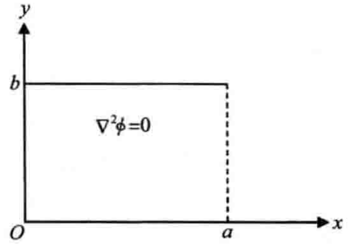


图 6.1 例 6.1 的几何形状

解 由 B.C.1 和 B.C.2 可得，变量 y 的变化形式是

$$f_1(y) \sim \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1,2,\cdots,\infty$$

由 B.C.3 可得，变量 x 的变化形式必须是

$$f_1(x) \sim \sinh\frac{n\pi x}{b}, \quad n = 1,2,\cdots,\infty$$

如果取 $n=3$，就能满足 B.C.4。因此

$$\Phi = A_3 \sinh\frac{3\pi x}{b}\sin\frac{3\pi y}{b}$$

由 B.C.4 可得

$$100\sin\frac{3\pi y}{b} = A_3 \sinh\frac{3\pi a}{b}\sin\frac{3\pi y}{b}$$

$$\therefore A_3 = \frac{100}{\sinh(3\pi a/b)}$$

$$\Phi = 100\,\frac{\sinh(3\pi x/b)}{\sinh(3\pi a/b)}\sin\frac{3\pi y}{b} \tag{6.9}$$

稍加分析不难发现，通过观察可直接地写出解(见式(6.9))。当在处理 B.C.4 的过程中代入 $x=a$ 时，其分母中的因子 $\sinh(3\pi a/b)$将与 $\sinh(3\pi x/b)$相抵消。常数 100 是第三个正弦项的傅里叶系数。B.C.4 只要求傅里叶级数中的第三个正弦项存在。如果考察 $f(y)=100\sin(3\pi y/b)$的傅里叶级数展开式，可以看到其他项的傅里叶系数都是零。现在，假定 $f(y)$是一个比 B.C.4 更为普通的函数。显然，其他项的傅里叶系数不可能是零，且有

$$\Phi = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{3\pi y}{b} \tag{6.10}$$

下面通过例 6.2 来说明这样的傅里叶级数解。 ◀

例 6.2 除了以下条件不同之外，其他条件与例 6.1 一样。

B.C.4. $\Phi = f(y) = 100$

解 在 $x=a$ 处的边界是一个电压为 100V 的导体。

当 $f(y)$是定义在区间 $0<y<b$(见图 6.2)上的一个常数时，就必须求出傅里叶系

数 B_n。

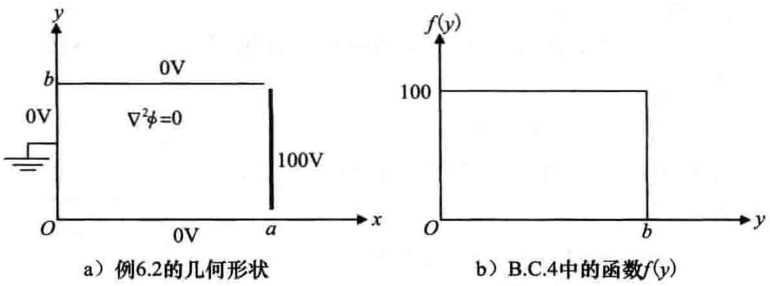


图 6.2　例 6.2 图

在这个问题中，将得到待求傅里叶展开式的两个有意义的关键点。傅里叶级数展开是对周期函数而言的。然而，函数 $f(y)$只定义在基函数 $\sin(\pi y/b)$的半个周期上。基函数的完整周期是 $2b$。因为期望的傅里叶级数仅有正弦项，所以函数必须是一个奇函数。如图 6.3 所示，可以对函数在完整周期 $-b$ 到 $+b$ 上进行延拓。

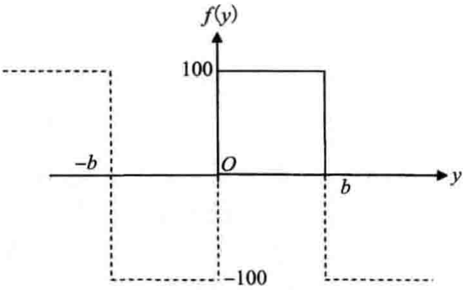


图 6.3　在傅里叶级数中仅含正弦项时例 6.2 的 $f(y)$的周期延拓

注意，这个解仅在区域 $0<x<a$ 和 $0<y<b$ 上是有效的；在 $0<y<b$ 以外的区域中，函数 $f(y)$的延拓形式对于场域中的解来说是不重要的；然而，这个条件在确定傅里叶系数时却是重要的[1]。

对于现在的问题，设 T 为周期，则

$$B_n=\frac{2}{T}\int_T f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y$$

$$B_n=\frac{2}{2b}\int_{-b}^{b} f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y \tag{6.11}$$

因为 $f(y)$是 y 的奇函数，以及 $\sin(n\pi y/b)$也是 y 的奇函数，所以它们的乘积是一个偶函数，对于给定的 $f(y)$进行计算：

$$B_n=\frac{2}{b}\int_0^{b} f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y$$

$$B_n=\frac{200}{b}\,\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b}\bigg|_0^b$$

$$B_n=\begin{cases}\dfrac{400}{n\pi}, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases} \tag{6.12}$$

因此，

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1,\text{奇数}}^{\infty}\frac{400}{n\pi}\,\frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\quad \begin{matrix}0<x<a\\0<y<b\end{matrix} \tag{6.13}$$

◀

从例 6.2 中，可以看出以下有意义的几点。

边界条件 1、2 和 3 决定了傅里叶级数展开的类型，在本例中仅有正弦函数序列，可以通过在求解区域之外对周期函数延拓来得到受限的傅里叶级数。附录 6A 会讨论一个定义在有限范围 $0<t<t_1$ 上的函数 $x(t)$可能的周期延拓，所以傅里叶级数将具有以下性质：

- 仅有奇谐函数；
- 仅有正弦项(见例 6.2)；

- 仅有余弦项和奇谐函数；
- 仅有正弦项和奇谐函数。

后续几节将讨论一个定义在有限区间中的任意函数展开为贝塞尔函数及其他正交函数的广义傅里叶级数问题。

例 6.3 求图 6.4 所示区域中的电位分布。

解 基于在求解例 6.1 和例 6.2 时所获得的经验，通过观察写出问题的解：

$$\Phi(x,y)=\sum_{m=1,\text{奇数}}^{\infty}\frac{400}{m\pi}\frac{\sinh(m\pi x/a)}{\sinh(m\pi b/a)}\sin\frac{m\pi(b-y)}{a} \tag{6.14}$$

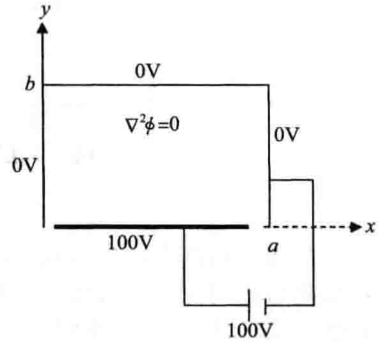


图 6.4　例 6.3 的几何形状

通过观察写出解的步骤如下。

步骤 1：在 x 轴上要求有多个零点，包括在 $x=0$ 处的零点，选择

$$f_1(x)=\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{6.15}$$

步骤 2：由于当 $y=b$ 时，$\Phi=0$，因此选择

$$f_2(y)=\sinh\frac{m\pi}{a}(b-y) \tag{6.16}$$

注意，$\sinh(m\pi/a)(b-y)$是 $\sinh(m\pi y/a)$和 $\cosh(m\pi y/a)$的线性组合，$\sinh(m\pi y/a)$和 $\cosh(m\pi y/a)$是函数 $f_2(y)$的模板中的函数。

步骤 3：分母中的 $\sinh(m\pi b/a)$是在满足 $y=0$ 的边界条件 $\Phi=100$ 时的抵消因子，因此 $B_m=400/m\pi$ 是傅里叶系数。◀

例 6.4 求图 6.5 所示区域中的电位分布。

解

$$\Phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{n\pi}\frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{6.17}$$

$$\Phi_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{50}{m\pi}\frac{\sinh(m\pi x/a)}{\sinh(m\pi b/a)}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \tag{6.18}$$

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2 \tag{6.19}$$

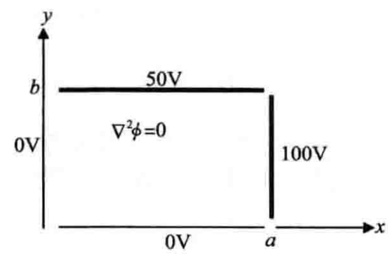


图 6.5　例 6.4 的几何形状

可以使用叠加原理来求解例 6.4。

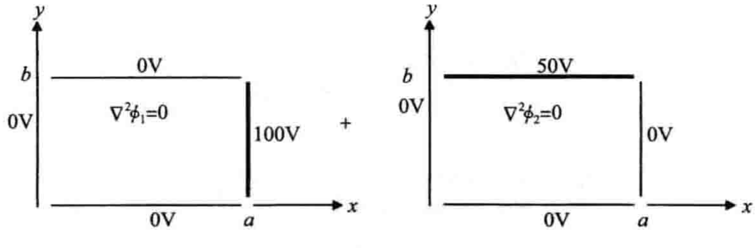


图 6.6　使用叠加原理求解例 6.4

在第 3 章中，我们着眼于得到截止频率，曾经简单地研究了在波导中可能存在的各种模式。我们没有研究源在波导中激励各种模式的问题。通过将源函数展开为各种模式的傅里叶级数就可以得到各种模式的振幅。通常，模式都是一些可以进行这种展开的正交函数。文献[2]利用了这种展开。◀

6.2.2　圆柱坐标系

情况 1：

$$\Phi = \Phi(\rho,\phi) \tag{6.20}$$

首先，考虑电位是坐标 ρ 和 ϕ 的函数的情况。那么

$$\nabla^2\Phi(\rho,\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{6.21}$$

令

$$\Phi(\rho,\phi) = f(\rho)g(\phi) \tag{6.22}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial[f(\rho)g(\phi)]}{\partial\rho}\right) + \frac{f(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2} = 0$$

$$\frac{g(\phi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \frac{f(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2} = 0$$

将上述方程两端同乘以 $\rho^2/(f(\rho)g(\phi))$，得到

$$\underbrace{\frac{\rho}{f(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)}_{\text{第一项}=n^2} + \underbrace{\frac{1}{g(\phi)}\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2}}_{\text{第二项}=-n^2} = 0 \tag{6.23}$$

由于第一项仅为 ρ 的函数，第二项仅为 ϕ 的函数，因此它们都必须为常数，且这两个常数之和必须为零。将分离常数记为 n^2，方程式(6.23)可以写为两个常微分方程：

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2 f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho} + n^2 f(\rho) = 0 \tag{6.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + n^2 g(\phi) = 0 \tag{6.25}$$

$f(\rho)$的解可以写为 ρ^n 和 ρ^{-n} 的线性组合，因此

$$f(\rho) = \begin{Bmatrix}\rho^n \\ \rho^{-n}\end{Bmatrix}$$

$$g(\phi) = \begin{Bmatrix}\cos n\phi \\ \sin n\phi\end{Bmatrix} \tag{6.26}$$

例 6.5 换向器问题

图 6.7 给出了换向器问题的几何形状。场域是 $0<\rho<a$，长圆柱管上半部分的电位是 V_0，下半部分的电位是 $-V_0$。

解　从物理意义角度来看，我们知道在 $\rho=0$ 处的电位是有限值。$f(\rho)$的模板中的第二项 ρ^{-n}随 ρ 趋于零成为无穷大值。因此，对于变量 ρ，选择 ρ^n。如图 6.8 所示，边界条件 $\Phi(a,\ \phi)=F(\phi)$是 ϕ 的奇函数。

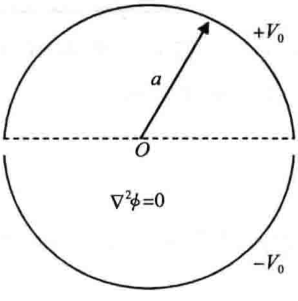


图 6.7　例 6.5 的几何形状

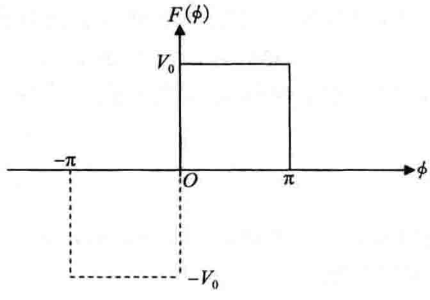


图 6.8　例 6.5 中函数 $F(\phi)$的草图

因此，通过观察，可以直接写出

$$\Phi(\rho,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \sin n\phi \tag{6.27}$$

且

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(\phi)\sin n\phi \, d\phi = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi}, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases} \tag{6.28}$$

情况 2：

$$\Phi = \Phi(\rho, z) \tag{6.29}$$

应用分离变量法，可得到如下两个含有分离常数 k^2 的常微分方程：

$$\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df_1}{d\rho} + k^2 f_1 = 0 \tag{6.30}$$

$$\frac{d^2 f_2}{dz^2} - k^2 f_2 = 0 \tag{6.31}$$

方程式(6.30)与 $n=0$ 时的方程式(3.59)相同。因此，其解可以写为

$$f_1 = \begin{Bmatrix} J_0(k\rho) \\ Y_0(k\rho) \end{Bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{Bmatrix} \cosh kz \\ \sinh kz \\ e^{\mp kz} \end{Bmatrix} \tag{6.32}$$

或

$$f_1 = \begin{Bmatrix} I_0(K\rho) \\ K_0(K\rho) \end{Bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{Bmatrix} \cos Kz \\ \sin Kz \end{Bmatrix} \tag{6.33}$$

式中

$$K^2 = -k^2 \tag{6.34}$$

例 6.6 在场域 $0<\rho<a$，$0<z<l$，$0<\phi<2\pi$ 中，满足拉普拉斯方程。

如图 6.9 所示，在曲面 $\rho=a$，$0<z<l$ 上的电位为常值 V_0。图 6.9 中的几何形状物体的两端接地。

求电位分布 $\Phi(\rho,\phi,z)$。

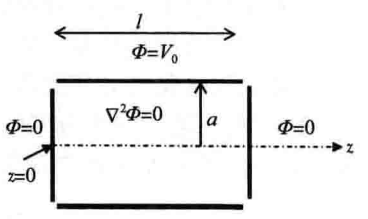


图 6.9 例 6.6 的几何形状

解 注意到这一问题对于坐标 ϕ 的对称性，因此

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \Phi(\rho,z) \tag{6.35}$$

因为在 z 轴上必须有多个零点，且在 $z=0$ 处电位为零，所以选择

$$f_2 = \sin Kz \tag{6.36}$$

$$K = \frac{n\pi}{l} \tag{6.37}$$

由式(6.33)，注意，当 $\rho\to 0$ 时，K_0 会趋近于无穷大，因此对于变量 ρ，通过观察选择 I_0，可以写出

$$\Phi(\rho,z)=\sum_{n=1,\text{奇数}}^{\infty}\frac{4V_0}{n\pi}\frac{I_0(n\pi\rho/l)}{I_0(n\pi a/l)}\sin\frac{n\pi z}{l} \tag{6.38}$$

◀

例 6.7 场域与例 6.6 中的相同。然而，如图 6.10所示，边界条件是不同的，有：

$$\Phi(a,z)=0 \tag{6.39}$$

$$\Phi(\rho,0)=0 \tag{6.40}$$

$$\Phi(\rho,l)=F(\rho)=V_0 \tag{6.41}$$

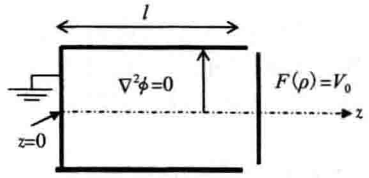


图 6.10　例 6.7 的几何形状

边界条件 $\Phi(a,\ z)=0$ 要求变量 ρ 是一个振荡函数。因此，应该从式(6.32)中选择对于变量 ρ 的函数形式。另外，在 z 轴($\rho=0$)上，f_1 必须是有限值。通过观察，可以写出

$$\Phi(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_mJ_0(p_m(\rho/a))}{\sinh(x_{om}l/a)}\sinh\frac{p_mz}{a} \tag{6.42}$$

式中，$p_m=x_{om}$ 是 J_0 的第 m 个根。表 2.4 列出了若干个根的数值。

如果下式成立，边界条件 $\Phi(\rho,\ l)=F(\rho)=V_0$ 就可以满足：

$$\Phi(\rho,l)=F(\rho)=V_0=\sum_{m=1}^{\infty}A_{\mathrm{m}}\left(\frac{x_{om}\rho}{a}\right) \tag{6.43}$$

式(6.43)是一个任意函数的贝塞尔级数展开式。类似于对于三角函数的傅里叶级数展开，这样的展开是可行的，因为这些贝塞尔函数也具有正交性质：

$$\int_0^a\rho J_0\left(\frac{p_m\rho}{a}\right)J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho=0,\quad m\neq q \tag{6.44}$$

$$\int_0^a\rho\left[J_0\left(\frac{p_mr}{a}\right)J_0\left(\frac{p_qr}{a}\right)\right]\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{2}J_1^2(p_q),\quad m=q \tag{6.45}$$

用 $\rho J_0(p_q\rho/a)$乘以式(6.43)两边并在 0 到 a 上进行积分，得到

$$\int_0^aF(\rho)\rho J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho=\int_a\rho\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0\left(\frac{p_m\rho}{a}\right)J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho=A_q\frac{a^2}{2}J_1^2(p_q)$$

因此，

$$A_q=\frac{2}{a^2J_1^2(p_q)}\int_0^aF(\rho)\rho J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho \tag{6.46}$$

当 $F(\rho)=V_0$ 时，有

$$A_q=\frac{2V_0}{a^2J_1^2(p_q)}\int_0^a\rho J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho \tag{6.47}$$

利用积分

$$\int xJ_0(x)\mathrm{d}x=xJ_1(x) \tag{6.48}$$

得到

$$\int_0^a\rho J_0\left(\frac{p_q\rho}{a}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{p_q}J_1(p_q) \tag{6.49}$$

将式(6.49)代入式(6.47)中，得到

$$A_q=\frac{2V_0}{p_qJ_1(p_q)} \tag{6.50}$$

$$\Phi(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{((2V_0/p_m)/J_1(p_m))J_0(p_m(\rho/a))}{\sinh(x_{om}l/a)}\sinh\frac{p_mz}{a} \tag{6.51}$$

◀

6.3 三维问题的解

6.3.1 直角坐标系

与6.2.1节讨论过的求二维问题的解一样，同样可以得到在一个封闭立方体中拉普拉斯方程的三维解。也可以从4.1节中讨论的矩形腔问题的角度来讨论三维解。关键的一点是，对于拉普拉斯方程，有

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=0 \tag{6.52}$$

反过来，这意味着如果 $f_1(x)$和 $f_2(x)$是三角函数，那么 $f_3(x)$就必须是双曲函数。例6.8将说明这种方法。

例6.8 如图4.1所示，在一个尺寸为 a、b 和 h 的矩形腔中，其表面 $x=0$，a；$y=0$，b；$z=0$ 上的电位均为零。而在表面 $z=h$ 上，电位为 V_0。求在场域 $0<x<a$，$0<y<b$，$0<z<h$ 中的电位 Φ。

假设在场域中满足拉普拉斯方程。

解 通过观察可以直接将解写为

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\frac{\sinh[(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2]^{1/2}z}{\sinh[(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2]^{1/2}h}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.53}$$

B_{mn}是如下函数的双重傅里叶级数展开式中的傅里叶系数

$$\Phi(x,y,h)=F(x,y)=V_0 \tag{6.54}$$

应用三角函数的正交性质可以很容易地计算出 B_{mn}，即

$$B_{mn}=\begin{cases}\dfrac{16V_0}{mn\pi^2}, & m,n\text{ 为奇数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6.55}$$

◀

6.3.2 圆柱坐标系

对于变量 ρ 来说，函数模板中包含贝塞尔函数和修正贝塞尔函数，而不是三角和双曲函数。

6.3.3 球坐标系

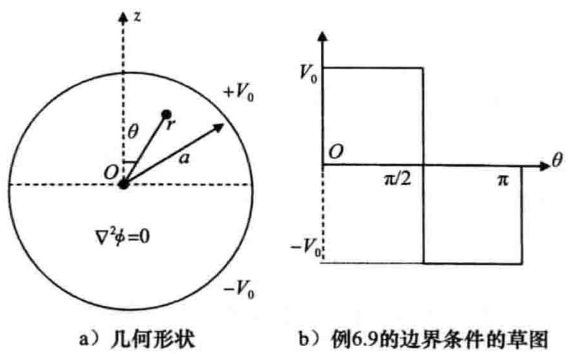
将 $k=0$ 代入方程式(5.10)中，f_1 的方程变为

$$f_1=\begin{cases}r^n\\ r^{-(n+1)}\end{cases} \tag{6.56}$$

而 f_2 和 f_3 的方程保持不变，并分别由方程式(5.11)和式(5.13)给出。因此，在球坐标系中拉普拉斯方程的三维解为

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\begin{Bmatrix}r^n\\ r^{-(n+1)}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}P_n^m(\cos\theta)\\ Q_n^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix} \tag{6.57}$$

第5章已经讨论了勒让德多项式的性质。



a）几何形状 b）例6.9的边界条件的草图

图6.11 例6.9图

例6.9 在一个半径为 a 的球体内，满足拉普拉斯方程。如图6.11所示，在上半部分表面 $r=a$，$0<\theta<\pi/2$ 的电压是 V_0，而在下半部分表面 $r=a$，$\pi/2<\theta<\pi$ 的电压是 $-V_0$。分别求球内和球外的电位。

解 边界条件可以表示为

$$\Phi(a,\theta) = F(\theta) \tag{6.58}$$

在图 6.11b 中画出了这个边界条件。

由于对称性，很明显电位与坐标 ϕ 无关。因此，这是一个二维问题。若选择 $f_3 = \cos m\phi$和 $m=0$，就会消除对坐标 ϕ 的依赖：

$$\Phi(r,\theta) = \begin{Bmatrix} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_n^0(\cos\theta) \\ Q_n^0(\cos\theta) \end{Bmatrix} \tag{6.59}$$

注意，零阶($m=0$)连带勒让德多项式 P_n^0 或 Q_n^0 分别称为勒让德多项式 P_n 或者 Q_n。在图 5.1 中画出了这些函数的曲线。表 5.3 给出了用 $\cos\theta$ 表示这些函数的多项式表达式。

对于例 6.9，可以将解分成球内和球外的解。

情况 1：$r<a$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n \tag{6.60}$$

根据边界条件，

$$\Phi(a,\theta) = F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n \tag{6.61}$$

应用表 5.3 中列出的正交性质，可以确定系数 A_n。上式两边同乘以 $P_m \sin\theta$，并积分，有

$$\int_0^{\pi} F(\theta) P_m \sin\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_m P_m P_n \sin\theta \mathrm{d}\theta = A_m \frac{2}{2m+1}$$

因此，得到

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_0^{\pi} F(\theta) P_m \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{6.62}$$

代入 $f(\theta)$，得到

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} P_m \sin\theta \mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_m \sin\theta \mathrm{d}\theta \right)$$

计算，得到

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = \frac{3}{4} V_0$$

计算其他系数 A_m，求解完毕。

情况 2：$r>a$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} P_n \tag{6.63}$$

◀

例 6.10 已知在圆环轴线上的场，这个例子[1]允许我们求出偏离轴线上的场。考虑在 x-y 平面上有一中心与坐标原点相重合、半径为 a 的直流电流圆环。众所周知，在 z 轴上任意一点的磁场由下式给出

$$\boldsymbol{H} = \hat{z} H_z$$

$$H_z = \frac{a^2 I}{2(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2a}\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

根据二项展开式，可得：

$$(1+u)^{-3/2} = 1 - \frac{3u}{2} + \frac{15u^2}{8} - \frac{105u^3}{48} + \cdots, \quad |u| < 1$$

因此，对于 $z<a$，有

$$H_z|_{\text{轴线上}} = \frac{l}{2a}\left(1 - \frac{3u}{2} + \frac{15u^2}{8} - \frac{105u^3}{48} + \cdots\right) \tag{6.64}$$

在没有电流的区域中，有

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = 0 \tag{6.65}$$

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\Phi_m \tag{6.66}$$

这里 Φ_m 称为标量磁位，因为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{6.67}$$

$$\nabla^2\Phi_m = 0 \tag{6.68}$$

首先，考虑 $r<a$：

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n \tag{6.69}$$

$$\Phi(r,\theta)|_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{z}{a}\right)^n \tag{6.70}$$

注意，$P_n|_{\cos 0}=1$。

比较式(6.70)和式(6.64)，得到

$$b_0 = 1\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = \frac{15}{8}\left(\frac{l}{2a}\right)$$

因此，有

$$H_z(r,\theta) = \frac{l}{2a}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2 + \frac{15}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4 + \cdots\right] \tag{6.71}$$

后面有几个习题说明球坐标系中的解在求实际静态问题时的应用。◀

参考文献

1. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T. V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd edition, Wiley, New York, NY, 1994.
2. Ji, C., Approximate analytical techniques in the study of quadruple-ridged waveguide (QRW) and its modifications, *Doctoral thesis*, University of Massachusetts Lowell, Lowell, MA, 2007.

第7章 关于波的其他问题[⊖]

到现在为止，我们所讨论的大多数问题都是在空间中不受约束的单色波。实际信号会涉及脉冲波或波束。利用单色波的这种简单解可以构造更复杂问题的解。这一章开篇先讨论群速度的概念。

7.1 群速度v_g

群速度是一组波传播的速度。考虑在 $z=0$ 处有两个正弦振荡：

$$E(0,t) = \sin(\omega_0 - \Delta\omega)t + \sin(\omega_0 + \Delta\omega)t \tag{7.1}$$

这两个正弦振荡的频率之差为 $2\Delta\omega$。

式(7.1)也可以写为

$$E(0,t) = 2\sin\omega_0 t\cos\Delta\omega t \tag{7.2}$$

在图 7.1 中画出了式(7.2)所表示的曲线。

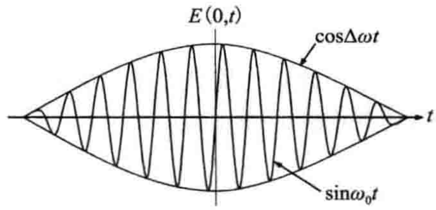


图 7.1　含小拍频的两个振荡

它表明一个频率为 ω_0 的载波被一个频率为 $\Delta\omega$ 的信号所调制。振荡像波一样也可以传播，此波可以写为

$$E(z,t) = \sin[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)z] + \sin[(\omega_0 + \Delta\omega)t + (\beta + \Delta\beta)z] \tag{7.3}$$

$$E(z,t) = 2\sin(\omega_0 t - \beta_0 z)\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \tag{7.4}$$

由式(7.4)，很明显可以看到，当载波以相速度传播时，这一组波以群速度传播：

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{7.5}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{7.6}$$

现在，ω-β 图的重要性已变得很清楚。如果画出 ω 随 β 变化的曲线，那么相速度就是纵坐标与横坐标之比值，而切线的斜率就是群速度。如果 ω-β 曲线不是一条直线，那么在波群中各个波的传播速度将会各不相同，由此引起信号产生畸变。在许多情况下，群速度也等于能量传播的速度，或简单地说等于能量速度 v_E，定义为

$$v_E = \frac{S}{w} \tag{7.7}$$

式中，S 是功率密度，w 是总能量密度。能量速度表示波能量传播的速度。

根据式(7.5)和式(7.6)，可以证明

$$v_g = \frac{v_p}{1-(\omega/v_p)(dv_p/d\omega)} \tag{7.8}$$

在习题中，有几个计算群速度的例子。

7.2 格林函数

格林函数是一个系统对一个脉冲输入的响应。在电路中，通常把脉冲输入表示为 $h(t)$，而在场论中则用 G 来表示。下面通过求解下面的一维问题来说明构造一个格林函数

⊖ 第 7 章的附录参见附录 7A。

的基本方法。

G 是下面微分方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2} = -\delta(x - x'), \quad 0 < x < L \tag{7.9}$$

其边界条件为

$$G = 0, \quad x = 0 \tag{7.10}$$

$$G = 0, \quad x = L \tag{7.11}$$

我们希望 G 与 x 及 x' 都有关，即 $G=G(x, x')$。首先从数学角度来求解这一问题，然后再将其进行拓展。令

$$G = \begin{cases} G_1, & 0 < x < x' \quad (7.12) \\ G_2, & x' < x < L \quad (7.13) \end{cases}$$

因为

$$\delta(x - x') = 0 \qquad \text{如果 } x \neq x' \tag{7.14}$$

$$G_1 = A_1 x + B_1 \tag{7.15}$$

$$G_2 = A_2 x + B_2 \tag{7.16}$$

为了确定上面的 4 个未知数 A_1、B_1、A_2 和 B_2，需要 4 个方程。利用边界条件，可以得到其中的两个方程

$$G_1 = 0, \quad x = 0 \tag{7.17}$$

$$G_2 = 0, \quad x = L \tag{7.18}$$

从 $x=x'$ 处的“源条件”，可以得到其余两个方程：

$$G_1 = G_2, \quad x = x' \tag{7.19}$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x'} = -1 \tag{7.20}$$

式(7.19)是由问题的物理意义导出的。式(7.20)则是由微分方程式(7.9)得到的：在区间 $0<x<L$ 上，对方程式(7.9)两边进行积分，有

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = -\int_0^L \delta(x - x')\mathrm{d}x = -1 \tag{7.21}$$

式(7.21)中右边最后一项的结果是根据脉冲函数的定义而求得的。式(7.21)中的左边可以写为

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x'} \tag{7.22}$$

注意，除了在 $x=x'$ 临近的一个小区间 2ε 内之外，$\mathrm{d}^2G/\mathrm{d}x^2=0$。由式(7.10)、式(7.11)、式(7.19)和式(7.20)，可以确定出系数 A_1，B_1，A_2 和 B_2。因此，得到：

$$G_1 = x\frac{L - x'}{L}, \quad 0 < x < x' \tag{7.23}$$

$$G_2 = x'\frac{L - x}{L}, \quad x' < x < L \tag{7.24}$$

图 7.2 分别示出了当 $x'=2L/3$ 时，G、$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2G/\mathrm{d}x^2$ 随 x 变化的曲线。

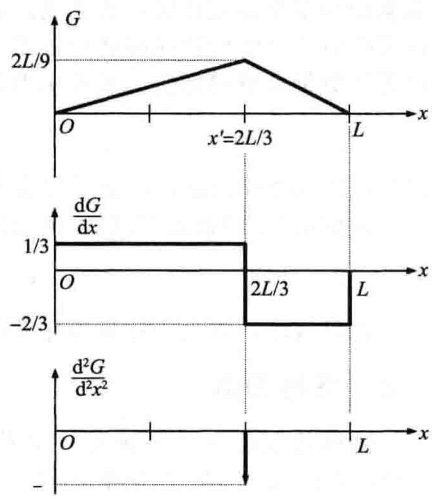


图 7.2 格林函数及其导数的图形

方程式(7.9)是在张力作用下一根终端固定弦线

的微分方程的标准形式。当在$x=2L/3$处施加一个点负载时，G为弦线向下的位移。物理图形如图7.3所示。对于一个给定问题来说，建立格林函数的优点是可以将其对任意激励的响应写为一个叠加积分。如果输入是$-f(x)$，也即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x}=-f(x),\quad 0<x<L$$
$$y=0,\quad x=0$$
$$y=0,\quad x=L \tag{7.25}$$

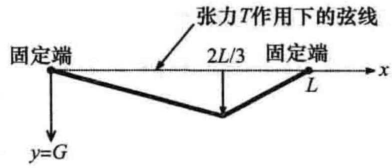


图7.3 在张力作用下的固定弦线

那么

$$y(x)=\int_0^L f(x')G(x,x')\mathrm{d}x' \tag{7.26}$$

注意，格林函数具有以下特点：

1）它是对称的，即$G(x,x')=G(x',x)$。

2）它是连续的。

3）在$x=x'$处，G的导数不连续。注意，G的一阶导数要比G在微分方程中的最高阶导数低一阶。

构造格林函数的一般步骤如下：

1）让微分方程的右端等于零，然后求出其解。这个解将包含若干个待定常数。

2）应用边界条件和源条件确定出这些常数。

应用上面所述的步骤，可以证明，一维亥姆霍兹方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2}+k^2 G=-\delta(x-x') \tag{7.27}$$

满足边界条件

$$G=0,\quad x=0 \tag{7.28}$$
$$G=0,\quad x=L \tag{7.29}$$

它的格林函数G为

$$G=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin kx\sin k(L-x')}{\sin kL}, & 0<x<x' \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{\sin kx'\sin k(L-x)}{\sin kL}, & x'<x<L\end{cases} \tag{7.30}$$

7.3 网络公式

经典网络理论处理简单的单个元器件之间的相互连接问题。在高频电气工程背景下，单个元器件包括传输线、波导和谐振腔这些微波器件。在简要地回顾二端口网络的网络参数描述后，下面将解释S参数。图7.4所示为一个二端口网络。其输入和输出变量V_1、V_2、I_1和I_2通过一个2×2的矩阵联系，矩阵中的各个元素称为网络的参数。例如，如下

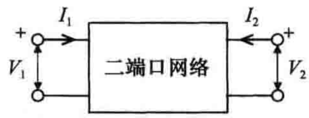


图7.4 二端口网络

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix} \tag{7.31}$$

描述了开路阻抗参数，称为Z参数。

因为$Z_{11}=V_1/I_1|_{I_2=0}$，所以当输出端开路时，它就是输入阻抗。在基本电路理论中，你可能已经学习过如何用一些参数来描述一个网络：短路Y参数、混合H参数和反混合G参数。在高频情况下，还有其他两组参数$ABCD$参数和散射S参数会特别有用。任何

一组参数都可以转换为另一组参数。关于电路理论的书籍都给出了有关转换公式的一些表格。这一节将集中介绍 $ABCD$ 参数和 S 参数。

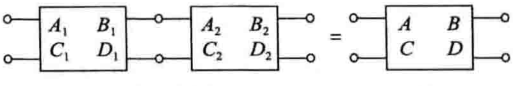
7.3.1 ABCD 参数

$ABCD$ 参数的矩阵定义为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

如图 7.5a 所示，如果两个网络级联，那么其等效 $ABCD$ 网络如图 7.5b 所示，其中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \tag{7.33}$$



a）两个网络级联　　b）等效网络

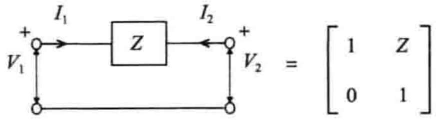
图 7.5 级联网络

从式(7.33)中容易看出使用 $ABCD$ 参数的优点。一组级联二端口的总 $ABCD$ 参数是各个二端口网络矩阵的乘积。作为求一个二端口网络 $ABCD$ 参数的简单例子，我们考虑如图 7.6 所示的一串联阻抗 Z。

因为 $V_1 = V_2 + ZI_1$ 且 $I_1 = -I_2$，所以

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

接下来，考虑无损传输线(见图 7.7)。



a）串联单元　　b）$ABCD$参数

图 7.6 串联网络的 $ABCD$ 参数

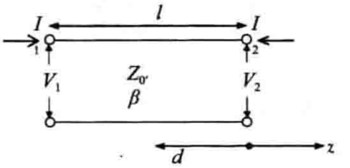


图 7.7 无损耗传输线

令参考点取在 $z=0$：

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0^{-1} & -Z_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^+ \\ V_0^- \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

也有

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\beta l} & e^{-j\beta l} \\ e^{j\beta l}/Z_0 & -e^{-j\beta l}/Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^+ \\ V_0^- \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

由式(7.35)和式(7.36)，得到

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta l & jZ_0\sin\beta l \\ \dfrac{j}{Z_0}\sin\beta l & \cos\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

对于一段有损传输线来说，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma l & Z_0\sinh\gamma l \\ \dfrac{\sinh\gamma l}{Z_0} & \cosh\gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

式中，$\gamma = \alpha + j\beta$ 是传播常数。

接下来，考虑串联连接的 N 段传输线，由输入传输线 i 馈送，馈给输出传输线 t，如图 7.8 所示。那么

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ -I_{N+1} \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

式中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

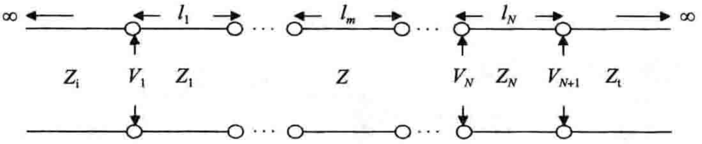


图 7.8 串联的 N 段传输线

如果 V_0^+ 是入射电压，Γ 是反射系数，T 是传输系数，那么

$$V_1 = V_i = V_0^+[1+\Gamma] \tag{7.41}$$

$$I_1 = I_i = \frac{V_0^+}{Z_i}[1-\Gamma] \tag{7.42}$$

$$V_{N+1} = V_t = TV_0^+ \tag{7.43}$$

$$-I_{N+1} = -I_t = \frac{TV_0^+}{Z_t} \tag{7.44}$$

$$\begin{bmatrix} V_0^+(1+\Gamma) \\ \dfrac{V_0^+}{Z_i}(1-\Gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TV_0^+ \\ \dfrac{T}{Z_t}V_0^+ \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} -1 & A+\dfrac{B}{Z_t} \\ \dfrac{1}{Z_i} & C+\dfrac{D}{Z_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Z_i \end{bmatrix} \tag{7.46}$$

解之，得到 Γ 和 T 分别为

$$\Gamma = \frac{A+B/Z_t - Z_i(C+D/Z_t)}{A+B/Z_t + Z_i(C+D/Z_t)} \tag{7.47}$$

$$T = \frac{2}{A+B/Z_t + Z_i(C+D/Z_t)} \tag{7.48}$$

7.3.2 S 参数

仅在低频时，比如，小于 0.5GHz，可以通过测量而得到电压和电流，也可以计算出 $ABCD$ 参数。而且，如果在所研究的系统中包含有源器件(如二极管或晶体管)，那么在一个端口上放置一个开路或短路校准件就可能会导致不稳定，例如，在测量器件的 $ABCD$ 参数时就需要用到校准件。高频分析方法涉及入射和反射波的测量，而不是测量总电压和电流。相应的参数称为散射参数。首先定义一个一端口网络的散射参数(见图 7.9)。

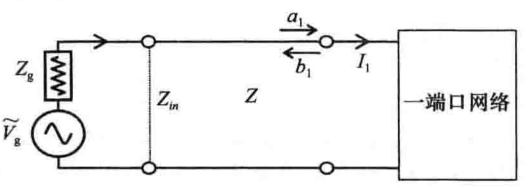


图 7.9 一端口网络

令入射电压为 V_{I1}，反射电压为 V_{R1}。分别将入射波和散射波的归一化电压定义为

$$a_1 = \frac{V_{I1}}{\sqrt{Z_0}} \tag{7.49}$$

和

$$b_1 = \frac{V_{R1}}{\sqrt{Z_0}} \tag{7.50}$$

入射功率是$|a_1|^2$，散射功率是$|b_1|^2$。在高频时，功率测量相对要容易。而且，通过匹配方法可以使b_1为零。对于一端口，定义

$$S_{11}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{V_{R1}}{V_{I1}}=\Gamma_0 \tag{7.51}$$

对于二端口(见图 7.10)。定义

$$a_2=\frac{V_{I2}}{\sqrt{Z_{02}}} \tag{7.52}$$

$$b_2=\frac{V_{R2}}{\sqrt{Z_{02}}} \tag{7.53}$$

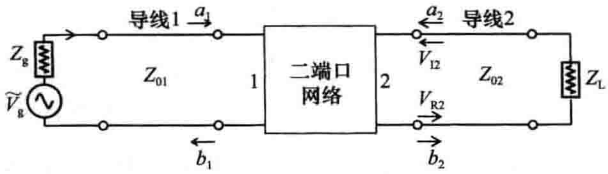


图 7.10 二端口网络

并且借助散射矩阵，可以将b和a相联系起来：

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} \tag{7.54}$$

因为

$$S_{11}=\left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} \tag{7.55}$$

所以在二端口网络的输出端连接一个匹配负载($a_2=0$)后，就可以进行测量。S_{11}是输入反射系数。因为

$$S_{21}=\left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} \tag{7.56}$$

所以，S_{21}称为网络的前向传输系数。它反映了在无源电路中的衰减，以及有源网络的增益，比如放大器。当网络的输入端匹配($a_1=0$)时，测量S_{22}和S_{12}

$$S_{22}=\left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} \tag{7.57}$$

$$S_{12}=\left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} \tag{7.58}$$

在这里，S_{22}是输出反射系数，S_{12}是反向传输系数。表 7.1 给出了S参数和$ABCD$参数之间的关系。

表 7.1 *S-ABCD-S* 参数的变换

S		$ABCD$
$\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{bmatrix}$	→	$\frac{1}{A+B+C+D}\begin{bmatrix}A+B-C-D&2(AD-BC)\\2&-A+B-C+D\end{bmatrix}$
S	←	$ABCD$
$\frac{1}{2S_{21}}\begin{bmatrix}(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}&(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}\\(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}&(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}\end{bmatrix}$	←	$\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$

将测量设备与被测量的二端口器件直接连接是不切实际的。通常，在被测量的器件与测量设备之间要引入数段传输线，才可以进行测量。这些传输线会引入一定的相移，所以在由测量得到的S'参数求器件的S参数时，必须考虑这些相移：

$$S'=T^{-1}ST \tag{7.59}$$

式中

$$T=\begin{bmatrix}\exp(-j\gamma l_1)&0\\0&\exp(-j\gamma l_2)\end{bmatrix} \tag{7.60}$$

在上式中，γ是传输线的传播常数。

7.4　周期介质的阻带

由第一性原理导出的式(10.127)和一周期介质的 ω 与 β 之间的散射关系相似。图 10.12 和图 10.13 给出了相关结果。这里讨论另一种用 $ABCD$ 参数得到散射关系的方法。如图 7.11 所示，作为一个示例，使用两段相级联的传输线作为在一个单元中的两层介质。

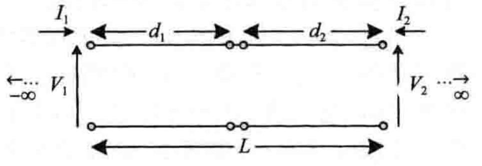


图 7.11　无限大周期媒质中的单元

第一段传输线的 $ABCD$ 参数记为

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

而第二段传输线的 $ABCD$ 参数记为

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

总 $ABCD$ 参数由式(7.33)给出，它像式(7.32)一样将输入电压和电流与输出电压和电流联系起来。然而，由于介质是周期性的，由式(10.104)和式(10.105)，得到

$$V_2 = e^{-j\beta L} V_1 \tag{7.61}$$

$$-I_2 = +e^{-j\beta L} I_1 \tag{7.62}$$

或者

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = e^{+j\beta L} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

式中

$$\lambda = e^{j\beta L} \tag{7.64}$$

稍后将会说明这是特征值。由式(7.32)可知，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.65}$$

由式(7.63)和式(7.65)，可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

现在，特征值 $\lambda = e^{j\beta L}$ 由如下特征值方程决定。

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.67}$$

λ 的解由下式得出

$$(A-\lambda)(D-\lambda) - BC = 0 \tag{7.68}$$

$$\lambda^2 - \lambda(A+D) + AD - BC = 0 \tag{7.69}$$

对于一个互易网络，$AD-BC=1$。因此，

$$\lambda^2 - \lambda(A+D) + 1 = 0 \tag{7.70}$$

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm j\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \tag{7.71}$$

$$\beta L = -j\ln\left[\frac{A+D}{2} \pm j\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\right] = \arccos\frac{A+D}{2} \tag{7.72}$$

或者

$$\cos\beta L = \frac{A+D}{2} \tag{7.73}$$

在图 7.12 中画出了曲线 ω-β 的草图。

因为 $|\cos\beta L|\leqslant 1$，通过求解

$$\left|\frac{A+D}{2}\right|=1 \tag{7.74}$$

可以计算出通带和阻带边缘的位置。

通过式(7.74)求出 ω，就可以确定出通带和阻带的位置。在图 7.12 中将第一个阻带标记为 $\Delta\omega$，它是在 $\beta L=\pi$ 时式(7.74)的解。在图 7.12中，第一个非零值是由于无界媒质中的自然截止频率而产生的，这与图 10.12 中所示的情况一样。

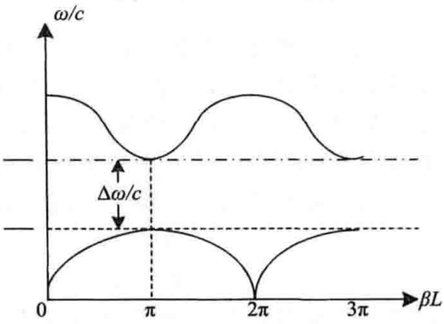


图 7.12 第一个阻带

7.5 辐射

1.3.1 节讨论了由脉冲电流源激励的赫兹偶极子在自由空间中的辐射。这一节将讨论由时谐电流源产生的辐射。从求解以下方程式开始：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(r)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{源体积}\boldsymbol{J}(r)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

假设源的电流分布是已知的。

我们可以根据距离的远近来做一些近似[1]。如果源的长度与 d 相近且 $d\ll\lambda$，那么可以将场域分为

近场(静态)区：$d\ll r\ll\lambda$，

中间(感应)区：$d\ll r\sim\lambda$，

远(辐射)区：$d\ll r\ll\lambda$。

在远区，上式中的指数中的 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 项可由下式替换

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r-\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}' \tag{7.75}$$

且用 r 替换分母中的 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。这种近似可以表述为

$$\lim_{kr\to\infty}\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\iiint_{源体积}\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}'t}\mathrm{d}V' \tag{7.76}$$

积分符号外的项表示矢量位的球面特性，而积分项则表明对角度的依赖性。

展开式(7.76)中的指数项，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sum_{n}\frac{(\mathrm{j}k)^n}{n!}\iiint_{源体积}\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')(\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}')^n\mathrm{d}V' \tag{7.77}$$

如果源的尺寸与 d 相近，根据假设 $kd\ll 1$，那么式(7.77)中的主要项就是其第一个非零项。

如果这一项是 $n=0$ 对应的一项，那么

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\iiint_{V'r}\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{7.78}$$

对细线电流，$\boldsymbol{J}\mathrm{d}V'$可用 $\boldsymbol{I}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$替换：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int_{源长度}\widetilde{\boldsymbol{I}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{7.79}$$

如果细线是沿 z 轴放置的，那么

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int_{源长度}\widetilde{\boldsymbol{I}}\mathrm{d}z' \tag{7.80}$$

对于一个体积源来说，对式(7.78)中的被积函数可以进行如下处理：

$$\iiint_{V'} \widetilde{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = -\iiint_{V'} r'(\nabla' \cdot \widetilde{J})\mathrm{d}V'$$

$$= \mathrm{j}\omega\iiint_{V'} \boldsymbol{r}'\widetilde{\rho}_{\mathrm{V}}(r')\mathrm{d}V' \tag{7.81}$$

为了得到式(7.81)中的最后一项，利用连续性方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} = 0 \tag{7.82}$$

通过分部积分可以得到式(7.81)的中间一项，或者计算其中的一个分量：

$$\iiint_{V'} \widetilde{\boldsymbol{J}}_x \mathrm{d}V' = \iiint_{V'} (\widetilde{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{x})\mathrm{d}V' = \iiint_{V'} (\widetilde{\boldsymbol{J}} \cdot \nabla' x')\mathrm{d}V'$$

$$= \iiint_{V'} \nabla' \cdot (x' \widetilde{\boldsymbol{J}})\mathrm{d}V' - \iiint_{V'} x' \cdot (\nabla' \cdot \widetilde{\boldsymbol{J}})\mathrm{d}V' \tag{7.83}$$

$$\iiint_{V'} \widetilde{\boldsymbol{J}}_x(r')\mathrm{d}V'\mathrm{d}V' = \oint\!\!\!\oint_{S'} x' \widetilde{\boldsymbol{J}} \cdot \mathrm{d}S' - \iiint_{V'} x'(\nabla' \cdot \widetilde{\boldsymbol{J}})\mathrm{d}V'$$

因为电流密度与表面 S'相切，所以式(7.83)右端的第一项为零。因此，有

$$\iiint_{V'} \widetilde{\boldsymbol{J}}_x \mathrm{d}V' = -\iiint_{V'} x'(\nabla' \cdot \boldsymbol{J})\mathrm{d}V' = -\iiint_{V'} r'(\nabla' \cdot \boldsymbol{J})\mathrm{d}V' \tag{7.84}$$

由式(7.78)和式(7.81)，得到

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{j}\mu\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}} \tag{7.85}$$

式中，$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}}$ 由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}} = \iiint_{V'} \boldsymbol{r}'\rho_{\mathrm{V}}(r')\mathrm{d}V' \tag{7.86}$$

$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}}$ 称为电偶极矩。

7.5.1　赫兹偶极子

一个赫兹偶极子是长度为 d 的很短的一段细线，如果认为电流沿细线是常数，那么式(7.79)变为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(r) = \hat{z}\frac{\mu(\widetilde{I}d)}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{7.87}$$

如果认为$\widetilde{I}$是一个常数，那么根据连续性方程，在细线两端将分别积累有点电荷 Q 和 $-Q$。当细线沿 z 轴时，这对点电荷的电偶极矩$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}}$ 由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}} = \hat{z}Qd \tag{7.88}$$

当计算这个沿 z 轴的非常短的细线时，式(7.86)能给出相同的结果。

在远区中，根据矢量位$\widetilde{\boldsymbol{A}}$计算$\widetilde{\boldsymbol{B}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$，得到

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \frac{u_{\mathrm{p}}k^2}{4\pi}(\hat{r}\times\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{7.89}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \eta\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\hat{r} \tag{7.90}$$

在自由空间中，$u_{\mathrm{p}} = c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，$\eta = \eta_0 = 120\pi\Omega$。很清楚，可以看出$\widetilde{\boldsymbol{I}}$和$\widetilde{Q}$的等价性，因为

$$\widetilde{Q} = \int \boldsymbol{I}\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{I}}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\widetilde{I} = \mathrm{j}\omega\,\widetilde{Q} \tag{7.91}$$

在习题 P1.5 中，我们研究了赫兹偶极子(点偶极子)，在一开始分析时就对赫兹偶极子做了一些近似。

对于位于原点处沿 z 轴的赫兹偶极子，也即$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}} = \mathrm{j}\widetilde{I}_0 d$，其结果由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \frac{ck^2}{4\pi}\left(\hat{r} \times \frac{\widetilde{I}_0 d}{\mathrm{j}\omega}\hat{z}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{7.92}$$

因为$\hat{r}\times\hat{z}=(\hat{\rho}\rho+\hat{z}z)/r\times\hat{z}=\rho\hat{\hat{\phi}}/r=-\hat{\phi}\sin\phi$，所以

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \phi\mathrm{j}\widetilde{I}_0 d\frac{k^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{kr}\sin\theta \tag{7.93}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \eta_0\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\hat{r} \tag{7.94}$$

功率密度的时间平均值是

$$S_{\mathrm{dv}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\widetilde{\boldsymbol{H}}^*]$$

$$S_{\mathrm{av}} = \hat{r}\eta_0\frac{k^2\widetilde{I}_0^2 d^2}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta \tag{7.95}$$

穿出半径为 r 的球面的功率是

$$P_{\mathrm{rad}} = \iint_S S_{\mathrm{av}}\mathrm{d}S \tag{7.96}$$

当上式等于$\widetilde{I}_0^2 R_{\mathrm{rad}}/2$(辐射电阻)时，得到

$$R_{\mathrm{rad}} = 80\pi^2\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega) \tag{7.97}$$

一段半径为 a 和电导率为 σ_c 的导线的交流电阻由下式给出

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{d}{\sigma_c 2\pi a\delta} \tag{7.98}$$

式中，δ 是趋肤深度。例如[2]，如果 $f=75\mathrm{MHz}$，σ_c(铜)$=5.8\times10^7$，$a=0.4\mathrm{mm}$ 和 $d=4\mathrm{cm}$，那么 $R_{\mathrm{AC}}=0.036\Omega$ 和 $R_{\mathrm{rad}}=0.08\Omega$。显然，辐射效率很低。在这个意义上，热损耗功率大约是辐射功率的 50%。

7.5.2 半波偶极子

可以证明，通过增大细导线的长度，会使效率显著地得到提高。为了说明这一点，考虑一个长度为 $\lambda/2$ 的中馈天线。根据实验，可以假定电流由下式给出

$$\widetilde{I}(z) = \widetilde{I}_0\cos kz, \quad -\frac{\lambda}{4}\leqslant z\leqslant\frac{\lambda}{4} \tag{7.99}$$

这是一个驻波，这样的假设会简化问题的分析过程。严格的方法就需要像边值问题那样的公式[1]。

一种简单的方法是将这根细线上的一段长度为 $\mathrm{d}z'$ 的微元看做一个赫兹点偶极子(见图 7.13)。根据式(7.93)和式(7.94)，由这个微元在远区中产生的辐射电场，可以写为

$$\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{E}}_\theta = \frac{\mathrm{j}k_0\eta_0}{4\pi}\widetilde{I}(z')\mathrm{d}z'\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_{\mathrm{SP}}}}{R_{\mathrm{SP}}}\sin\theta_{\mathrm{S}} \tag{7.100}$$

$$\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{H}}_\phi = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{E}}_\theta}{\eta_0} \tag{7.101}$$

在远区，可以对指数函数中的变量做出以下近似

$$\theta_{\mathrm{S}} \approx \theta \tag{7.102}$$

$$R_{\mathrm{SP}} = r - z'\cos\theta \tag{7.103}$$

对分母中的 R_{SP} 可以做出更进一步的近似

$$R_{\mathrm{SP}} = r \tag{7.104}$$

(在分母中)，因此得到

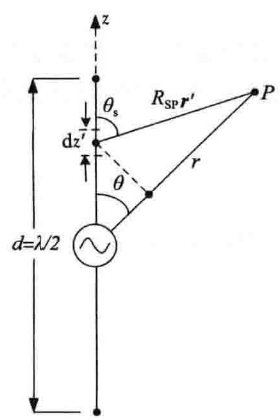


图 7.13 半波中心馈电偶极子天线。虚线表示电流驻波

$$\widetilde{E}_\theta = \frac{\mathrm{j}k\eta_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\widetilde{I}_0\sin\theta\int_{z'=-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos kz'\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z' \tag{7.105}$$

$$\widetilde{E}_\theta = \mathrm{j}60\widetilde{I}_0\left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{7.106}$$

$$\widetilde{H}_\phi = \frac{\boldsymbol{E}_\theta}{\eta_0} \tag{7.107}$$

上面的近似与在式(7.76)中的近似是相等价的。而且要注意，在式(7.93)中，首先给出的是$\widetilde{\boldsymbol{H}}$的表达式，而$\widetilde{\boldsymbol{E}}$是用$\widetilde{\boldsymbol{H}}$来表示的。在式(7.100)中，首先给出 $\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{E}}_\theta$ 的表达式，然后再用 $\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{E}}_\theta$ 来表示 $\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{H}}_\phi$[2]。

在远区，功率密度的时间平均值由下式给出

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \hat{r}S_0F(\theta,\phi) \tag{7.108a}$$

$$S_0 = \frac{15\,\widetilde{I}_0^2}{\pi r^2} \tag{7.108b}$$

$$F(\theta,\phi) = \left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{7.108c}$$

式中，$F(\theta,\ \phi)$称为归一化的辐射强度。定性地说，模式图(见图 7.14a)与赫兹偶极子的模式图具有相同的特性。

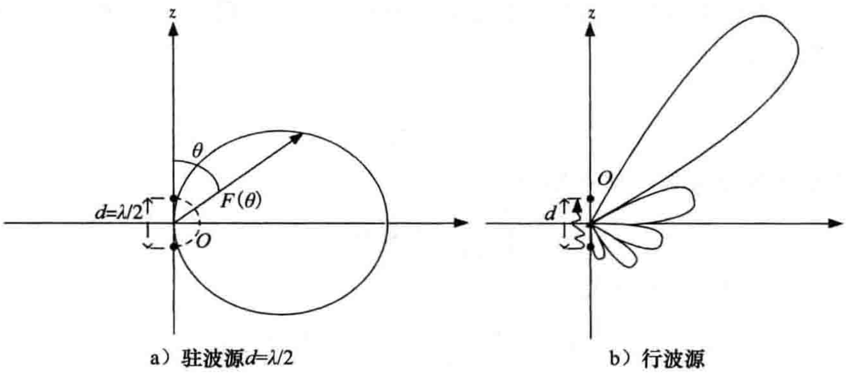


图 7.14 辐射模式图 $F(\theta)$

然而，利用式(7.108a)，由式(7.96)计算得到的辐射功率为

$$P_{\mathrm{rad}} = 36.6\,\widetilde{I}_0^2 \tag{7.109}$$

反过来，得到

$$R_{\mathrm{rad}} = \frac{2P_{\mathrm{rad}}}{\widetilde{I}_0^2} \approx 73\Omega \tag{7.110}$$

在这种情况下，除了改变 $d=\lambda/2$ 之外，赫兹偶极子这一例子的 R_{loss}是[2]

$$R_{\mathrm{loss}} = 1.8\Omega$$

这种天线的效率相当好。

应该注意的是，在 $z>0$ 的上半空间中，地面上方 $d=\lambda/4$ 的单极天线具有与半波偶极子相同的辐射场。其辐射功率将是半波偶极子的一半，而辐射电阻 $R_{\mathrm{rad}}\approx 36.5\Omega$。

7.5.3 任意长度的偶极子

对于一个相对于 λ 的任意长度 d 的中馈天线，可假定电流分布为

$$\widetilde{I}(z)=\begin{cases}I_0\sin\left[k\left(\frac{a}{z}-z\right)\right], & 0\leqslant z\leqslant\frac{d}{2} & (7.111a)\\ I_0\sin\left[k\left(\frac{d}{2}+z\right)\right], & -\frac{d}{2}\leqslant z\leqslant 0 & (7.111b)\end{cases}$$

使用与半波偶极子相同的分析方法，可以得到

$$F(\theta,\phi)=\left\{\frac{\cos[(\pi d/\lambda)\cos\theta]-\cos(\pi d/\lambda)}{\sin\theta}\right\}^2 \tag{7.112}$$

在文献[2]中，可以分别找到在 $d=\lambda/2$，$d=\lambda$ 和 $d=3\lambda/2$ 时的辐射模式图。

7.5.4 辐射模式整形

Ulaby[2]对缝隙天线、天线阵和辐射模式整形中的其他一些实际问题进行了初步的讨论。

7.5.5 将天线问题作为边界值问题

严格地说，天线问题是一个边值问题。电流分布是已知的这一假设，不仅简化了数学分析过程，而且也使我们能够计算出辐射场。在实际中，往往知道的是天线缺口中的场分布，比如说，我们可以知道缺口中的电场。附加的边界条件是在细线的终端电流变为零。在计算电磁学中应用了这样的公式。

7.5.6 行波天线和切伦科夫辐射

前面讨论的细线天线问题是基于驻波电流分布这样一个假定。研究行波电流分布的效应也将是有意义的。

令 $\widetilde{I}(z)$ 给定为

$$\widetilde{I}(z)=I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}pkz} \tag{7.113}$$

将辐射矢量 $\boldsymbol{N}$ 定义为[3]如下积分，

$$\widetilde{N}=\iiint_{\text{源体积}}\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}V' \tag{7.114}$$

对于现在的情况，它转化为

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\hat{z}I_0\int_{-d/2}^{d/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz'\cos\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}pkz'}\mathrm{d}z' \tag{7.115}$$

根据方程式(7.76)可知，在远区的矢量位由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\widetilde{\boldsymbol{N}} \tag{7.116}$$

像在前面一样，计算出 $\widetilde{E}_\theta$、$\widetilde{H}_\phi$ 和 S_{av}，可以证明[3]行波电流激励的归一化辐射强度为

$$S_{\mathrm{av}}=\frac{\eta I_0^2}{8\pi^2r^2}F(\theta,\phi)\,\hat{r} \tag{7.117a}$$

$$F(\theta,\phi)=\left\{\sin\theta\frac{\sin[(\pi d/\lambda)(p-\cos\theta)]}{p-\cos\theta}\right\}^2 \tag{7.117b}$$

由式(7.117b)给出的行波源的归一化辐射强度 $F(\theta,\phi)$，与由式(7.112)给出的驻波源的辐射强度是不同的。前者关于赤道平面 $\theta=\pi/2$ 是不对称的，而后者是对称的。行波激励源在前向辐射模式中产生了一个主瓣。图 7.14 所示为这两种情况的辐射模式。

最大的辐射是在 $\theta=0$ 附近，最小辐射是在 $\theta=\pi$ 附近。

对于行波情况，在波传播的前方最大辐射就像是一个圆锥体，且圆锥体的半角随 p 增大，或 d/λ 增大而减小。

Papas[3]指出，锥形束辐射与由高速电子产生的切伦科夫辐射相似。

7.5.7 小圆环形天线

我们将假设圆环的周长与波长相比要小得多。在远离圆环的一个场点，稳恒电流产生的磁场与静态电偶极子产生的电场相似。

参见 8.9 节。因此，称这个天线为磁偶极子天线。当将式(7.114)应用于这种情况时，我们用$\hat{\phi}\tilde{I}\,a\cos\phi'\mathrm{d}\phi'$来替换$\tilde{\boldsymbol{J}}\mathrm{d}V$。不失一般性，考虑到源关于 ϕ 的对称性，如果我们认为场点的坐标为 $P(r, \theta, 0)$，这种替换是容易理解的。

在这一点上，$\tilde{\boldsymbol{A}}$的ϕ 分量与$\tilde{\boldsymbol{A}}$的y 分量相同。$\tilde{\boldsymbol{A}}$的y 分量可由已知的$\tilde{\boldsymbol{J}}$的y 分量计算得到。

因此，$\tilde{\boldsymbol{J}}\mathrm{d}V' = \hat{y}\tilde{J}_y\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \hat{y}\tilde{I}\mathrm{d}y'$。因为 $y' = a\sin\phi'$，所以 $\mathrm{d}y' = a\cos\phi'\mathrm{d}\phi'$。而且，在式(7.114)和式(7.76)中 $k\,\hat{r}\,\boldsymbol{r}$ 为 $a\cos\psi$，其中角度 ψ 如图 7.15 所示，并由下式给出

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \tag{7.118}$$

当源在 x-y 平面上时，$\theta' = \pi/2$。

为了计算 $\boldsymbol{A}_y$，取 $\phi = 0$，对于现在所考虑的情况，得到

$$\cos\psi = \sin\theta\cos\phi' \tag{7.119}$$

因此，得到

$$N_\phi = \tilde{I}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\phi'} a\cos\phi'\mathrm{d}\phi' \tag{7.120}$$

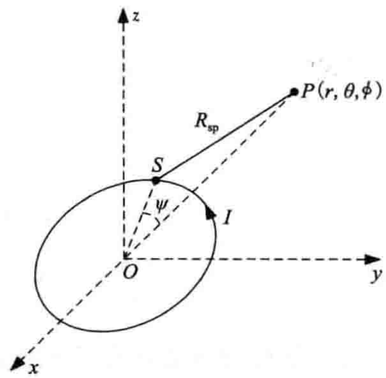


图 7.15　磁偶极子天线

假设 ka 很小，可以将式(7.120)近似为

$$N_\phi \approx \tilde{I}\int_0^{2\pi}(1 + \mathrm{j}ka\sin\theta\cos\phi')a\cos\phi'\mathrm{d}\phi'$$

$$= \mathrm{j}k\pi a^2\tilde{I}\sin\theta$$

$$N_\phi \approx \mathrm{j}kp_{\mathrm{m}}\sin\theta \tag{7.121}$$

式中，$p_{\mathrm{m}} = \pi a^2\tilde{I}$是磁偶极矩。

计算出在远区的场、功率密度的时间平均值 S_{av}，以及总辐射功率 P，并让其等于 $I^2R_{\mathrm{rad}}/2$，可以得到[4,5]

$$R_{\mathrm{rad}} = 20\pi^2(ka)^4 \quad (\Omega) \tag{7.122}$$

7.5.8 其他实用辐射系统

Ramo 等[4]已经总结出了计算辐射功率的系统化步骤，这些步骤最初是由 Schelkunoff[6]给出的，并将它们应用于许多辐射系统。

7.6 散射

我们假设时谐电磁波在无界媒质中传播，其电场和磁场分别为$\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{i}}$ 和$\tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{i}}$。当在媒质中存在某一种结构时，场记为$\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{t}}$ 和$\tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}$。入射波(上标 i)与结构之间相互作用会在结构内部和结构表面上产生电荷及电流。这些源反过来产生散射场$\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{s}}$ 和$\tilde{H}^{\mathrm{s}}$。在结构存在的情况下，总场可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{t}} = \tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{i}} + \tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{s}} \tag{7.123a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}} = \tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{i}} + \tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{s}} \tag{7.123b}$$

我们可以这样解释，散射场是由入射场与结构相互作用在结构中产生的感应源所产生的场。例如，应用边界条件可以求得入射场与结构中的感应源之间的关系。作为第二步，

我们可以计算出散射场。Balanis[7]已经给出了几个这种计算的例子。本节将只计算其中的一个例子，即一个长直圆柱导体对二维平面 TM 波(横磁场)的散射。

首先，我们将列出平面波函数与柱面波函数之间的关系。

7.6.1 柱面波变换[7]

$$e^{-j\beta x} = e^{-j\beta\rho\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} J_n(\beta\rho) e^{jn\phi} \tag{7.124a}$$

$$e^{+j\beta x} = e^{j\beta\rho\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{n} J_n(\beta\rho) e^{jn\phi} \tag{7.124b}$$

$$H_o^{(1,2)}(\beta|r-r'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta\rho) H_n^{(1,2)}(\beta\rho') e^{jn(\phi-\phi')}, \quad \rho \leqslant \rho' \tag{7.125a}$$

$$H_o^{(1,2)}(\beta|r-r'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta\rho') H_n^{(1,2)}(\beta\rho) e^{jn(\phi-\phi')}, \quad \rho \geqslant \rho' \tag{7.125b}$$

$$J_o(\beta|r-r'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta\rho') J_n(\beta\rho) e^{jn(\phi-\phi')} \tag{7.126}$$

$$Y_o(\beta|r-r'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n(\beta\rho') J_n(\beta\rho) e^{jn(\phi-\phi')}, \quad \rho \leqslant \rho' \tag{7.127a}$$

$$Y_o(\beta|r-r'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n(\beta\rho) J_n(\beta\rho') e^{jn(\phi-\phi')}, \quad \rho \geqslant \rho' \tag{7.127b}$$

7.6.2 圆柱导体上感应电流的计算[7]

令入射波的电场为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i} = \hat{z} E_0 e^{-j\beta x} = \hat{z} E_0 e^{-j\beta\rho\cos\phi} \tag{7.128}$$

根据式(7.124a)，有

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i} = \hat{z} \boldsymbol{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} \boldsymbol{J}_n(\beta\rho) e^{jn\phi} = \hat{z} \boldsymbol{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^{n} \varepsilon_n J_n(\beta\rho) \cos n\phi \tag{7.129a}$$

式中

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases} \tag{7.129b}$$

散射场$\widetilde{E}^{s}$可以写为

$$\widetilde{E}^{s} = \hat{z} E_z^{s} = \hat{z} E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(\beta\rho) \tag{7.130}$$

在写出式(7.130)时，注意，当 $\beta\rho \rightarrow \infty$时，散射场必须是一个向外的行波，因此我们选择在 2.15 节中已经讨论过的函数 $H_n^{(2)}$。

在 $\rho = a$ 处，由 PEC 边界条件给出

$$E_z^{t}\big|_{\rho=a} = 0 = E_z^{i} + E_z^{s}\big|_{\rho=a} \tag{7.131}$$

$$E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n H_n^{(2)}(\beta a) + (j)^{-n} J_n(\beta a) e^{jn\phi} \right] = 0$$

$$c_n = -(j)^{-n} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \tag{7.132}$$

散射电场 E_z^{s} 由下式给出

$$E_z^{s} = -E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^{n} \varepsilon_n \frac{J_n(\beta a)}{\boldsymbol{H}_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta a) \cos n\phi \tag{7.133}$$

在 $\rho \geqslant a$ 的任意一点，电场的 z 分量由下式给出

$$E_z^t = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} \left[J_n(\beta a) - \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta a) \right] e^{jn\phi} \tag{7.134}$$

由麦克斯韦方程，

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.135}$$

我们可以求得$\widetilde{\boldsymbol{H}}$(注意，$\boldsymbol{E}_\rho = E_\phi = 0$)。分量$\widetilde{H}_z$也将是零。也可以求出另一个切向分量$\widetilde{H}_\phi$。在圆柱导体表面上，电流表面密度$\boldsymbol{K}$为

$$\boldsymbol{K} = \hat{n} \times \widetilde{\boldsymbol{H}}^t \Big|_{\rho=a} = \hat{z} H_\phi^t \Big|_{\rho=a} \tag{7.136}$$

经过计算，其结果为[7]

$$\boldsymbol{K} = \hat{z} \frac{2E_0}{\pi a \omega \mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} \frac{e^{jn\phi}}{H_n^{(2)}(\beta a)} \tag{7.137}$$

对于一段($a \ll \lambda$)非常细的细导线来说，第一项是主要项：

$$\boldsymbol{K} \approx \hat{z} \frac{2E_0}{\pi a \omega \mu} \frac{1}{H_n^{(2)}(\beta a)}, \quad a \ll \lambda \tag{7.138}$$

对于很小的βa，应用$H_n^{(2)}$的渐近值，我们可以做进一步的近似：

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \hat{z}\, j \frac{E_0}{a\omega\mu} \frac{1}{\ln[1.781\beta a/2]}, \quad a \ll \lambda \tag{7.139}$$

7.6.3 散射宽度

目标的散射特性可以用回波面积或雷达截面积(Radar Cross Section，RCS)σ这一参数来定量地描述。从形式上来说，雷达截面定义为拦截功率的面积，当散射为各向同性时，这个面积在接收端产生一个与实际目标散射相同的密度[7]。对于一个三维目标，

$$\sigma_{3D} = \lim_{r\to\infty} \left[4\pi r^2 \frac{S^s}{S^i} \right] \tag{7.140}$$

对于一个二维目标，把雷达截面称为散射宽度σ_{2D}：

$$\sigma_{2D} = \lim_{\rho\to\infty} \left[2\pi\rho \frac{S^s}{S^i} \right] \tag{7.141a}$$

$$= \lim_{\rho\to\infty} \left[2\pi\rho \frac{|E^s|^2}{|E^i|^2} \right] \tag{7.141b}$$

由于$\rho \to \infty$，因此可以进行远区近似及其替换

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi\beta\rho}} j^n e^{-j\beta\rho}$$

计算式(7.141b)[7]，

$$\sigma_{2D} = \frac{2\lambda}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} \cos n\phi \right|^2 \tag{7.142a}$$

式中

$$w_n = \begin{cases} \varepsilon_n = 1, & n = 0 \\ \varepsilon_n = 2, & n \neq 0 \end{cases} \tag{7.142b}$$

注意，散射宽度与ϕ有关。ϕ是观察点相对于入射平面波传播矢量方向的方位角。这样一个依赖于方向的散射宽度称为双静态宽度。

当$\phi = 180°$时，称为单静态宽度或背散射宽度：

$$\sigma_{2D} = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left| \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} \right|^2 \tag{7.143}$$

对于低频极限，βa很小，$n=0$的一项是主要的，并且

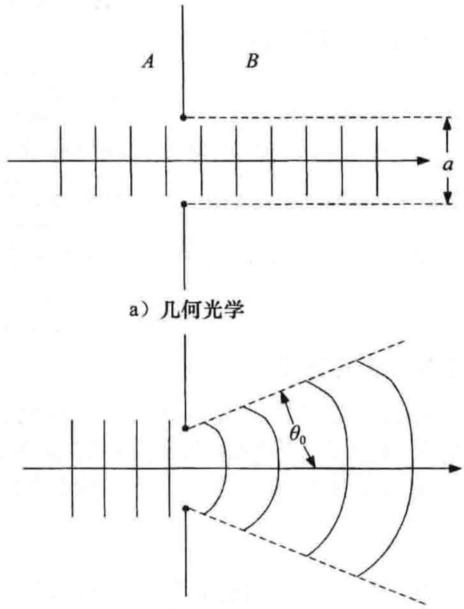
$$\sigma_{2D} = \frac{2\lambda}{\pi} \left| \frac{1}{\ln(0.89\beta a)} \right|^2, \quad a \ll \lambda \tag{7.144}$$

对于更高的频率，式(7.143)中的级数收敛缓慢。当 $\beta a=3$ 时，取前 6 项就能得到满意的结果。当 $\beta a=100$ 时，至少需要取前 100 项[8]。

上述方法已经成功地用于分析 PEC 和电介质物体的散射问题[9]。

7.7　衍射

如图 7.16 所示，在区域 i 中，一 PEC 平板上有一个半径为 a 的圆孔。如果将从左边向 PEC 平板垂直入射的平面电磁(EM)波看做一个光粒子，那么在半径为 a 的圆孔区域中的光子将通过这个圆孔，而其余的光子将被完全反射。一半径为 a 的圆形光束将进入右半空间中。如图 7.16a 所示，波前仍然保持是一个平面。这是射线理论中“几何光学”近似。然而，光子的波动性将引起“衍射”以及引起通过圆孔的光束发散。一条衍射射线所通过的路径无法用反射或折射现象来解释。图 7.16b 所示为一个球面波前。通过计算图 7.16b 中的角度 θ_0[4,10] 可以定量地表示光束的发散程度。利用麦克斯韦方程，可以通过“物理光学”对衍射理论做出解释。根据 (a/λ) 的大小，可以做出各种近似，其中，λ 是波长。



a）几何光学

b）物理光学：光束发散

图 7.16　一光束通过半径为 a 的圆孔的传播

从数学上来看，严格的衍射理论是十分必需的。这一节将给出近似计算 θ_0 的理论。在这个计算过程中，引入了磁流 $\boldsymbol{J}_m$、电矢位 $\boldsymbol{F}$ 和磁辐射矢量 $\boldsymbol{L}$ 的概念。

7.7.1　磁流和电矢位

因为在自然界中不存在磁单极子，所以磁荷密度($\mathrm{Wb/m^3}$)和磁流密度($\mathrm{V/m^2}$)的概念是虚拟的。然而，在麦克斯韦方程中引入磁荷密度和磁流密度，不仅会使两个旋度方程对称，而且能够帮助我们建立对偶理论[7]。正如在下一节中将看到的，它也有助于求解实际的边值问题。修正的麦克斯韦方程是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{ev} \tag{7.145}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{mv} \tag{7.146}$$

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}=+\boldsymbol{J}_m+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{7.147}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=+\boldsymbol{J}_e+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{7.148}$$

而边界条件式(1.14)～式(1.17)的修正形式为

$$\hat{n}_{12}\times(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\rho_{es} \tag{7.149}$$

$$\hat{n}_{12}\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=\rho_{ms} \tag{7.150}$$

$$-\hat{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{M} \tag{7.151}$$

$$\hat{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K} \tag{7.152}$$

式中，$\boldsymbol{M}$(V/m)是磁流面密度。$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 用于替换孔隙的切向电场和切向磁场，例如，图 7.16 中所示的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是开口的 A 侧的切向电场和切向磁场。若在开放域中放置一定分布的虚拟磁流，它将使区域 A 中的场变为零，但在区域 B 中产生的场却与区域 A 中原来的源所产生的场相同。

对于时谐情况，当将式(1.50)应用于一个面电流源时，得到磁矢位

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(r)=\frac{\mu}{4\pi}\iint_{\text{源面积}}\widetilde{\boldsymbol{K}}(r')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|r-r'|}}{|r-r'|}\mathrm{d}S' \tag{7.153}$$

在无源区域中，因为

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{D}}=0 \tag{7.154}$$

所以，可以定义一个电矢位如下

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{F}}=-\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{F}} \tag{7.155}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{F}}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{F}} \tag{7.156}$$

可以得到电矢位$\widetilde{\boldsymbol{F}}$与磁流源之间的关系为

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(r)=\frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_{S'}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|r-r'|}}{|r-r|}\mathrm{d}S' \tag{7.157}$$

由$\widetilde{\boldsymbol{A}}$与$\widetilde{\boldsymbol{F}}$可以来计算场量$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{A}}-\frac{\mathrm{j}\omega}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}})-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{F}} \tag{7.158}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}=-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{F}}-\frac{\mathrm{j}\omega}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{F}})+\frac{1}{\mu}\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}} \tag{7.159}$$

在式(7.158)中，右边的中间一项是源自于洛伦兹条件：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{7.160}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}+\mu\varepsilon\mathrm{j}\omega\widetilde{\varphi}=0$$

$$\phi=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}} \tag{7.161}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\nabla\widetilde{\varphi}-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{A}} \tag{7.162}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}})-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{A}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\frac{\omega}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}})-\mathrm{j}\omega\widetilde{\boldsymbol{A}} \tag{7.163}$$

式(7.158)中的最后一项来自于电矢位的贡献。

可通过相似的方法得到式(7.159)。

在式(7.153)和式(7.157)中，可以用$(\hat{n}\times\widetilde{\boldsymbol{H}})$来替换$\widetilde{\boldsymbol{K}}$，而用$(\hat{n}\times\widetilde{\boldsymbol{H}})$来替换$\widetilde{\boldsymbol{M}}$。因此，位函数就可以用相应的切向场分量来给出。

如果用磁流密度来替换电流密度，类似于在式(7.114)中给出的$\boldsymbol{N}$，就可以定义一个磁辐射向量$\boldsymbol{L}$：

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}=\iiint_{\text{源体积}}\widetilde{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{r}r'}\mathrm{d}V' \tag{7.164}$$

而且，在远区电矢位$\widetilde{\boldsymbol{F}}$由下式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}=\varepsilon\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\widetilde{\boldsymbol{L}} \tag{7.165}$$

7.7.2 远区场和辐射强度

由式(7.158)和式(7.159)，可以得到衰减速度远远低于$1/r$的电场和磁场

$$\widetilde{E}_\theta=-\mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{2\lambda r}(\eta N_\theta+L_\phi) \tag{7.166}$$

$$\widetilde{H}_\phi = \frac{\widetilde{E}_\theta}{\eta} \tag{7.167}$$

$$\widetilde{E}_\phi = \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{2\lambda r}(-\eta N_\phi + L_\theta) \tag{7.168}$$

$$\widetilde{H}_\theta = \frac{\widetilde{E}_\phi}{\eta} \tag{7.169}$$

注意，在上述电场的一些表达式中，因子 $\omega\mu/4\pi$ 也可以写为

$$\frac{\omega\mu}{4\pi} = \frac{f\mu}{2} = \frac{f}{2}\sqrt{\mu}\sqrt{\varepsilon}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{f}{2c}\eta = \frac{\eta}{2\lambda}$$

可以计算出功率密度的时间平均值 S_{av}，根据它可以计算出单位立体角的总辐射功率 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$，称为辐射强度：

$$S_{\mathrm{av}}r^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\eta}{8\lambda^2}\left[\left|N_\theta + \left(\frac{L_\phi}{\eta}\right)\right|^2 + \left|N_\phi + \left(\frac{L_\theta}{\eta}\right)\right|^2\right] \tag{7.170}$$

注意，在式(7.164)中，矢量$\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}'$是

$$\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}' = r'\cos\psi \tag{7.171}$$

当用球坐标来表示 $\boldsymbol{r}'$和 $\boldsymbol{r}$ 之间的角度 ψ 时，有

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta\cos(\phi - \phi') \tag{7.172}$$

7.7.3 基本平面波源和辐射强度

我们考虑在均匀平面波上的一个微分面元 $\mathrm{d}S$，该平面波具有分量 E_x 和 H_y，沿 z 轴方向传播。等效电流层为

$$K_x = -H_y = -\frac{E_x}{\eta},\quad M_y = -E_x \tag{7.173}$$

由式(7.114)可知，对于一个微分面源来说，注意，$\psi=90°$，

$$N_x = -\frac{N_x\mathrm{d}S}{\eta} \tag{7.174}$$

同时，由式(7.164)知道，对于一个微分面源，

$$L_y = -E_x\mathrm{d}S \tag{7.175}$$

$$N_\theta = N_x\cos\phi\cos\theta \tag{7.176}$$

$$N_\phi = -N_x\sin\phi \tag{7.177}$$

$$L_\theta = L_y\sin\phi\cos\theta \tag{7.178}$$

$$L_\phi = L_y\cos\phi \tag{7.179}$$

根据式(7.170)，可知，

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{E_x^2(\mathrm{d}S)^2}{2\eta\lambda^2}\cos^4\frac{\theta}{2} \tag{7.180}$$

注意，平面波微分面源等价于相互交叉放置的点电偶极子和点磁偶极子。

7.7.4 圆孔衍射

在源点 $S(r',\ \pi/2,\ \phi')$处，均匀平面波的电场由下式给出

$$E_x = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\hat{r}\cdot r'} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'\cos\psi} \tag{7.181}$$

并且因为由式(7.118)知道 $\theta'=\pi/2'$，所以有

$$\cos\psi = \sin\theta\cos(\phi - \phi') \tag{7.182}$$

在圆形面积上对式(7.180)进行积分，可以计算出由圆形面积上的场所产生的 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\boldsymbol{E}_0^2}{2\eta\lambda^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')}r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'\right|^2 \tag{7.183}$$

可以证明，有如下等式

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}q\cos\phi}\mathrm{d}\phi = 2\pi J_0(q) \tag{7.184}$$

因而，

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{E_0^2}{2\eta\lambda^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left|2\pi\int_0^a J_0(kr'\sin\theta)r'\mathrm{d}r'\right|^2 \tag{7.185}$$

根据积分

$$\int v^v J_{v-1}(v)\mathrm{d}v = v^v J_v(v) \tag{7.186}$$

可计算出式(7.185)：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2E_0^2\pi^2 a^4}{\eta\lambda^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]^2 \tag{7.187}$$

当 θ 很小时，θ 中的第二项建立了模式。在图 7.17 中画出了方括号中一项的图形。

主瓣的 $\theta=\theta_0$，它由图 7.17 中的第一个零点给出：

$$ka\sin\theta_0 = 3.832$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}a\theta_0 = \frac{3.832}{2\pi a} \tag{7.188}$$
$$\theta_0 = 0.61\frac{\lambda}{a}$$

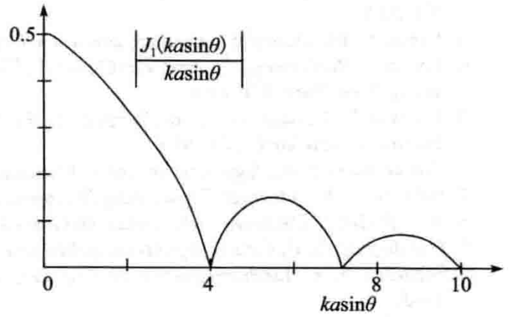


图 7.17　当 θ 很小时，一个圆孔的辐射模式的近似形式

当 $ka \gg 1$ 时，上述结果是有效的，增大 a/λ 可以减小光束发散，在极限情形下光束发散为零。

由式(7.183)，可得通过孔所传送的总功率：

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{7.189}$$

注意，对积分变量 θ 来说，其积分上限是 $\theta=\pi/2$，而不是 π。入射功率 P_i 由下式给出：

$$P_i = \frac{E_0^2}{2\eta}\pi a^2 \tag{7.190}$$

因此，功率传输系数为

$$\tau = \frac{P}{P_i} \tag{7.191}$$

在 $ka \gg 1$ 和 $ka \ll 1$ 这两种极端情况下，可以证明[1]

$$\tau = 1,\quad ka \gg 1 \tag{7.192a}$$

$$\tau = \frac{1}{3}(ka)^2,\quad ka \ll 1 \tag{7.192b}$$

虽然在式(7.192b)中有一些前后矛盾的近似，但是它说明了当孔很小时其传输很小。这里说明如何计算微波炉前面门窗屏幕的功率传输系数的阶数，在这个金属屏幕上有数个小孔。

若工作频率为 2.45GHz(λ=12cm)，以及 a=0.5mm，根据式(7.192b)，

$$\tau = \frac{1}{3}\left(2\pi\times\frac{0.5\times10^{-3}}{0.12}\right)^2 \approx 2\times10^{-6}$$

在微波频段，面窗中的屏幕实际上就是一个导体，它用来阻止从微波炉中逃逸出来的微波继续辐射。这种方法采用了法拉第笼[11]的屏蔽原理。

对于可见光频率，比如说 $\lambda=0.5\times10^{-6}$m，$ka\approx6\times10^3$，根据式(7.192a)，τ=1。人

们可以很容易地通过微波炉的窗口看进食品室。

对于 100MHz($\lambda=3$m)入射辐射的各种宽度的孔隙，Schmitt[11]给出了辐射强度的模拟衍射模式图案，这些模式是在距离圆孔 10m 处测量得到的。

对于圆孔隙来说，圆盘就是它的一个很理想的屏蔽体。根据屏蔽体的解，理想屏蔽体的 Babinet 原理[1]可以用于分析孔隙与屏幕体之间的相互作用。

远区中的衍射辐射称为夫琅和费衍射。菲涅耳衍射是出现在圆孔附近的辐射。

从数学上来看，严格的散射和衍射理论处理是十分必要的，Jackson[1]和 Balanis[7]在有关电磁理论的教材中已经介绍了这样一些处理方法。

参考文献

1. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (3rd edition), Wiley, New York, NY, 1999.
2. Ulaby, F. T., *Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, Upper Saddle River, NJ, 2001.
3. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1965.
4. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1965.
5. Lorrain, P., Corson, D. P., and Lorrain, F., *Electromagnetic Fields and Waves* (3rd edition), W.H. Freeman, New York, NY, 1988.
6. Schelkunoff, S. A., A general radiation formula, *Proc. I.R.E.*, 27, 660–666, 1939.
7. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
8. Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, NY, 1964.
9. Harrington, R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, NY, 1968.
10. Schwarz, S. E., *Electromagnetics for Engineers*, Sanders College Publishing, Philadelphia, PA, 1990.
11. Schmitt R., *Electromagnetics Explained*, Newnes, Amsterdam, the Netherlands, 2002.

第二部分

复杂媒质中的电磁场

第8章

复杂材料的电磁模型

到目前为止，我们所使用的模型均假定电磁参数 σ、μ 和 ε 都是标量常数。这一节分析电磁参数不再是标量常数的情况。特别地，我们将研究介电常数对频率的依赖关系。8.1 节通过考虑在自由空间中的电偶极子体分布，首先研究外部电场与电介质材料之间的相互作用。8.2 节通过考虑电介质中一个原子的力学等价体，研究电介质材料对频率的依赖关系。

8.1 电偶极子体分布

让我们简要地修正偶极子的概念。一个基本的电偶极子由相距极短距离 d 的两个电量相等的正负点电荷所构成。

这个系统的电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} = \hat{z}\, qd \tag{8.1}$$

当 $r \ll d$ 时，这个电偶极子产生的电位 Φ_{P} 为

$$\Phi_{\mathrm{P}} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p} \cdot \nabla\left[\frac{1}{r}\right], \quad r \gg d \tag{8.2}$$

其相应的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\hat{r}\, 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right] \tag{8.3}$$

对于一个在小范围体积中作一般分布的体积电荷，如果其中的总电荷为零，那么它的电偶极矩(见图 8.2)为

$$\boldsymbol{p} = \iiint_{V'} \boldsymbol{r}' \rho_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{r}')\, d\mathrm{V}' \tag{8.4}$$

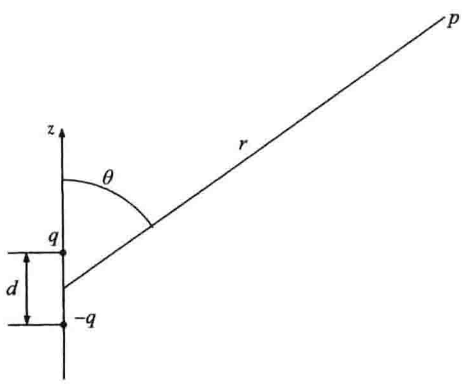


图 8.1 电偶极子

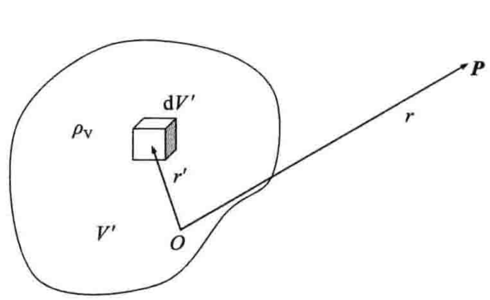


图 8.2 一般体电荷分布的电偶极矩

单位体积电偶极矩为(也称为电极化强度($\mathrm{C/m^2}$))$\boldsymbol{P}$ 的体积 V' 中的电偶极子体分布产生的电位(见图 8.3)，由下式给出

$$\Phi_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \boldsymbol{P} \cdot \nabla\left[\frac{1}{R_{\mathrm{SP}}}\right] \mathrm{d}V' \tag{8.5}$$

式(8.5)可以改写成

$$\Phi_{P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\left[\oiint_{S}\frac{\boldsymbol{P}}{R_{SP}}\mathrm{d}S'-\iiint_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{R_{SP}}\mathrm{d}V'\right] \tag{8.6}$$

把式(8.6)与单极子的电位表达式相比较，可得如下等效关系：一个电偶极矩密度为 $\boldsymbol{P}$ 的电偶极子分布等效于一个电荷体密度为 ρ_{Vb} 和电荷面密度为 ρ_{Sb} 的单极子分布(见图 8.4)：

$$\rho_{Vb}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{8.7}$$

$$\rho_{Sb}=\boldsymbol{P}\cdot\hat{n} \tag{8.8}$$

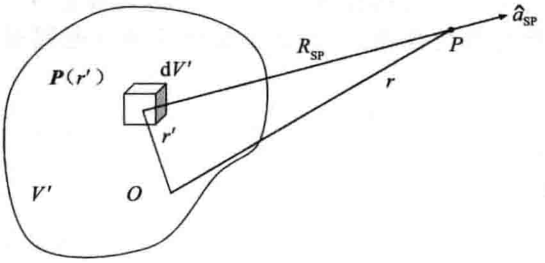


图 8.3 电极化强度为 P 的电偶极子体分布

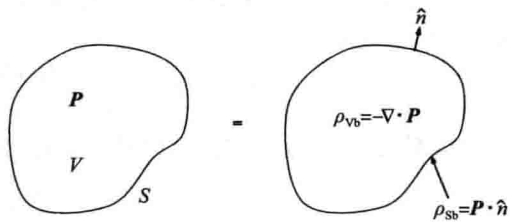


图 8.4 电偶极子体分布与单极子体分布的等效

在自由空间中，若有电偶极子符合体分布，那么高斯定理可写为

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E})=\rho_V+\rho_{Vb} \tag{8.9}$$

式中，ρ_V 是自由电荷体密度，ρ_{Vb}是由电偶极子体分布所产生的等效电荷体密度。

将式(8.7)代入式(8.9)中，得到

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\rho_V \tag{8.10}$$

表示为

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D} \tag{8.11}$$

对于线性材料，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成正比，可以用电极化率 χ_e 来表示这种线性关系：

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E} \tag{8.12}$$

将式(8.12)代入式(8.11)中，得到

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} \tag{8.13}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{8.14}$$

式中

$$\varepsilon_r=1+\chi_e \tag{8.15}$$

称为相对介电常数。

8.2 频变介电常数

在电场的影响下，每个原子内的正负电荷都会偏离它们的平衡位置。因为大多数原子核的质量 M 远大于电子的质量 m，$M\gg m$，所以可以认为正电荷是静止的。电子运动的摩擦系数为 ν。这个系统可以等效为如图 8.5 所示[1]的力学模型。

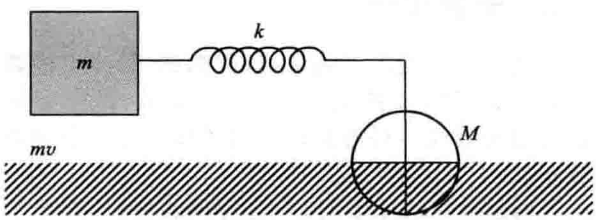


图 8.5 电介质中一个原子的力学等效模型

当将角频率为 ω 的时谐电场 $E=E_0e^{j\omega t}$施加于原子上时，有如下力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+m\nu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=-qE_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{8.16}$$

式中，x是电子相对于原子的位置。为了求出特解，令$x=x_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则

$$x_0=-\frac{qE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{j}\nu\omega)} \tag{8.17}$$

式中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8.18}$$

而q是电子电量的绝对值，m是电子的质量。由电荷中心的位移产生了一个电偶极矩$p=-qx$。如果每单位体积内有N个电偶极子，则电极化强度P(P为单位体积中的电偶极矩)由下式给出

$$P=Np=\frac{Nq^2E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{m(\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{j}\nu\omega)}=\frac{Nq^2E}{m(\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{j}\nu\omega)} \tag{8.19}$$

根据定义$P=\varepsilon_0\chi_eE$，可以计算出电极化率χ_e

$$\chi_e=\frac{P}{\varepsilon_0E}=\frac{Nq^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{j}\nu\omega} \tag{8.20}$$

复介电常数为$\varepsilon_r=\varepsilon_p=1+\chi_e=n^2$。因为$\nu$不等于零，所以$\varepsilon_r$和$n$都是复数。参数$\nu$叫作碰撞频率，其单位为弧度/秒。将式(8.20)中最右边的分子记为ω_p^2，则介电(常数)函数为

$$\varepsilon_p=n^2=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{j}\nu\omega} \tag{8.21}$$

式中

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \tag{8.22}$$

在一般金属中，存在不做振荡但可自由运动的自由电子，即$\omega_0=0$，此时有

$$\varepsilon_p=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\mathrm{j}\nu)}\quad(\omega_0=0,\text{一般金属}) \tag{8.23}$$

另一方面，对有些电介质，存在多重谐振。对于这样的材料，介电函数的最普遍形式为

$$\varepsilon_p(\omega)=\varepsilon_\infty+\sum_{R=1}^{N}\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)\omega_R^2}{\omega_R^2+2\mathrm{j}\omega\delta_R-\omega^2} \tag{8.24}$$

在上式中，ε_∞是在$\omega=\infty$时的介电常数，ε_s是直流条件下的相对介电常数，ω_R是谐振频率，δ_R是阻尼常数。图8.10给出了一种假想材料介电常数的实部。从图8.10中可以看出，在谐振频率附近介电常数的实部变化很快。在这个谐振频率附近，介电常数的虚部有一个有意义的值，电磁波被强烈地吸收着。

8.3 金属模型

式(8.23)给出了纯金属(例如钠)的介电函数。因为电子密度N的数量级是$10^{23}/\mathrm{cm}^3$，所以等离子体频率$\omega_p\approx2\times10^{16}\,\mathrm{rad/s}$。碰撞频率$\nu$的数量级是$10^{13}$。因为$\nu/\omega_p\approx10^{-3}$，所以金属被看成一种低损耗等离子体。在三个频率范围，可以对这种金属的模型做进一步的分类。

情况1：$\omega<\nu$并且$\nu^2\ll\omega_p^2$(低频区)

对于这种情况，$\varepsilon_p=1-\mathrm{j}\omega_p^2/\omega\nu$，并且$\varepsilon_p$的虚部占主导地位。用电导率来描述这种媒质要比用介电函数更合适。若注意下列各式，很容易得到它们两者之间的关系，

$$\sigma \widetilde{E} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{p} \widetilde{E} \tag{8.25}$$

$$\sigma = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{p} \approx \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\left(\frac{-\mathrm{j}Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\omega\nu} \tag{8.26}$$

$$\sigma = \frac{Nq^2}{m\nu} \tag{8.27}$$

由于这个表达式是在低频区得到的，因此称其为 DC 电导率，由下式给出：

$$\sigma_{\mathrm{DC}} = \frac{Nq^2}{m\nu} \tag{8.28}$$

显然，直流电导率与频率无关。把这种情况当作一种简单的导电媒质。2.2 节已经详细讨论过这种模型。式(2.12)和式(2.13)给出了波在这种媒质中传播的主要特性，为了方便起见，在此重新写出：

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1}{\delta} \tag{8.29}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}\angle 45° \tag{8.30}$$

情况 2：$\nu<\omega<\omega_\mathrm{p}$(中频区)

可以证明，在这个称为截止区的区域中，复折射系数 $n=n_\mathrm{R}-\mathrm{j}n_\mathrm{I}$ 可近似为如下表达式[2]：

$$n_\mathrm{R} = \frac{\nu\omega_\mathrm{p}}{2\omega^2}\left(1-\frac{5\nu^2}{8\omega^2}+\frac{\omega^2}{2\omega_\mathrm{p}^2}\right) \tag{8.31}$$

$$n_\mathrm{I} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega}\left(1-\frac{3\nu^2}{8\omega^2}-\frac{\omega^2}{2\omega_\mathrm{p}^2}\right) \tag{8.32}$$

$$\delta = \frac{c}{\omega_\mathrm{p}}\left(1-\frac{3\nu^2}{8\omega^2}+\frac{\omega^2}{2\omega_\mathrm{p}}\right) \tag{8.33}$$

情况 3：$\omega>\omega_\mathrm{p}$(高频区)

在高频区域中，等离子体将变成一种低损耗介质。在 $\nu^2 \ll (\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2)$ 和 $\nu^2 \ll \omega^2(\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2)/\omega_\mathrm{p}^4$ 的极限条件下，我们能够得到下面的近似表达式：

$$n_\mathrm{R} = \left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.34}$$

$$n_\mathrm{I} = \frac{\nu\omega_\mathrm{p}^2}{2\omega^3}\left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.35}$$

$$\delta = \frac{c}{\omega_\mathrm{p}}\left(\frac{2\omega^2}{\nu\omega_\mathrm{p}}\right)\left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.36}$$

图 8.6 给出了实验室等离子体的 n_R、n_I、α 和 β 变化曲线，其电子密度为 $N=10^{13}/\mathrm{cm}^3$，相应的等离子体频率 $\omega_\mathrm{p}\approx 3\times 10^{10}$。在金属中，电子密度会更高一些，但导电、截止和介电区特性都会存在。

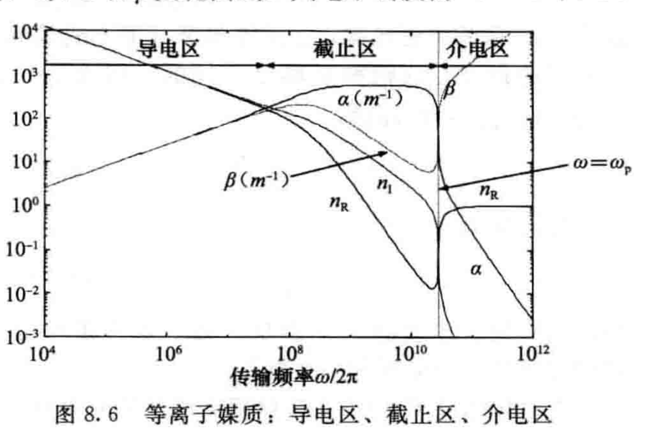


图 8.6　等离子媒质：导电区、截止区、介电区

8.4　等离子体媒质

在式(8.22)中，定义了一个新的量 ω_p，称为等离子体角频率，它正比于电子密度的平方。这一节将讨论等离子体媒质特性。等离子态为物质的第四态，其他三态分别为

固态、液态和气态。对固体材料进行加热，我们能成功地得到液态和气态。如果继续加热材料，我们就可以得到一种电离气体。电子会从中性原子中脱离出来，在物质的这种状态下我们能得到正离子和自由电子。尽管电子不再束缚在原子内，但是它仍然会受到正负电荷间库仑力所引起的某些恢复力的约束。这些按照 $1/r^2$ 的规律变化的长程库仑力的效应，可通过考虑下面的一维问题来解释。首先考虑一个包含正离子和电子，整体呈电中性的等离子媒质。如图 8.7 所示，假设我们通过将一层电子移动一个极小的距离 z 来扰乱平衡状态。那么，在介质的一端会有剩余的电子，其每单位面积上有 Nqz 个电子；而在另一端将会有剩余的正离子，其每单位面积上有 Nqz 个正离子。根据边界条件 $D_n=\rho_s=Nqz$，可以计算出在终端电中性区的这种不平衡电荷所产生的电场为

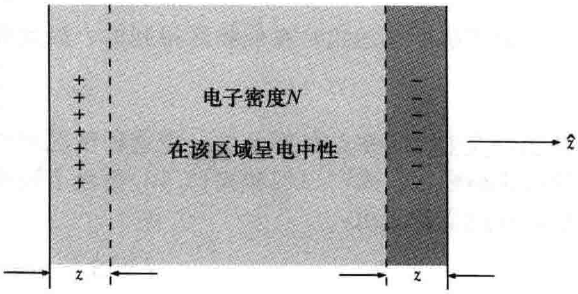


图 8.7 等离子媒质中电子电荷层的振荡

$$E=\frac{Nqz}{\varepsilon_0} \tag{8.37}$$

在这个电场存在的情况下，一个电子所受到的力为

$$\boldsymbol{F}=-q\boldsymbol{E}=-\hat{z}\frac{Nq^2z}{\varepsilon_0} \tag{8.38}$$

让这个力等于惯性力，可以写出力平衡方程如下：

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{Nq^2}{\varepsilon_0}z \tag{8.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}z=0 \tag{8.40}$$

式(8.40)是一个振荡方程，其解为

$$z=z_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_p t} \tag{8.41}$$

式中，ω_p^2 为 $Nq^2/m\varepsilon_0$。因此，ω_p 给出了电荷层的自然振荡频率。

8.5 电介质的极化

如果单位体积中有 N 个分子，则电极化强度可以写作

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=N\alpha_T\boldsymbol{E}_{loc}=N\alpha_T g\boldsymbol{E} \tag{8.42}$$

式中，α_T 是分子极化率，g 是作用于分子上的局部电场 $\boldsymbol{E}_{loc}$ 和外加电场 $\boldsymbol{E}$ 的比值。因为周围分子的存在，这两种电场是不同的。因为 $\varepsilon_r=1+\chi_e$，由式(8.42)得到，

$$\varepsilon_r=1+\frac{N\alpha_T g}{\varepsilon_0} \tag{8.43}$$

可以证明

$$g=\frac{2+\varepsilon_r}{3} \tag{8.44}$$

假定周围的分子呈球对称形状。图 8.8 为在球对称情况下的外加电场和局部电场。

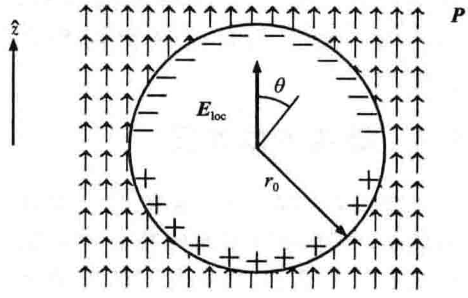


图 8.8 分子极化率和局部电场

电极化强度 $\boldsymbol{P}=\hat{z}P$ 会在球壁上产生等效电荷。

在球壁上的等效电荷 dq 为 $\boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是球面上的矢量微分面元，由 $\hat{r}\, r_0^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ 给出。因此，球心的电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \frac{\hat{z}\, P\cdot \hat{r}\, r_0^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}(-\hat{r}) = \frac{P\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{4\pi\varepsilon_0}(-\hat{r}) \tag{8.45}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\hat{r}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \quad = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\hat{r}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{8.46}$$

由于

$$\hat{r} = (\hat{r}\cdot\hat{\rho})\,\hat{\rho} + (\hat{r}\cdot\hat{\phi})\,\hat{\phi} + (\hat{r}\cdot\hat{z})\,\hat{z} = \sin\theta\,\hat{\rho} + 0 + \cos\theta\,\hat{z} \tag{8.47}$$

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi} = 0 \tag{8.48}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \tag{8.49}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \hat{z}\frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{8.50}$$

并且

$$\begin{aligned} g &= \frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{loc}}}{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E}} = 1 + \frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}}{\boldsymbol{E}} \\ &= 1 + \frac{P/3\varepsilon_0}{P/\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}}} = 1 + \frac{\chi_{\mathrm{e}}}{3} = \frac{3+\chi_{\mathrm{e}}}{3} = \frac{3+\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{3} = \frac{2+\varepsilon_{\mathrm{r}}}{3} \end{aligned} \tag{8.51}$$

由式(8.43)和式(8.44)，得到

$$\alpha_{\mathrm{T}} = \frac{3\varepsilon_0}{N}\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+2} \tag{8.52}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{1+2N\alpha_{\mathrm{T}}/3\varepsilon_0}{1-N\alpha_{\mathrm{T}}/3\varepsilon_0} \tag{8.53}$$

上式称为克劳修斯-莫索提(Clausius-Mossotti)方程。从上面各式中，我们已经注意到局部电场不同于外加电场。然而，在写出受力方程式(8.16)时，等式右边是外加电场作用在电荷上的电场力。相反地，如果我们使用局部电场所产生的电场力，则就不得不修改式(8.20)：在式(8.20)中，用 ωY_1 替换 ωY_0，其中

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{Nq^2}{3\varepsilon_0 m} \tag{8.54}$$

图 8.9 粗略地给出了 ε_{p} 随 ωY_1 的变化曲线，其中 ε_{p} 由式(8.21)给出，但用 ωY_1 替换了 ωY_0。

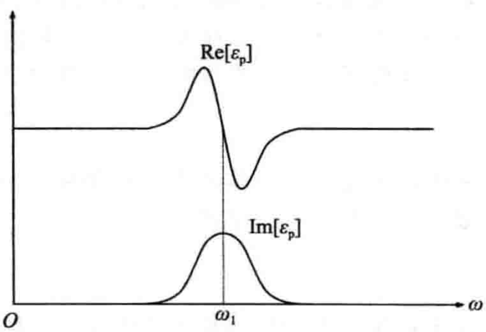


图 8.9　色散和复介电常数

复介电常数

$$\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{p}} = \varepsilon'(\omega) - \mathrm{j}\varepsilon''(\omega) \tag{8.55}$$

具有解析特性，这种特性由 Kramer-Kronig 关系式给出：

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega'\varepsilon''(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{8.56}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')-\varepsilon_0}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{8.57}$$

极化率 α_{T} 包含几个方面的贡献，并且可以写作

$$\alpha_{\mathrm{T}} = \alpha_{\mathrm{e}} + \alpha_{\mathrm{i}} + \alpha_{\mathrm{d}} \tag{8.58}$$

式中，下标 e、i 和 d 分别代表电子、离子和固有电偶极子对极化率的贡献。电子和离子的贡献可归纳成如下形式：

$$\alpha_j = \frac{F_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\omega v_j} \tag{8.59}$$

这里 F_j 是第 j 阶共振的强度的度量。因为热运动的影响，固有偶极子不能完全有秩序地按外加电场方向整齐排列起来，所以各个固有偶极子的贡献是不同的：

$$\alpha_\mathrm{d} = \frac{p^2}{3k_\mathrm{B}T(1+\mathrm{j}\omega\tau)} \tag{8.60}$$

式中，T 是温度，k_B 是玻尔兹曼常数，p 是固有电偶极矩，τ 是弛豫时间。图 8.10[4]是一种假想电介质的频率响应曲线。

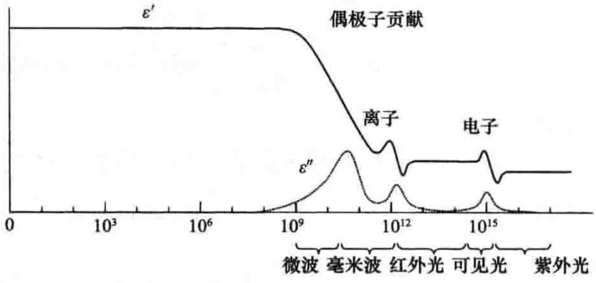


图 8.10 假想电介质的频率响应

除上面讨论过的三种极化机理外，界面极化或空间电荷极化[3]会产生一个复介电常数：

$$\varepsilon_\mathrm{r} = -\frac{\mathrm{j}\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} + \sum_{m=1}^{M}\left(a_m + \frac{b_m - a_m}{1+\mathrm{j}\omega\tau_m}\right) \tag{8.61}$$

这种极化是由于大尺度的场畸变而产生的，场畸变是由在体积中的空间电荷的堆积或在不同材料的部分接触面上面电荷的堆积引起的。地球物理学媒质就是这种材料的一个例子[4]。

8.6 混合方程

混合方程给出了复合电介质的有效介电常数，例如，将介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{r}2}$ 的材料嵌入到介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{r}1}$ 的主体电介质材料中。假设被嵌入物是一个半径为 a 的球体。与波长相比，半径 a 很小。这种假设允许我们忽略散射的影响。假设有一系列球体是稀疏地分布在主体材料中，以致这些球体所占据体积的比例 f 要远远低于百分之几，$f \ll 1$。这个假设允许我们忽略考虑小球之间的相互作用。这种情况类似于 8.5 节描述的情况，8.5 节给出了由许多个电偶极子组成的材料的介电常数为

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \frac{1 + 2N\alpha/3\varepsilon_0}{1 - N\alpha/3\varepsilon_0} \tag{8.62}$$

式中，N 是在单位体积内的电偶极子个数，α 是电偶极子的极化率。在现在的情况下，有效介电常数 ε_e 由下式给出

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{e}}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{1 + 2N\alpha/3\varepsilon_{\mathrm{r}1}}{1 - N\alpha/3\varepsilon_{\mathrm{r}1}} \tag{8.63}$$

式中，N 是在单位体积内球的个数。球的极化率 α 为[3]

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}1}(\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})V}{\varepsilon_{\mathrm{r}2} + 2\varepsilon_{\mathrm{r}1}} \tag{8.64}$$

在做出几个简化假设后，其中一些假设在上面已经介绍过了，我们得到式(8.64)。

因为

$$f = NV \tag{8.65}$$

式中，V 是小球的体积，我们得到有效介电常数为

$$\varepsilon_\mathrm{e} = \varepsilon_{\mathrm{r}1}\frac{1 + 2fy}{1 - fy} \tag{8.66}$$

在上式中，有

$$y = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1}}{\varepsilon_{\mathrm{r}2} + 2\varepsilon_{\mathrm{r}1}} \tag{8.67}$$

这个等式称为麦克斯韦-加内特(Maxwell-Garnet)混合方程。如果嵌入物不是球体形状，则应该应用相应嵌入物的 α 的表达式。有关混合方程的更多信息，请参见文献[3]和[5]。

8.7　良导体和半导体

电荷的迁移会产生电流的流动，一般导体的本构关系为 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$。根据 σ 的大小，我们将导体分为：半导体($\sigma\sim 10^{-2}\mathrm{S/m}$)和导体(金属或者合金)($\sigma$ 介于 $10^{-2}\sim10^{-8}\mathrm{S/m}$ 之间)。

一般来说，导体中的电荷载流子是自由电子，而在半导体中电荷载流子是电子和空穴。我们已经看到，$\sigma_{\mathrm{DC}}=Nq^2/mv$。如果 $\omega<\nu$ 和 $\nu^2\ll\omega_{\mathrm{p}}^2$，我们可以用这个公式来计算电导率 σ。在金属中，直到光频频段，这些条件都是满足的。金属的电导率也可以用它的电子迁移率 μ_{e} 来表示，有

$$\sigma = Nq\mu_{\mathrm{e}} \quad (\mathrm{S/m}) \tag{8.68}$$

单位体积的功率损耗为

$$w = \sigma|\boldsymbol{E}|^2 \quad (\mathrm{W/m})^3 \tag{8.69}$$

在导体的情况中，我们稍微深入讨论碰撞频率 v。可以把电子的平均自由程 Λ 和电子的平均漂移速度联系起来：

$$\Lambda = |\boldsymbol{v}|\tau \tag{8.70}$$

这里 τ 是平均碰撞时间，它和碰撞频率 ν 有关

$$\nu = \frac{1}{\tau} \tag{8.71}$$

在导体的情况中，τ 也称为弛豫时间。因为电导率依赖于平均碰撞时间，所以电阻率 $\rho=1/\sigma$ 随温度升高而增大。电阻率可以用它在室温 T_{R} 时的值 ρ_{RT} 来表示：

$$\rho = \rho_{\mathrm{RT}}[1+\alpha_{\mathrm{R}}(T-T_{\mathrm{R}})] \tag{8.72}$$

对于纯金属来说，电阻的温度系数 α_{R} 大约是 0.004/℃。在文献[5]中列表给出了 α_{R} 值。当绝对温度 T 接近零度时，纯金属的电阻率为零，变成一种典型的超导体。由电子迁移支配的纯金属的电导率 σ 对温度的依赖关系可以写为

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{A}{T}, & \text{在高温区} \\ \dfrac{B}{T^5}, & \text{在低温区} \end{cases} \tag{8.73}$$

本征半导体属于第Ⅳ族元素，包括硅和锗。本征半导体的电导率可以表示为

$$\sigma = N_{\mathrm{n}}\mu_{\mathrm{n}}q + N_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}q \tag{8.74}$$

式中，N_{n} 和 N_{p} 分别为本征电子密度与空穴密度。理论研究和实验结果都表明，σ 可以用禁带隙能量 E_{g} 来表示[5]：

$$\ln\sigma = \frac{A-E_{\mathrm{g}}}{1.7\times10^{-4}T} \tag{8.75}$$

锗的禁带隙能为 0.67eV，而硅的禁带隙能为 1.12eV。由于锗比硅有更高的迁移率，因此锗器件可工作在更高的频率。然而，锗器件对温度变化更为敏感。在本征半导体中掺入杂质(掺杂物)，就能得到杂质半导体。杂质来自第Ⅲ族或者第Ⅴ族元素。杂质半导体的电气性能受到杂质的显著影响。N 型半导体具有来自第Ⅴ族元素(例如磷)的杂质，且在导带中有很多个容易受激的电子。因此，施主杂质增加了导带中自由电子的数目，促进了材料电导率的提高。掺入第Ⅲ族元素中的原子(例如铝)就能构成 P 型半导体，杂质原子称为受主。N 型半导体的电导率为

$$\sigma_{\mathrm{N型}} = \mu_{\mathrm{e}}N_{\mathrm{D}}q \tag{8.76}$$

式中，N_{D} 是施主浓度。P 型半导体的电导率为

$$\sigma_{\text{P型}} = \mu_e N_A q \tag{8.77}$$

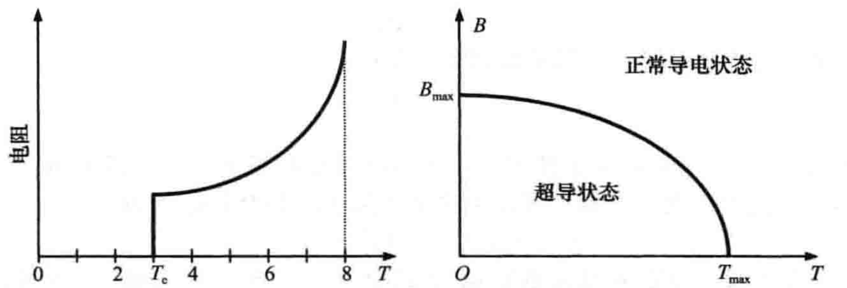
式中，N_A 是受主浓度。

在半导体中，电子和空穴的有效质量不同于自由电子的质量，这是因为电荷载流子会受到各种相互作用力场的作用。例如，对于硅来说，$m_e^*/m_0 \approx 0.190-0.260$ 和 $m_h^*/m_0=0.5$，其中 m_e^* 是电子的有效质量，m_h^* 是空穴的有效质量，m_0 是自由电子的有效质量。更多的细节请参见参考文献[5]。当半导体受到一个相互垂直的电场($\boldsymbol{E}$)和磁场($\boldsymbol{H}$)作用时，会感应出一个与 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都相垂直的很小的位场($\boldsymbol{E}_H$)。这种现象称为霍尔效应，我们在第 6 章中讨论。

8.8 理想导体和超导体

当冷却到一个足够低的温度 T_c 时，很多金属与合金的电阻会急剧地下降(见图 8.11a)。如果电流密度 J_c 或者磁场 H_c 超过某一个临界值时，超导状态[5~7]会被破坏，而正常导电状态会得到恢复。文献[5]给出了一个联系 H_c 与温度 T 的经验公式：

$$H_c(T) = H_{c0}\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \tag{8.78}$$



a）电阻与温度的关系　　b）超导状态的临界磁场B_{max}和临界温度T_{max}

图 8.11 超导体

式中，H_{c0}是在 $T=0$ 时的临界磁场。超导状态与正常导电状态之间的边界如图 8.11b 所示。

B_{max}和 T_{max}之间的经验关系式为

$$B_{max} = 0.02T_{max} \tag{8.79}$$

假设电流密度、磁场和温度都低于它们的临界值，则电阻将降为 0，导体可以被看成一种理想导体。正如前一节提到的，即使 $E_{DC}=0$，在导体中也可以存在一个直流磁场 H_{DC}。然而，在理想的超导体中，可以证明 $H_{DC}=0$。因此，理想超导体不仅是理想导体，还是一个理想的抗磁体。当温度降到临界温度 T_c 以下时，一个理想超导体样品内的磁场将被排斥出来。这种现象称作迈斯纳(Meissner)效应。基于 London 提出的宏观理论，我们讨论超导体中的电磁现象。

与普通导体中的欧姆定律不同，欧姆定律为

$$\boldsymbol{J}_n = \sigma_n \boldsymbol{E}\left(\frac{A}{m^2}\right) \tag{8.80}$$

在超导体中，London 假设电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 由下式给出

$$\boldsymbol{J}_s = C\boldsymbol{A} \tag{8.81}$$

式中，C 是给定材料的一个特征常数，$\boldsymbol{A}$ 是普通的矢量位。对式(8.81)取旋度，有

$$\nabla\times\boldsymbol{J}_s = C\,\nabla\times\boldsymbol{A} = C\boldsymbol{B} \tag{8.82}$$

根据直流电流的安培定律，有

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}_s \tag{8.83}$$

$$\nabla\times \nabla\times \boldsymbol{B} = \mu\, \nabla\times \boldsymbol{J}_s = \mu C\boldsymbol{B} \tag{8.84}$$

$$\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B} = \mu C\boldsymbol{B} \tag{8.85}$$

因为$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，所以

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = -\mu C\boldsymbol{B} \tag{8.86}$$

对于一个在$z>0$半空间中的半无限大超导体，式(8.86)的解为

$$B(z) = B(0)\mathrm{e}^{-z/\lambda_L} \tag{8.87}$$

式中

$$\lambda_L^2 = -\frac{1}{\mu C} \tag{8.88}$$

并且B在x-y平面内。我们随后将证明

$$C = -\frac{n_s q^2}{m} \tag{8.89}$$

式中，n_s是超导电子的密度，q和m分别是电子的电荷量和质量。因此

$$\lambda_L = \left(\frac{m}{\mu n_s q^2}\right)^{1/2} \tag{8.90}$$

这是一个实数。式(8.87)表明λ_L是表征磁通密度自在超导体表面处的值衰减的长度。它称作London透入深度。对于铅，$\lambda_L=146\text{Å}$。在普通的良导体中，时谐场的透入深度δ为

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \tag{8.91}$$

式中，f是频率。对于直流电流，$\delta=\infty$，这意味着直流磁场是均匀分布的。在超导体中，即使是直流电流，λ_L也非常小；这就解释了迈斯纳(Meissner)效应。下面将给出式(8.81)所描述现象的基础。超导体中的电流密度$\boldsymbol{J}_s$由下式给出：

$$\boldsymbol{J}_s = n_s^* q_s \boldsymbol{v}_s \tag{8.92}$$

式中，n_s^*是电荷载流子q_s的密度，$\boldsymbol{v}_s$是它们的漂移速度。在磁场$\boldsymbol{B}_s=\nabla\times\boldsymbol{A}_s$存在的情况下，总动量$\boldsymbol{P}_s$为

$$\boldsymbol{P}_s = m_s\boldsymbol{v}_s + q_s\boldsymbol{A}_s \tag{8.93}$$

式中，m_s是电荷载流子的质量。上式中的最后一项是由于磁场的存在而产生的附加动量。由式(8.92)和式(8.93)，有

$$\boldsymbol{J}_s = \frac{n_s^* q_s}{m_s}\boldsymbol{P}_s - \frac{n_s^* q_s^2}{m_s}\boldsymbol{A}_s \tag{8.94}$$

对于超导电子，其总动量为零，如果下式成立

$$C = -\frac{n_s^* q_s^2}{m_s} \tag{8.95}$$

利用式(8.81)，可以得到式(8.95)。为了计算λ_L，我们需要求出m_s、n_s^*和q_s的值。在超导状态，电子以电子对方式松散地结合[6]。在一给定的电子对中，因为两个电子分别具有动量$\hbar\boldsymbol{k}$和$-\hbar\boldsymbol{k}$，所以电子对的净动量为0。电子对就像是一个单独的粒子，有

$$m_s = 2m \tag{8.96}$$

$$q_s = 2q \tag{8.97}$$

$$n_s^* = \frac{n_s}{2} \tag{8.98}$$

式中，m、q和n_s分别是在超导状态下电子的质量、电子电荷的绝对值和电子的数量密度。对于超导体，电荷载流子是电子对。将式(8.96)至式(8.98)代入式(8.95)中，我们将会看

到式(8.95)与式(8.89)相同。从式(8.90)中，我们看到 λ_L 应当总是一个有限的值。理想超导体，同时也是理想磁抗体(排斥磁通的迈斯纳效应)，是 $\lambda_L \ll l$ 的实际情况的一种理想化，其中 l 是样品的相关尺寸。

在高频时，如果考虑到由于一部分电子处于超导状态并且结合成电子对，就可以建立超导体的二流体模型。在普通导体中，假定自由电子在电场的作用下运动，并且像之前描述的那样它在运动中会相互碰撞。然而，超导电子对不会发生碰撞。在二流体模型中，我们对每个流体可以写出独立的动量方程，其中普通流体用下标 n 表示，超导流体用下标 s 表示。

$$m_s \frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt} = -q_s\boldsymbol{E} \text{ 或者 } m\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt} = -q\boldsymbol{E} \tag{8.99}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_n}{dt} + m\nu\boldsymbol{v}_n = -q\boldsymbol{E} \tag{8.100}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_s + \boldsymbol{J}_n \tag{8.101}$$

$$\boldsymbol{J}_s = -n_s^* q_s \boldsymbol{v}_s = -n_s q\boldsymbol{v}_s \tag{8.102}$$

$$\boldsymbol{J}_n = -n_n q\boldsymbol{v}_n \tag{8.103}$$

$$n = n_s + n_n \tag{8.104}$$

对于一个时谐场，从式(8.99)、式(8.100)、式(8.102)和式(8.103)，得到

$$J_s = -\mathrm{j}\frac{q^2 n_s}{m\omega}\boldsymbol{E} \tag{8.105}$$

$$\boldsymbol{J}_n = -\mathrm{j}\frac{q^2 n_n}{m\omega(1-\mathrm{j}/\omega\tau)}\boldsymbol{E} \tag{8.106}$$

式中，$\tau = 1/\nu$ 是动量弛豫时间。如图 8.12 所示，可以容易地建立上式的等效电路，其中对应的物理量分别为

$$V \leftrightarrow \boldsymbol{E} \tag{8.107}$$

$$I_s \leftrightarrow \boldsymbol{J}_s \tag{8.108}$$

$$I_n \leftrightarrow \boldsymbol{J}_n \tag{8.109}$$

在上述电路中，$V = \mathrm{j}\omega L_s I_s$，并且根据类比可得

$$L_s = \frac{m}{q^2 n_s} \tag{8.110}$$

根据第二条支路的类比关系，有

$$I_n = \frac{1}{R_n + \mathrm{j}\omega L_n} V \tag{8.111}$$

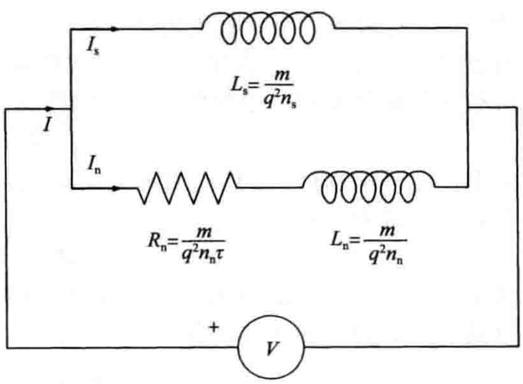


图 8.12 基于二流体模型的超导体的电路模拟

和

$$\frac{1}{R_n + \mathrm{j}\omega L_n} = \frac{-\mathrm{j}q^2 n_n}{m\omega\left(1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega\tau}\right)} = \frac{\omega\tau q^2 n_n}{\mathrm{j}m\omega(\omega\tau - \mathrm{j})} = \frac{1}{m(q^2 n_n T)(\mathrm{j}\omega\tau + 1)} = \frac{1}{(\mathrm{j}m\omega/q^2 n_n) + (m/q^2 n_n T)} \tag{8.112}$$

通过比较，可得

$$R_n = \frac{m}{q^2 n_n \tau} \tag{8.113}$$

$$L_n = \frac{m}{q^2 n_n} \tag{8.114}$$

注意，当 $\omega = 0$ 时，$\omega L_n = 0$，并且 R_n 被 ωL_s 短路。因此，对于 $T < T_c$ 的情况，即使

同时存在超导电子与普通电子，电阻同样为 0。如果 ω 是一有限值，则 R_n 不再被短路。

基于二流体理论，超导体中的麦克斯韦方程可写为

$$\nabla\times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{8.115}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{8.116}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}=0 \tag{8.117}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}=0 \tag{8.118}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{8.119}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H} \tag{8.120}$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_s+\boldsymbol{J}_n \tag{8.121}$$

$$\boldsymbol{J}_n=\sigma_n \boldsymbol{E} \tag{8.122}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{J}_s=C\boldsymbol{B}=-\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H},\quad \lambda_L=\left(\frac{m}{\mu_0 n_s q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.123}$$

$\boldsymbol{H}$ 的波动方程可写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}-\mu_0\sigma_n\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \tag{8.124}$$

注意，如果 $n_s=0$，则 $\lambda_L=\infty$。对良导体，上式左边的最后一项可以忽略不计。这一项是由导体中的位移电流所产生的。让我们得到一个一维时谐场解，假设

$$\boldsymbol{H}=\hat{y}H_y(z)e^{j\omega t} \tag{8.125}$$

磁场满足方程

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\frac{1}{\lambda_L^2}H_y-\frac{j2}{\delta^2}H_y=0 \tag{8.126}$$

式中，$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{\pi f\mu_0\sigma_n}}$是趋肤深度。

进一步假设

$$H_y(z)=H_0 e^{-\gamma z} \tag{8.127}$$

$$\gamma^2=\frac{1}{\lambda_L^2}+\frac{2j}{\delta^2}=\frac{1}{\lambda_L^2}\left[1+2j\left(\frac{\lambda_L}{\delta}\right)^2\right] \tag{8.128}$$

$$\gamma=\frac{1}{\lambda_L}\left[1+2j\left(\frac{\lambda_L}{\delta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{8.129}$$

$$\gamma=\frac{1}{\lambda_L}\left[\left(\frac{\theta+1}{2}\right)^{1/2}+j\left(\frac{\theta-1}{2}\right)^{1/2}\right] \tag{8.130}$$

式中

$$\theta=\left[1+4\left(\frac{\lambda_L}{\delta}\right)^4\right]^{1/2} \tag{8.131}$$

对于直流情况，$\delta=\infty$、$\theta=1$ 且 $\gamma=\dfrac{1}{\lambda_L}$。$\lambda_L$ 是在超导体中 H_{DC} 的透入深度。这个参数是迈斯纳效应的定量度量。如果导体是一个普通导体且 $\omega\neq 0$，δ 是有限的，λ_L 很大，且

$$\theta\approx 2\left(\frac{\lambda_L}{\delta}\right)^2 \tag{8.132}$$

$$\left(\frac{\theta+1}{2}\right)^{1/2}\approx\left(\frac{\theta-1}{2}\right)^{1/2}\approx\left(\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}=\frac{\lambda_L}{\delta} \tag{8.133}$$

因此

$$\gamma = \frac{1}{\delta}(1+\mathrm{j}), \quad n_s = 0, \quad \omega \neq 0 \tag{8.134}$$

这是与预期的一样。

按照在 2.5 节中给出的步骤，我们可以计算出表面电阻。或者，对于分别沿 y 轴和沿 x 轴的单位宽度与长度，有

$$Z_s = \frac{E_0}{\int_0^{\infty} J_x \mathrm{d}z} \tag{8.135}$$

式中

$$J_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{8.136}$$

根据式(8.135)和式(8.136)，有

$$Z_s = \frac{E_0}{\int_0^{\infty} \gamma H_0 \mathrm{e}^{-\gamma z} \mathrm{d}z} = \frac{E_0}{H_0} \tag{8.137}$$

因为 E_0 是在 $z=0$ 表面上的电场，所以

$$E_x(z) = E_0 \mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{8.138}$$

根据麦克斯韦方程式(8.115)，有

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \mathrm{j}\omega H_y \tag{8.139}$$

因此，我们得到 E_0 与 H_0 之间的关系式：

$$E_0 = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 H_0}{\gamma} \tag{8.140}$$

那么，表面阻抗为

$$Z_s = R_s + \mathrm{j}X_s = \omega\mu_0\lambda_L\left(\frac{\theta-1}{2\theta^2}\right)^{1/2} + \mathrm{j}\omega\mu_0\lambda_L\left(\frac{\theta+1}{2\theta^2}\right)^{1/2} \tag{8.141}$$

8.9 磁性材料

磁性材料[4~6]可以磁化。磁化的程度是由磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$(A/m³)来定量描述，它是在单位体积中的净磁偶极矩。磁化强度与电极化强度 $\boldsymbol{P}$(C/m²)相似，电极化强度是在单位体积中的净电偶极矩。

我们可以把磁荷想象成电荷的对偶情况，也可以定义磁偶极矩

$$\boldsymbol{p}_m = q_m \boldsymbol{d} \tag{8.142}$$

式中，磁荷 $+q_m$ 和 $-q_m$ 之间相距一个极短的距离 d。这时需要注意的是，我们不可能将这两个磁荷分离开来，它们只能成对地出现，而且单极子磁荷的密度为 0。当我们将电流视作磁场的源时，我们可以把一个磁偶极子看成一个电流环(见图 8.13)。在离开它们比较远的距离处，它们两者有相同的矢量位：

$$\boldsymbol{A}_p = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\boldsymbol{p}_m \times \hat{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{p}_m \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{8.143}$$

式中

$$\boldsymbol{p}_m = \hat{z}\, q_m d = \hat{z}\, I\pi a^2 \tag{8.144}$$

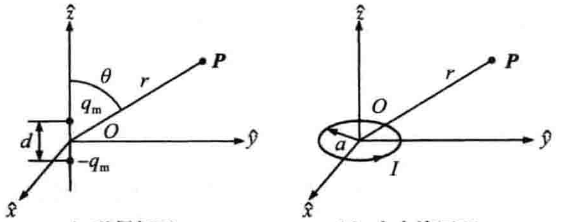
对于一个普通的小电流环，有

$$\boldsymbol{p}_m = \frac{1}{2} I \oint r' \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{8.145}$$

如果小电流环路是平面，且原点在平面内(图 8.14)，有

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \tag{8.146}$$

且



a）磁偶极子　　b）小电流圆环

图 8.13　磁偶极子和小电流圆环的等效

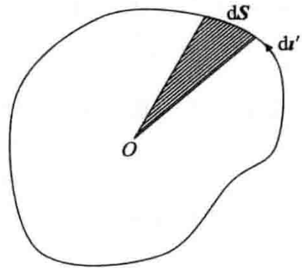


图 8.14　平面电流环

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = I\mathrm{d}\boldsymbol{S}' \tag{8.147}$$

如果源是体电流 $\boldsymbol{J}$，则

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iiint_{V'}\boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{J}\mathrm{d}V' \tag{8.148}$$

由磁偶极子密度为 $\boldsymbol{M}$(A/m)的磁偶极子体分布产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{p}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\boldsymbol{M}\times \nabla\left(\frac{1}{R_{\mathrm{SP}}}\right)\mathrm{d}V' \tag{8.149}$$

经过处理后，可以把式(8.149)写成

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{p}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint\!\!\!\oint_{S'}\frac{\hat{n}\times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R_{\mathrm{SP}}}\mathrm{d}S' + \iiint_{V'}\frac{\nabla\times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R_{\mathrm{SP}}}\mathrm{d}V'\right] \tag{8.150}$$

将式(8.150)与由密度为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{b}}$ 的体电流和密度为 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}$ 的面电流产生的 $\boldsymbol{A}$ 的表达式相对比，可得到下面的等效关系(见图 8.16)：

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} = \nabla\times \boldsymbol{M}\quad (\mathrm{A/m^2}) \tag{8.151}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}} = \hat{n}\times \boldsymbol{M}\quad (\mathrm{A/m}) \tag{8.152}$$

一个感兴趣的话题是，当把磁偶极子放入一个外部磁场 $\boldsymbol{B}$ 中时，磁偶极子所受到的转矩 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times \boldsymbol{B} \tag{8.153}$$

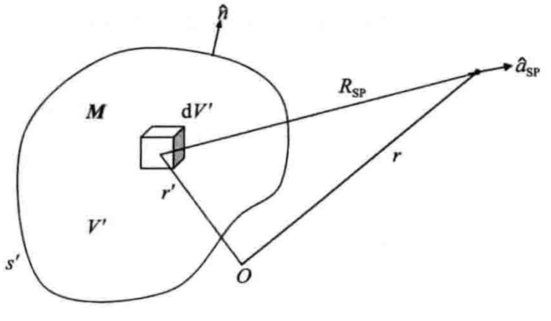


图 8.15　磁偶极子体分布

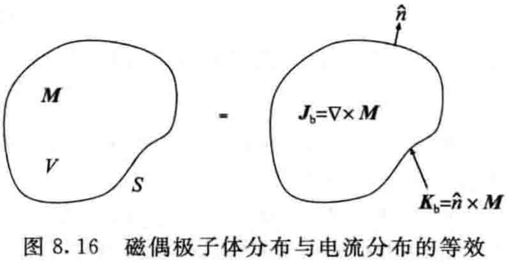


图 8.16　磁偶极子体分布与电流分布的等效

在外磁场 $\boldsymbol{B}$ 存在的情况下，电流环会受到一个转矩。电流环将会旋转，直到当环平面的法线与 $\boldsymbol{B}$ 平行时，就达到平衡。回路中的电子构成电流。如果一个电量为 $-q$ 的电子以角速度 ω 沿轨道运动，它产生的电流为

$$I = -q\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{8.154}$$

式中，ω 取决于电子周围的环境。考虑一种最简单的情况，在与圆形轨道垂直的磁场 H_0 中，一个电子绕电量为 $+q$ 的质子做圆周运动。

根据洛伦兹力公式，有

$$\boldsymbol{F} = -\hat{\rho}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - q(\hat{\phi} v \times \mu_0 H_0 \hat{z}) = -\hat{\rho}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \hat{\rho} q v \mu_0 H_0 \tag{8.155}$$

假设质量较大的质子是静止的，有

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + q\omega r \mu_0 H_0 = m\omega^2 r \tag{8.156}$$

在上式中，使用了关系式 $v=\omega r$。右边 $m\omega^2 r$ 一项是由电子圆周运动所产生的反离心力。求解之，得到

$$\omega = \omega_L \pm (\omega_L^2 + \omega_0^2)^{1/2} \tag{8.157}$$

式中

$$\omega_L = \frac{q\mu_0 H_0}{2m} \tag{8.158}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{q^2}{4\pi m\varepsilon_0 r^3}\right)^{1/2} \tag{8.159}$$

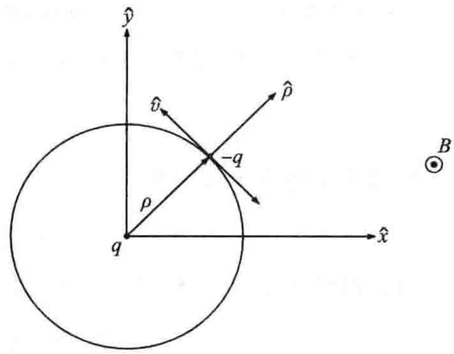


图 8.17 在与圆周轨道相垂直的外磁场中，电子绕质子作圆周运动

在上式中，ω_0 是在 H_0 不存在时圆周运动的频率。如果 $\omega_L \gg \omega_0$，则对应于 H_0 很大或 r 很大的情况，

$$\omega = 2\omega_L = \frac{q\mu_0 H_0}{m} = \omega_b, \quad \omega_L \gg \omega_0 \tag{8.160}$$

式中，ω_L 称为 Larmor 频率，ω_b称为回旋频率。另一方面，如果 H_0 很小或者 r 很小 ($\omega_L \ll \omega_0$)，那么对应原子中绕轨道运行的电子，有

$$\omega \approx \omega_0 + \omega_L \tag{8.161}$$

抗磁性材料的磁导率 μ_r 略小于 1。在稍后，我们看到在旋转磁化为零的材料中会出现这种现象。磁化仅由绕轨道运动所产生。由于电子绕其轴自旋而产生的磁化是零，因为自旋数是偶数。轨道磁偶极矩为

$$(\boldsymbol{p}_m)_{orb} = -q\frac{\omega}{2\pi}\pi\rho^2\,\hat{z} \tag{8.162}$$

在单位体积内，由电子轨道运动产生的的净磁偶极矩 $\boldsymbol{M}$ 与原有磁场 $\boldsymbol{H}$ 方向相反，当用磁化率 χ_m 联系二者时，有

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.163}$$

式中，χ_m 为负值。由此可以得到相对磁导率 μ_r：

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{8.164}$$

相对磁导率略小于 1。上述解释过于简单，但它却说明了由电子轨道运动产生的磁化只会引起反向磁化。

对于磁导率 μ_r 略大于 1 的顺磁性材料来说，一个简单的解释就是电子旋转产生的磁化。在具有偶数个电子的原子中电子通常成对地出现，每一对中的两个电子具有相反的旋转方向，因此它们的旋转磁矩彼此抵消。若电子个数为奇数，则每一个原子都具有净磁矩。如果施加外部磁场，则在热运动的随机影响下各个原子将趋于沿外部磁场方向比较整齐地排列。部分磁矩与外部磁场方向一致，产生了正的磁化率。然而，在顺磁材料中，各

个原子磁矩之间的耦合是相对比较弱的。

铁磁材料具有自发磁化的磁畴。在材料的磁畴($10^{-10}\,m^3$ 大小)中，原子之间相互平行地排列(在一个磁畴中原子数约为 10^{10} 数量级)。磁畴随机取向，但在外场作用下它们会有序地排列。像铁、镍和钴都是铁磁性材料。相对磁导率的数量级为 3000。它们具有非线性、剩磁和磁滞。软磁性材料具有较窄的磁滞回路，因此它们比较容易被磁化及退磁。一般来说，铁磁性材料从本质上看就是金属，在微波频段其低电阻会引起较高的涡流损耗。涡流损耗与频率的平方和样本厚度的立方成比例。应用薄片层叠可以减小涡流损耗。在微波频段，对于真空烧结的 100～10000Å 数量级的铁磁薄片，损耗仍然较大。

当与铁的电阻率 $10^{-7}\,\Omega\cdot m$ 相比时，像铁氧体或石榴石这一类铁磁性材料，具有高达 $10^{7}\,\Omega\cdot m$ 的高电阻率。这种材料是高电阻率金属氧化物的一种混合体。它们具有较低的磁化强度，不适合于要求高磁通密度的应用场合，例如，在电力变压器中就不使用这类铁磁性材料。它们在微波频段非常有用。不像铁磁材料，它们会产生高电阻特性，因为铁氧体材料中的成分都是金属和氧离子，它们没有可供传导的 3s 或 4s 自由电子。在静磁场中，铁氧体相当于一种各向异性的磁性材料。附录 12B 将讨论在这种材料中波的传播。

参考文献

1. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
2. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965.
3. Ishimaru, A., *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*, Prentice-Hall, Englewood Clifts, NJ, 1991.
4. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, NY, 1994.
5. Neelakanta, P. S., *Handbook of Electromagnetic Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
6. Soohoo, R. F., *Microwave Magnetics*, Harper & Row, New York, NY, 1985.
7. Kadin, A. M., *Introduction to Superconducting Circuits*, Wiley, New York, NY, 1999.

第9章

人工电磁材料[⊖]

随着材料科学与工程的进步，人们有望制作或构造具有所期望特性的材料。因此，也激励着电磁理论学家提出针对特定应用所希望的电磁特性，即便它们在自然界中还不存在。

本章介绍一些人工电磁材料及其参考文献。附录1D论述在构造称作“忆阻器”的基本器件方面的最新成就。然而，本章将介绍一些比“忆阻器”发展还要更好的人工材料。

9.1 人工电介质和等离子体模拟

实际固体电介质的相对介电常数大于1。与自由空间不同，因为它们可以极化。8.1节讨论过电介质的电磁模型。这个模型给出了构造人工材料的方法。

我们考虑一由呈点阵分布的一系列金属小球所构成的平板材料[1]。小球的半径为 a。如图9.1所示，当小球被置入电场中时，小球将被极化，其电偶极矩由下式给出：

$$\boldsymbol{p} = p\hat{z} = \hat{z}qd \tag{9.1}$$

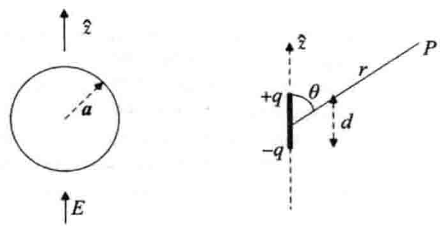
若注意到在球表面 $r=a$ 处总电压必须为0，就可以得到 p 的表达式。

由电偶极子在 P 点产生的电位 V_d 为

$$V_d = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{9.2}$$

而由外电场 $\boldsymbol{E}$ 在 P 点处产生的电位 V_0 为

$$V_0 = -Er\cos\theta \tag{9.3}$$



a）外电场存在时在晶格中的单个金属球体　　b）等效电偶极子

图9.1　金属球体及其等效电偶极子

在 $r=a$ 处，V_d 和 V_0 之和必须为0。因此，

$$-Ea\cos\theta + \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0 \tag{9.4}$$

由式(9.4)，可得

$$\frac{qd}{E} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \tag{9.5}$$

假设每立方米中有 N 个球。电极化强度 $P=Np=Nqd$，且电极化率 $\chi_e = P/\varepsilon_0 E$ 为 $Nqd/\varepsilon_0 E$。相对介电常数 $\varepsilon_r = 1+\chi_e$ 为

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi Na^3 \tag{9.6}$$

如果以小球体积 ν_s 来表示，有

$$\varepsilon_r = 1 + 3\nu_s N \tag{9.7}$$

注意，因为假设小球体间没有相互作用，所以上述推导是近似的。在这个假设下，可以证明当小球互相接触时 ε_r 的最大值是2.57[1]。

⊖ 第9章的附录参见附录9A～9B。

9.1.1 一维人工电介质

如图 9.2 所示，用一系列金属棒可建立一维人工电介质。

平面波沿 z 轴方向传播，电场沿 y 轴方向，长度为 l 的金属棒的轴线与电场平行。棒在 z 轴方向的均匀间隔为 b_1，而在 x 轴方向的均匀间隔为 b_2(称作网格步距)。

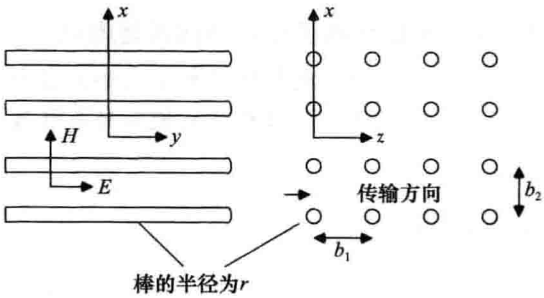


图 9.2 加载金属棒媒质作为人工电介质

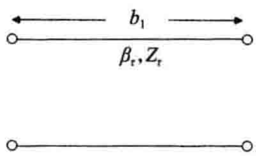


图 9.3 加载金属棒媒质的等效传输线模型

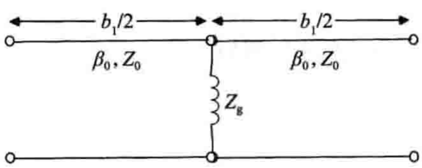


图 9.4 图 9.2 中周期媒质的等效电路

应用 $ABCD$ 参数可以计算图 9.3 中所示的等效传输线的特性阻抗 Z_r 和传播系数 ε_r[2]。如图 9.4 所示，等效电路由两段长度均为 $b_1/2$ 的同一种传输线级联构成，在这两段传输线连接处并联一个称为网格阻抗 Z_g 的元件，传输线的参数为 β_0 和 Z_0(β_0，Z_0 为空气媒质的参数)。

许多研究者提出了具有不同精度的网格阻抗 Z_g 计算公式，文献[3]总结了有关的研究结果。应用一种非常简单的模型，可以证明

$$Z_g = \mathrm{j}Z_0 \frac{b_2}{\lambda}\ln\frac{b_2}{2\pi r} \tag{9.8}$$

式中，r 是金属棒的半径，λ 是波长。假设 $r<b\ll\lambda$ 且金属棒是理想的($\sigma=\infty$)。

根据 7.3 节，一段长度为 $b_1/2$ 的传输线的 A、B、C 和 D 参数是

$$A_1 = D_1 = \cos\beta_0\frac{b_1}{2} \tag{9.9a}$$

$$B_1 = \mathrm{j}Z_0\sin\beta_0\frac{b_1}{2} \tag{9.9b}$$

$$C_1 = \frac{\mathrm{j}}{Z_0}\sin\beta_0\frac{b_1}{2} \tag{9.9c}$$

对于并联元件，有

$$A_2 = D_2 = 1 \tag{9.10a}$$

$$B_2 = 0 \tag{9.10b}$$

$$C_2 = \frac{1}{Z_g} \tag{9.10c}$$

由式(9.11)，可以得到 3 个串联二端口网络的总 $ABCD$ 参数是

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{9.11}$$

因此

$$A = D = \cos\beta_0 b_1 + \mathrm{j}\frac{Z_0}{2Z_g}\sin\beta_0 b_1 \tag{9.12a}$$

$$B = \mathrm{j}Z_0\sin\beta_0 b_1 + \mathrm{j}\frac{Z_0^2}{2Z_g}(1+\cos\beta_0 b_1) \tag{9.12b}$$

$$C = \frac{\mathrm{j}}{Z_0}\sin\beta_0 b_1 + \frac{1}{2Z_g}(1+\cos\beta_0 b_1) \tag{9.12c}$$

用图 9.3 中等效传输线的参数 β_r、Z_r 和 b_1 可以来表示参数 A：

$$A = \cos\beta_r b \tag{9.13}$$

让式(9.12)和式(9.13)相等，我们得到色散关系为

$$\cos\beta_r b_1 = \cos\beta_0 b_1 + \frac{jZ_0}{2Z_g}\sin\beta_0 b_1 \tag{9.14}$$

9.1.2 无损等离子体媒质的实验模拟

在这一节中，我们将检验空气中的这种一维媒质是否可以模拟等离子体媒质。

一无碰撞等离子体媒质的相对介电常数 ε_p 为

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

和相位常数为

$$\beta_p = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_p}$$

以及当 $\omega=\omega_p$时，$\beta_p=\beta_r$ 等于 0。在 $\omega=\omega_p$时，将 $\beta_p=\beta_r=0$ 代入式(9.14)中，有

$$1 = \cos\beta_0 b_1 + \frac{jZ_0}{2Z_g}\sin\beta_0 b_1 \tag{9.15}$$

条件 $\omega=\omega_p$给出

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_p} \tag{9.16a}$$

$$\lambda_p = \frac{c}{f_p} = \frac{2\pi c}{\omega_p} \tag{9.16b}$$

方程式(9.15)可以写为

$$1 = \cos\frac{2\pi}{\lambda_p}b_1 + \frac{jZ_0}{2Z_g}\sin\frac{2\pi}{\lambda_p}b_1 \tag{9.17a}$$

式中

$$Z_g = jZ_0\frac{b_2}{\lambda_p}\ln\frac{b_2}{2\pi r} \tag{9.17b}$$

式(9.17)是一个超越方程，求其解可以得到最大波长 λ_p，反过来由它能计算出人工电介质的等效等离子体频率。在对式(9.17)进行数值求解时，为了进行迭代，需要一个近似的初值。如果假设

$$\frac{2\pi b_1}{\lambda_p} = \theta \ll 1 \tag{9.18}$$

并且取近似 $\sin\theta\approx\theta$ 和 $\cos\theta\approx 1-\theta^2/2$，则可以得到

$$\frac{2\pi b_1}{\lambda_p} = \theta = j\frac{Z_0}{Z_g} = \frac{1}{(b_2/\lambda_p)\ln(b_2/2\pi r)}$$
$$\lambda_p^2 = 2\pi b_1 b_2\ln\frac{b_2}{2\pi r} \tag{9.19a}$$

$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c^2}{b_1 b_2\ln(b_2/2\pi r)} \tag{9.19b}$$

如果 $b_1=b_2=b$，有

$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c^2}{b^2\ln(b/2\pi r)} \tag{9.20}$$

Pendry[4]得到

$$\omega_{\mathrm{p}}^{2}=\frac{2\pi c^{2}}{b^{2}\ln(b/r)} \tag{9.21}$$

该式与式(9.20)的不同在于在对数中少了一个因子 2π。

利用铜导线已经模拟了无损耗各向同性等离子体媒质[5]，实验参数为 $r=0.0032''$ 和 $b_1=b_2=0.3''$。使用式(9.19)作为初值，对式(9.17)进行数值求解。对于所选择的金属棒加载介质，求得等效等离子频率 $f_{\mathrm{p}}=7.92\mathrm{GHz}$。这一结果的实验验证是通过在波导中使用这种金属棒加载介质进行的，并且与波导中 β 和 f 的关系做了比较。理论和实验结果非常吻合[5]。

9.1.3 有损等离子体媒质实验模拟

如果使用镍铬合金导线来替代铜导线，就可以模拟有损等离子体媒质。文献[5]给出了计算这种介质的等效等离子体频率 f_{p} 和碰撞频率 ν 的理论。镍铬合金导线的直径为 $0.003''$。计算结果表明，$f_{\mathrm{p}}=7.62\mathrm{GHz}$，碰撞频率 $\nu/2\pi=0.42\mathrm{GHz}$。对于波导中填充加载镍铬合金导线媒质的情况，其衰减常数 α 和相位常数 β 的实验测量结果与波导中填充等效有损等离子体的理论计算结果相一致[5]。

9.1.4 加载带状介质的等离子体实验模拟

Dikshitulu 等人[6]使用带状介质而非杆状介质进行了等离子体实验模拟。与杆状介质相比，带状介质有一个额外的可供调整参数(带状介质的方位角)，在一定程度上可以用来模拟各向异性等离子体。

9.1.5 热等离子体媒质实验模拟

Collins[8]使用层叠状介质薄层模拟单轴各向异性介质。如图 9.5 所示，交替分布薄层电介质的介电常数分别为 ε_a 和 ε_b，相应的厚度分别为 t 和 d。Collins[8]已经证明，层叠状人工电介质薄层可以模拟单轴各向异性电介质媒质，主轴沿 x、y 和 z 方向，介电张量为

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_1(\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y})+\varepsilon_2\hat{z}\hat{z} \tag{9.22a}$$

式中

$$\varepsilon_1=\varepsilon_b+(\varepsilon_a-\varepsilon_b)\frac{t}{S} \tag{9.22b}$$

$$\varepsilon_2=\left[\frac{1}{\varepsilon_b}-\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_b}{\varepsilon_a\varepsilon_b}\frac{t}{S}\right]^{-1} \tag{9.22c}$$

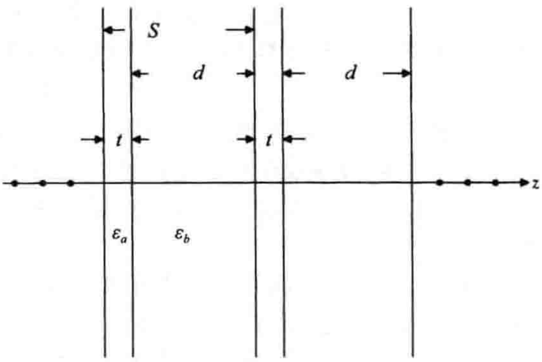


图 9.5 堆叠的介质薄层

在 k_0S 满足下述不等式的范围内，上述表达式是精确的[8]。

$$k_0S<2\pi\sqrt{\varepsilon} \tag{9.23}$$

式中，ε 是 ε_a 和 ε_b 中的较大者。

11 章将讨论波在热等离子体中的传播，热等离子体的相对介电常数张量 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K}=K_{xx}(\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y})+K_{zz}\hat{z}\hat{z} \tag{9.24a}$$

式中

$$K_{xx}=1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^{2}}{\omega^{2}} \tag{9.24b}$$

$$K_{zz}=1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^{2}}{\omega^{2}+a^{2}\gamma^{2}} \tag{9.24c}$$

a 是表示等离子体平均温度的声速。因为介电常数和传播常数 γ 都是 ω 的函数，所以热等

离子体同时在时间和空间上都是色散媒质。

比较式(9.22)和式(9.24)表明，热等离子体可以用两种加载金属棒介质来模拟，第一个模拟

$$\varepsilon_a = 1 - \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \tag{9.25a}$$

$$\varepsilon_b = 1 - \frac{\omega_{pb}^2}{\omega^2} \tag{9.25b}$$

Dikshitulu 等人[7]给出了加载金属棒介质的一个设计范例。对于选定的 9.45GHz 的工作频率，两种加载金属棒介质具有如下参数：

介质 a：$r=0.0022\text{in}$，$b=0.7\text{cm}$

介质 b：$r=0.0024\text{in}$，$b=0.7\text{cm}$

在这种排列方式下，等离子体频率 $f_p=9.154\text{GHz}$，且声速 $a=8.515\times10^9\text{cm/s}$。这种人工介质被用于模拟热等离子体平板，并且实验测量了喇叭天线的 E 和 H 平面辐射模式[9]。文献[7]中的理论和实验结果非常吻合。文献[7]给出了细节，这些细节也列于附录 9A 中。

9.1.6 人工电介质的深入理论

有关人工电介质的深入研究见参考文献[10]。它提出了包括球体、圆盘、带状和杆状结构介质的精确理论。

9.2 左手材料[11]

本节研究的材料[11]不同于 9.3 节讨论的左手手性材料。下面解释限定词“左手”。

2.1 节讨论了均匀平面波在无源各向同性媒质中的传播。可以看到，在右手坐标系下，沿电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 和传播方向 $\boldsymbol{k}$ 的各个单位矢量是相互正交的：

$$\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{k}}$$

与称作“左手材料”的人工材料[11~18]相反，认为这种材料是一种右手材料。在这种人工材料中，$\hat{\boldsymbol{E}}$、$\hat{\boldsymbol{H}}$和$\hat{\boldsymbol{k}}$在左手坐标系中是相互正交的。波传播方向与右手材料中波传播方向的意义相反。有些作者喜欢将“左手材料”命名为一种“负相速”(NPV，Negative Phase Velocity)介质。

这样一种性质出现在具有负介电常数 ε 和负磁导率 μ 的人工介质中。在这个意义上，有些作者更喜欢称它为“双负”(Double Negative，DNG)介质。有些作者也称这种介质另一个名字，“Veselago”介质，为了纪念 1968 年在一篇开创性的论文[12]中研究这种介质特性的科学家。Caloz 和 Itoh 采用传输线模拟，通过工程化方法解释了超材料[11]。本节的写作严格按照 Caloz 和 Itoh 的方法[11]。

考虑一段传输线，图 9.6 给出了传输线的一个微元段的等效电路。

稍后就会理解使用下标 R 和 L 的原因。

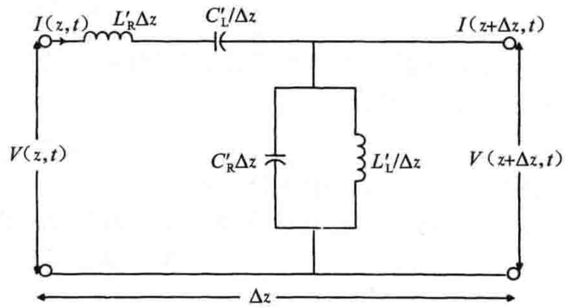


图 9.6 人工传输线的电路表示

按照 2.7 节中的方法，我们得到关于电压和电流的偏微分方程(Partical Differential Equation，PDE)：

$$-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = L_R' \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{C_L'}\int I(z,t)\,dt \tag{9.26}$$

$$-\frac{\partial I(z,t)}{\partial z}=C'_{\mathrm{R}}\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}+\frac{1}{L'_{\mathrm{L}}}\int V(z,t)\mathrm{d}t \tag{9.27}$$

从式(9.26)和式(9.27)中，消去 I 可以得到电压满足的 4 阶偏微分方程。在联立求解方程式(9.26)和方程式(9.27)时，用 p 替换 $\partial/\partial z$，用 s 替换 $\partial/\partial t$ 将是有益的。注意，$\int f\mathrm{d}t$ 可以被替换为 f/s，其中 f 代表 I 或 V。因此，由式(9.27)，得到

$$I=-\left(C'_{\mathrm{R}}s+\frac{1}{L'_{\mathrm{L}}s}\right)\frac{V}{p} \tag{9.28}$$

写为算子形式，式(9.26)变为

$$pV=-\left(L'_{\mathrm{R}}s+\frac{1}{C'_{\mathrm{L}}s}\right)I \tag{9.29}$$

为消去 I，将式(9.28)代入式(9.29)中并化简，得到

$$p^2s^2V-L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{R}}s^4V-\left(\frac{L'_{\mathrm{R}}}{L'_{\mathrm{L}}}+\frac{C'_{\mathrm{R}}}{C'_{\mathrm{L}}}\right)s^2V-\frac{1}{C'_{\mathrm{L}}L'_{\mathrm{L}}}V=0 \tag{9.30}$$

回到微分形式，与式(9.30)相应的电压偏微分方程：

$$\frac{\partial^4V(z,t)}{\partial z^2\partial t^2}-L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{R}}\frac{\partial^4V(z,t)}{\partial t^4}-\left(\frac{L'_{\mathrm{R}}}{L'_{\mathrm{L}}}+\frac{C'_{\mathrm{R}}}{C'_{\mathrm{L}}}\right)\frac{\partial^2V(z,t)}{\partial t^2}-\frac{1}{C'_{\mathrm{L}}L'_{\mathrm{L}}}V=0 \tag{9.31}$$

对于时间和空间上的时谐波变化，有

$$V(z,t)=V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)} \tag{9.32}$$

我们得到下面的色散关系：

$$\omega^2k^2-L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{R}}\omega^4+\left(\frac{L'_{\mathrm{R}}}{L'_{\mathrm{L}}}+\frac{C'_{\mathrm{R}}}{C'_{\mathrm{L}}}\right)\omega^2-\frac{1}{C'_{\mathrm{L}}L'_{\mathrm{L}}}=0 \tag{9.33}$$

在 ω-k 平面上按式(9.33)进行计算，就可以得到 ω-k 图。将 $k=0$ 代入式(9.33)中，得到与 ω 轴的交点所满足的方程如下：

$$\omega^4-\left(\frac{1}{L'_{\mathrm{L}}C'_{\mathrm{R}}}+\frac{1}{L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{L}}}\right)\omega^2-\frac{1}{L'_{\mathrm{L}}C'_{\mathrm{L}}L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{R}}}=0\quad(k=0) \tag{9.34}$$

让

$$\omega_{\mathrm{se}}=\frac{1}{\sqrt{L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{L}}}}\quad(\mathrm{rad/s}) \tag{9.35a}$$

$$\omega_{\mathrm{sh}}=\frac{1}{\sqrt{L'_{\mathrm{L}}C'_{\mathrm{R}}}}\quad(\mathrm{rad/s}) \tag{9.35b}$$

$$\omega'_{\mathrm{L}}=\frac{1}{\sqrt{L'_{\mathrm{L}}C'_{\mathrm{L}}}}\quad(\mathrm{rad/ms}) \tag{9.35c}$$

$$\omega'_{\mathrm{R}}=\frac{1}{\sqrt{L'_{\mathrm{R}}C'_{\mathrm{R}}}}\quad(\mathrm{radm/s}) \tag{9.35d}$$

注意

$$\omega_{\mathrm{se}}\omega_{\mathrm{sh}}=\omega_{\mathrm{L}}\omega_{\mathrm{R}} \tag{9.35e}$$

可以将式(9.34)写为下式形式：

$$(\omega^2-\omega_{\mathrm{sh}}^2)(\omega^2-\omega_{\mathrm{se}}^2)=0 \tag{9.36}$$

因此，与 ω 轴的交点为 $\omega=\pm\omega_{\mathrm{sh}}$ 和 $\omega=\pm\omega_{\mathrm{se}}$。假设 $\omega_{\mathrm{se}}<\omega_{\mathrm{sh}}$，图 9.7 给出了完整的 ω-k图。

下面解释图 9.7 中的下标 LH 和 RH，上标“+”和“−”。

上标“+”表示正的群速度(ω-k 曲线的正斜率)，反过来这也意味着能量沿正 z 轴方向流动。上标“−”表示负的群速度，反过来这也意味着能量沿负 z 轴方向流动。下标 RH 表示相速度与群速度具有相同的符号，它是称为右手材料的各向同性常规材料的一般特性。

下标 LH 表示相速度和群速度具有相反的符号，这是称为左手材料的非寻常材料的特性。在 LH 的情况中，功率流动的方向和相位传播的方向彼此相反。

如果 $\omega_{se}>\omega_{sh}$，则 ω-k 图仍为图 9.7，但只是 ω_{se} 与 ω_{sh} 互换。如果 $\omega_{se}=\omega_{sh}$，称为平衡模型，那么 ω-k 图退化为如图 9.8 所示的一个简单图形。

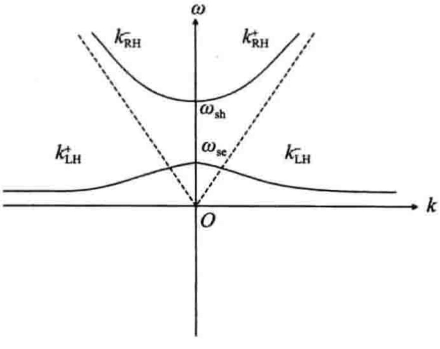


图 9.7 人工传输线(图 9.6)的 ω-k 图

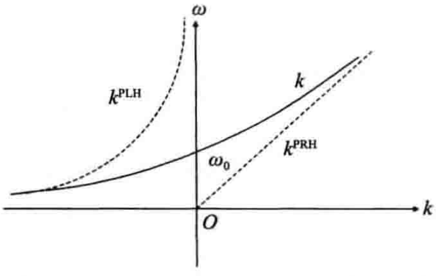


图 9.8 平衡传输线模型(图 9.6)的 ω-k 图。$\omega_0=\omega_{se}=\omega_{sh}$。虚线为 PLH 系统，实线为 PRH 系统

让 $C_L'=\infty$ 并且 $L_L'=\infty$，可以得到纯右手系统，在这种情况中传输线与 2.7 节和 2.8 节讨论过的理想传输线相同。在图 9.8 中用虚线示出了 ω-k 图，并且标记为 k^{PRH}。在 $L_R'=0$ 和 $C_R'=0$ 的对偶情况下，图 9.6 将退化为图 9.9，图 9.9 是纯左手(PLH)材料的传输线模拟。在图 9.8 中用虚线示出了其色散关系，并标记为 k^{PLH}。

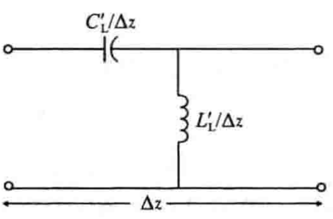


图 9.9 PLH 材料的传输线模拟

例 9.1

如图 9.6 所示，在传输线的等效电路中，对于长度 Δz，假设

$$L_L'=C_L'=L_R'=C_R'=1$$

a) 画出 ω-k 图。

b) 如果 $\omega=0.8$，试求(i)相速度 V_p，(ii)群速度 V_g，(iii)波长 λ。

c) 如果 $\omega=1$，重复(b)。

d) 如果 $\omega=1.1$，重复(b)。

解

a) 根据式(9.33)，色散关系由下式给出：

$$\omega^2k^2+2\omega^2-1-\omega^4=0 \tag{9.37}$$

根据式(9.35a)和式(9.35b)，可得，

$$\omega_{se}=1 \tag{9.38}$$

$$\omega_{sh}=1 \tag{9.39}$$

这是一个平衡传输线。

由式(9.37)，有

$$\omega^2k^2=\omega^4-2\omega^2+1=(\omega^2-1)^2$$

$$k^2=\left(\frac{\omega^2-1}{\omega}\right)^2=\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)^2$$

$$k=\pm\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \pm\frac{\omega}{\omega - 1/\omega} = \pm\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} \tag{9.40}$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \pm\frac{d}{d\omega}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \pm\frac{\omega^2 + 1}{\omega^2}$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm\frac{\omega^2}{\omega^2 + 1} \tag{9.41}$$

在 V_p 和 V_g 的表达式中，下边的符号与 ω 的负值对应。在图 9.8 中用实线画出了 ω-k 图，其中 $\omega_0 = 1$。

b）由式(9.40)和式(9.41)，有

i）$\omega = 0.8$，$V_p = \left.\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1}\right|_{\omega=0.8} = -1.78$

ii）$V_p = \left.\frac{\omega^2}{\omega^2 + 1}\right|_{\omega=0.8} = 0.39$

iii）$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = \left.\frac{2\pi}{\omega - \frac{1}{\omega}}\right|_{\omega=0.8} = 1.78$

c）$\omega = 1.0''$

$$V_p = \infty,\quad V_g = \frac{1}{2},\quad \lambda = \infty$$

d）$\omega = 1.1$

$$V_p = 5.76,\quad V_g = 0.548,\quad \lambda = 32.91$$

从这个例子中我们看到，当 $\omega < \omega_0$ 时平衡传输线像一种 PLH 材料；当 $\omega > \omega_0$ 时平衡传输线像一种 PRH 材料。在 $\omega \approx \omega_0$ 邻域的两边，平衡传输线的性质完全不同。◀

9.2.1 左手材料的电磁特性

为了得到式(9.26)和式(9.27)形式的媒质的等效电磁参数 ε_r 与 μ_r，让我们回到传输线模拟。我们将考虑一个 $\hat{\boldsymbol{E}} = \hat{y}$ 和 $\hat{\boldsymbol{H}} = -\hat{x}$ 的 TEM 正弦波。由麦克斯韦方程，得到

$$\frac{d\,\widetilde{E}_y}{dz} = -j\omega\mu H_x \tag{9.42}$$

$$\frac{d\,\widetilde{H}_x}{dz} = -j\omega\varepsilon E_y \tag{9.43}$$

而由式(9.26)和式(9.27)，得到相量 $\widetilde{V}$ 和 $\widetilde{I}$ 分别满足

$$-\frac{\partial\,\widetilde{V}}{\partial z} = \left(j\omega L'_R + \frac{1}{j\omega C'_L}\right)\widetilde{I} \tag{9.44}$$

$$-\frac{\partial\,\widetilde{I}}{\partial z} = \left(j\omega C'_R + \frac{1}{j\omega L'_L}\right)\widetilde{V} \tag{9.45}$$

对比式(9.42)与式(9.44)可知，$\widetilde{E}_y$ 与 $\widetilde{V}$ 相似，$\widetilde{H}_x$ 与 $\widetilde{I}$ 相似，得到如下等效关系

$$\mu(\omega) = L'_R + \frac{1}{\omega^2 C'_L} \tag{9.46}$$

$$\varepsilon(\omega) = C'_R + \frac{1}{\omega^2 L'_L} \tag{9.47}$$

注意，因为 μ 和 ε 是高度色散的，所以媒质是色散的。

相对介电常数 ε_r 和相对磁导率 μ_r 分别为

$$\mu_r = \frac{L'_R}{\mu_0}\left(1 - \frac{\omega_{se}^2}{\omega^2}\right) \tag{9.48}$$

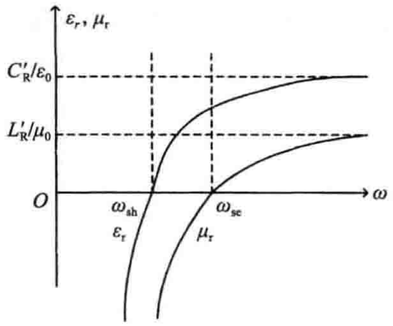
$$\varepsilon_r = \frac{C'_R}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\omega_{sh}^2}{\omega^2}\right) \tag{9.49}$$

式中，ω_{se}和ω_{sh}分别由式(9.35a)与式(9.35b)给出。

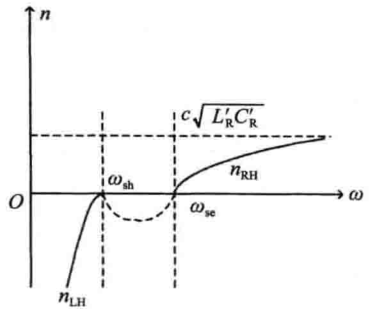
图9.10a中画出了ε_r和μ_r随频率ω变化的曲线，图9.10b中画出了折射系数n的曲线。折射系数定义为

$$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \tag{9.50}$$

注意，图9.10揭示了如下几个有趣的特性：



a) ε_r和μ_r的频率特性



b) 折射率n的频率特性

图9.10 当$\omega_{sh}<\omega_{se}$时

1) 当忽略碰撞时，ε_r的变化曲线与8.1节中由式(9.33)给出的纯金属的ε_p的变化曲线相似。ω_{sh}扮演ω_p的角色。当$\omega<\omega_{sh}$时ε_r是负的。也许由$\omega<\omega_{sh}$的电磁波所激发的金属可能是具有负ε_r的材料。金属中的电子密度很高，因此其等离子体频率处于紫外频段。在微波频段，ε_r是较大的负值，金属的行为像是由电子碰撞支撑的良导体，我们通常将其视作电导率由式(8.27)给出的一种良导体，而不是在截止区的一种等离子体(见图8.7)。Pendry等人[14,15]使用一种有趣的方法计算了由细导线组成的金属系统的等离子体频率。应用在9.1节中讨论的用金属棒加载介质近似模拟等离子体的更为详细的计算方法，也能得到相同的结果。

2) 到目前为止，我们尚未讨论过图9.10中具有变化μ_r的材料。1999年，Pendry等人[16]提出使用方形阵列中的开口圆环结构来构建这种材料的可能性。

3) 从本节的图9.10中，注意，当$\omega<\omega_{sh}$且$\omega<\omega_{se}$时，ε_r和μ_r都是负的，折射系数n也是负的。在这种情况下，材料为左手材料。Smith等人[13]构建了这种人工材料，实验结果表明这种材料展现了左手材料的特性。实验是在微波频段进行的。

4) 在$\omega_{sh}<\omega<\omega_{se}$的频率范围内，$\varepsilon_r$是正的，但$\mu_r$是负的，折射系数是虚数，电磁波是倏逝波。由于负的$\mu_r$，频带是一个阻带，因此带隙称作磁隙。在$\omega_{se}<\omega<\omega_{sh}$的情况下，带隙称为电隙。

$\varepsilon_r(\mu_r)$为负值并不意味储存的电场能(磁场能)是负的。我们已经注意到，材料是色散的，在色散媒质中储存的能量的表达式不是由$\varepsilon_0\varepsilon_r E^2/(4\mu_0\mu_r H^2/4)$给出，而是

$$\langle W_e\rangle=\frac{1}{4}\varepsilon_0\frac{\partial(\omega\varepsilon_r)}{\partial\omega}E^2 \tag{9.51}$$

$$\langle W_m\rangle=\frac{1}{4}\mu_0\frac{\partial(\omega\mu_r)}{\partial\omega}H^2 \tag{9.52}$$

将式(9.48)和式(9.49)分别代入式(9.51)与式(9.52)中，得到

$$\langle W_e\rangle=\frac{1}{4}\varepsilon_0\left(C'_R+\frac{1}{\omega^2L'_L}\right)E^2>0 \tag{9.53}$$

$$\langle W_m\rangle=\frac{1}{4}\mu_0\left(L'_R+\frac{1}{\omega^2C'_L}\right)H^2>0 \tag{9.54}$$

折射系数$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$由下式给出

$$n = \frac{c}{\omega_{\mathrm{R}}^{\prime}}\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{se}}^{2}}{\omega^{2}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{sh}}^{2}}{\omega^{2}}\right)^{1/2} \tag{9.55}$$

式(9.50)可以写为另一种形式：

$$n = \frac{sc}{\omega_{\mathrm{R}}^{\prime}}\left|\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{se}}^{2}}{\omega^{2}}\right)\right|^{1/2}\left|\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{sh}}^{2}}{\omega^{2}}\right)\right|^{1/2} \tag{9.56}$$

式中

$$s = \begin{cases} 1, & \omega > \omega_{\mathrm{sh}} \text{且} \omega > \omega_{\mathrm{se}} \\ -1, & \omega > \omega_{\mathrm{sh}} \text{且} \omega > \omega_{\mathrm{se}} \\ -\mathrm{j}, & \text{其他} \end{cases} \tag{9.57}$$

在图 9.10b 中画出了式(9.56)所表示的曲线。其中的折线表示倏逝波。n_{LH}是负的，因此 LH 材料的另一个名字是 NPV 材料。

9.2.2 边界条件、反射和透射

即使有一种媒质或两种媒质都是左手材料(LHM)，边界条件(式(1.14)～式(1.17))仍然是成立的，因为这些边界条件由麦克斯韦方程推导出来。如果 ρ_s 和 $\boldsymbol{K}$ 为 0，那么边界条件为

$$D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}} \tag{9.58}$$

$$B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}} \tag{9.59}$$

$$E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}} \tag{9.60}$$

$$H_{1\mathrm{t}} = H_{2\mathrm{t}} \tag{9.61}$$

式中，下标 n 代表法向分量，t 代表切向分量。对于媒质 2 为 LHM，媒质 1 为 RHM 的特定情况，因为 μ_2 和 ε_2 都是负的，所以有

$$E_{1\mathrm{n}} = -\frac{|\varepsilon_2|}{\varepsilon_1}E_{2\mathrm{n}} \tag{9.62}$$

$$H_{1\mathrm{n}} = -\frac{|\mu_2|}{\mu_1}H_{2\mathrm{n}} \tag{9.63}$$

通过分别考虑电磁参数的符号可以来研究更为一般的情况，并写出

$$s_1|\varepsilon_1|E_{1\mathrm{n}} = s_2|\varepsilon_2|E_{2\mathrm{n}} \tag{9.64}$$

$$s_1|\mu_1|H_{1\mathrm{n}} = s_2|\mu_2|H_{2\mathrm{n}} \tag{9.65}$$

式中，s_1 和 s_2 分别是+1 或−1，取决于媒质是 RH 还是 LH。在图 9.11 中比较了穿过两种媒质分界面的透射特性。

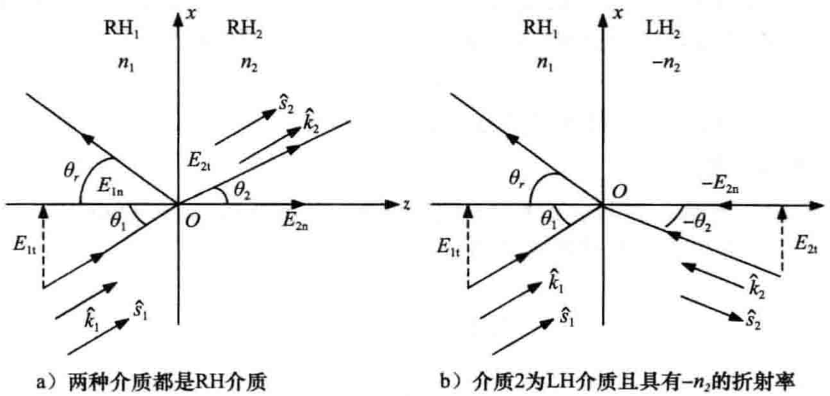


图 9.11　介质分界面的透射现象

对于图 9.11a 和图 9.11b，斯涅尔定律的第一部分

$$\theta_i = \theta_1 = \theta_r \tag{9.66}$$

是相同的，但是对于 RH-LH 分界面，斯涅尔定律的第二部分是

$$n_1 \sin\theta_i = - n_2 \sin\theta_t \tag{9.67}$$

因此，对于 RH-LH 分界面的情况，θ_t 是($-\theta_2$)，如图 9.11b 所示。据此，我们可以推广斯涅尔定律为

$$s_1 |n_1| \sin\theta_i = s_1 |n_1| \sin\theta_r = s_2 |n_2| \sin\theta_t \tag{9.68}$$

图 9.12 表明，一个由 RH、LH 和 RH 所组成的"平面透镜"，如果三层媒质具有相同大小的 n，则可以聚焦与重聚焦。

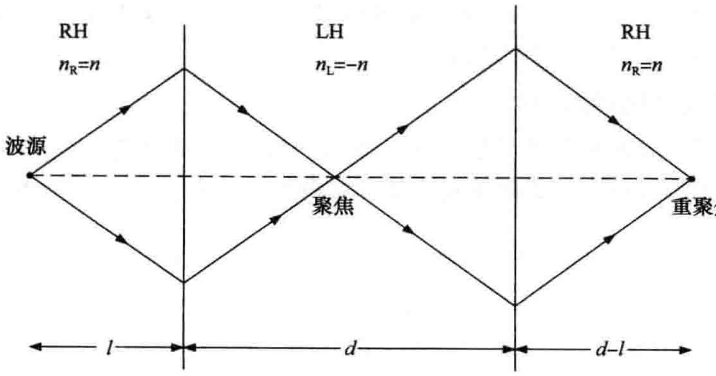


图 9.12 如果三层介质具有相同大小的折射率，从波源发出的两条对称射线会聚焦和重聚焦(图片经 Caloz and Itoh 许可转载，*Electromagnetics metamaterials*，p. 47. Copyright Wiley)

如果 $|n_L| \neq |n_R|$，则不会形成一个纯焦点，并且焦点会变得发散[11]。而且，本征阻抗也满足条件

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \tag{9.69}$$

不存在反射。仅当满足以下条件时

$$\varepsilon_1 = |\varepsilon_2| \tag{9.70}$$

$$\mu_1 = |\mu_2| \tag{9.71}$$

这种现象才会出现。这个条件显然很难达到，对于平面透镜来说，除了在一个极狭窄的频带内，甚至才有近似满足的可能性。

Pendry[20]讨论过 LH 材料可以克服传统光学中衍射限制的现象。从理论上，他证明了一块 LH 材料板可以克服衍射限制(分辨率受波长限制)，只要选择

$$\varepsilon_r = \mu_r = -1$$

Caloz 和 Itoh[11]讨论过 LH 材料板对倏逝波的放大作用。

9.2.3 人工左手材料

Pendry 等人[14]证明，周期 p 远小于波长的细长金属导线阵列可以构成一种具有负 ε 和正 μ 的材料。这种人工等离子体型结构有

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{p^2 \ln p/a}}, \quad p \ll \lambda \tag{9.72}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_0 (p\omega_{pe}/a)^2}{\pi\sigma} \tag{9.73}$$

在上式中，p 是单元尺寸，ω_{pe}是等离子频率，对于实等离子体由式(8.22)给出，a 是

电导率为σ的金属细导线的半径，ν是碰撞频率。导线长度视作无穷大($a \ll l$)(见图9.13)。

假设电场沿z轴方向，导线很细并且很长($a \ll l$)、$p \ll \lambda$，并且半径$a \ll p \ll l$，可以导出式(9.72)和式(9.73)。限制条件$p \ll \lambda$相当于说，可以使用图9.6($\Delta z \sim p$)中的微元模型。如果选取的结构有下面的数据参数：

$$a = 1.0 \times 10^{-6}\,\text{m} \tag{9.74}$$

$$p = 5\,\text{mm} \tag{9.75}$$

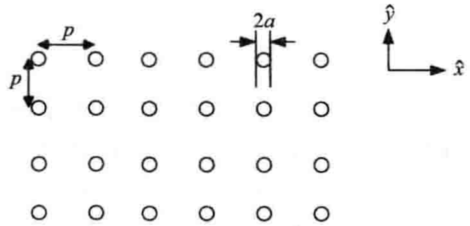


图9.13 细线等离子体结构的横截面

导线材料是铝($N = 1.806 \times 10^{29}/\text{m}^3$)，则实验结果是等离子体频率$f_{pe} = 8.3\text{GHz}$。如果我们将上面给出的$N$代入式(8.22)中，我们可能已经得到的等离子体频率在紫外频段。Pendry已经证明，该结构的等离子体频率的降低是由于电子被限制在沿细线运动所造成的。因为只有在一部分空间中填充有金属，所以有效电子密度N_{eff}为

$$N_{eff} = N\frac{\pi a^2}{p^2} \tag{9.76}$$

在由导线电流所产生的磁场中，电子会受到附加的动量。通过考虑电子质量的有效值m_{eff}，可以计及这个附加动量的效应，电子有效质量m_{eff}为

$$m_{eff} = \frac{\mu_0 q^2 \pi a^2 N}{2\pi}\ln\frac{p}{r} \tag{9.77}$$

利用电子密度和电子质量的有效值，得到等离子体频率为

$$\omega_{pe} = \frac{N_{eff}^2 q^2}{m_{eff}\varepsilon_0} \tag{9.78}$$

将式(9.76)和式(9.77)代入式(9.78)中，得到式(9.72)。对于式(9.74)和式(9.75)的数据，等离子体频率的计算结果为

$$f_{pe} = 8.2\text{GHz} \tag{9.79}$$

它与实验值接近。

将阵列视作“周期间距的导线栅格或周期间距的带载传输线”也可以得到式(9.72)和式(9.73)[11]。9.1节讨论过这个问题。

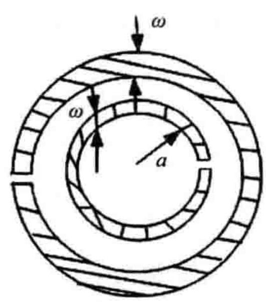
用诸如铜与铝等非磁性导电材料制成的导线结构的磁导率将为μ_0。$l \gg \lambda$的假设意味着导线是在远低于第一个谐振点的频率下激发的。

Pendry等人[16]讨论过一种负μ人工元件，如图9.14所示，它是一个开口金属圆环谐振器(Split-Ring Resonator，SRR)。图9.14a所示为一个SRR元件，而图9.14b为其阵列结构。

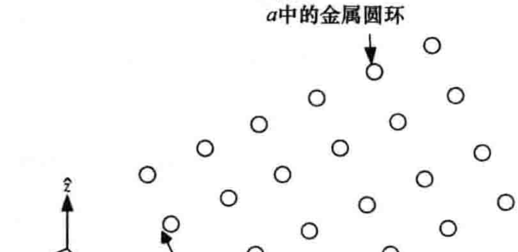
这种结构由一个与圆环平面垂直的磁场激励。这种结构表现出等离子型的磁导率函数，由下式给出(忽略损耗)[16,11]：

$$\mu_r(w) = 1 - \frac{Fw^2}{w^2 - w_{om}^2} \tag{9.80}$$

式中



a）SRR单元



b）SRR结构

图9.14 负μ谐振结构

$$F = \pi\left(\frac{a}{p}\right)^2 \tag{9.81}$$

$$w_{om} = c\sqrt{\frac{3p}{\pi\ln(2wa^3/8)}} \tag{9.82}$$

在上式中，p 是空间周期，a 是小圆环的内半径，w 是圆环厚度，δ 是内外圆环之间的径向间距，如图 9.14a 中的标注所示。由式(9.80)，注意到，当 $1<w<w_{om}$ 时，$\mu_r>1$，并在 $w=w_{om}$ 时发生谐振($\mu_r=\infty$)，在 $w_{om}<w<w_{pm}$ 内 μ_r 为负值，其中，

$$w_{pm} = \frac{w_{om}}{\sqrt{1-F}} \tag{9.83}$$

由 Smith 等人[13]构建了第一个基于细导线与开口圆环谐振器组合的实验 LH 材料。Kraus 和 Carver 在文献[11]第 8 页的图 1.4a 中给出了这种结构的三维构图，并认为其为一维 LH，因为仅有一个方向允许成对的($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$)：$\varepsilon_{xx}<0$，$1<\omega<\omega_{pe}$；$\mu_{xx}<0$，$\omega_{om}<\omega<\omega_{pm}$(见图 9.15)。

文献[21, 22]探讨了一种微带技术中的平面 LH 结构，它由一系列交指电容器和分流电感构成，在文献[11]中对其进行了总结。

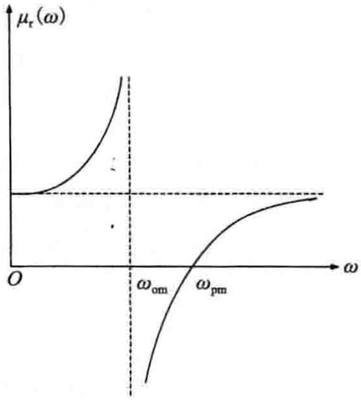


图 9.15 开口圆环谐振结构的 μ_r-w 草图

9.3 手性介质[23,24]

图 9.16 所示为单匝左手和右手螺旋结构的近似模型。近似模型由 x-y 平面内一个半径为 a 的导电圆环和沿该平面法线方向(z 轴)的一段长度为 $2l$ 的导体构成。螺旋结构匝间距(节距)为 $2l$。

假设沿 z 轴有一个时谐入射电场激励 E_0。感应电压为

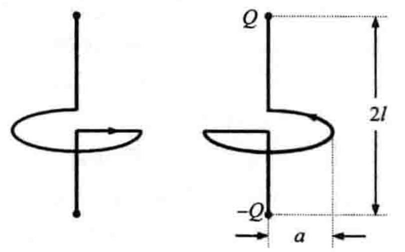
$$\text{emf} = \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 2lE_0 \tag{9.84}$$

电流为

$$I = \frac{\text{emf}}{Z_H} = \frac{2lE_0}{Z_H} \tag{9.85}$$

式中，Z_H 是螺旋结构的阻抗。由电场激发的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_{ee} = \hat{z}\,2lQ = \hat{z}\,2l\frac{I}{j\omega} = \hat{z}\frac{(2l)(2l)E_0}{j\omega Z_H} \tag{9.86}$$



a) 左手 b) 右手

图 9.16 螺旋线回路的近似模型

注意，对于一个时谐场，有

$$Q = \int I dt = \frac{I}{j\omega} \tag{9.87}$$

在这种情况下，由电场激发的磁偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_{me} = \hat{z}\,\pi a^2 I = \hat{z}\,\pi a^2\,\frac{2lE_0}{Z_H} \tag{9.88}$$

下面考虑沿 z 轴方向的时谐磁场激励 $\hat{z}H_0$。根据法拉第定律，有

$$\text{emf} = \int \boldsymbol{E}\cdot dl = \iint_s -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot dS = \hat{z}[-\pi a^2\mu j\omega H_0] \tag{9.89}$$

环路中的感应电流 I 为

$$I = \frac{\text{emf}}{Z_H} = \frac{-\pi a^2\mu j\omega H_0}{Z_H} \tag{9.90}$$

磁场激发的磁偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{mm}} = \hat{z}\,\pi a^2 I = \hat{z}\frac{-\mathrm{j}\omega(\pi a^2)^2\mu H_0}{Z_{\mathrm{H}}} \tag{9.91}$$

磁场激发的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \hat{z}\,Q(2l) = \hat{z}\frac{I}{\mathrm{j}\omega}(2l) = -\hat{z}\frac{\pi a^2\mu(2l)H_0}{Z_{\mathrm{H}}} \tag{9.92}$$

上面对螺线管计算的意义是，为了说明电场激励不仅能产生电偶极矩，同时还能产生磁偶极矩。由于极化强度是单位体积的电偶极矩，而磁化强度是单位体积的磁偶极矩，我们已经证明了在电场激励的条件下，内嵌螺旋结构的材料不仅会被极化，也会被磁化。对于磁场激励的情况，也可以得到类似的结论。这种材料是双各向同性的，其本构关系式是：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} - \mathrm{j}\xi_c\boldsymbol{B} \tag{9.93}$$

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\xi_c\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \tag{9.94}$$

式中，ε 和 μ 分别是媒质的标量介电常数与磁导率，ξ_c 是手征导纳。词语“手性”在希腊语中是偏手性的意思，手性材料包含具有偏手性的基本单元。人工手性介质可以通过在主介质中嵌入一种偏手性的金属螺旋结构来构建(见图 9.17)。螺旋结构的轴线要取向随机，从而就能构造出一种各向同性手性介质。



图 9.17　人工手性介质

Bahr 和 Clansing[24] 给出了某种人工手性材料的详细数据如下。

螺旋回路

n(螺旋密度)$=20\times10^6/\mathrm{m}^3$

a(螺旋回路半径)$=0.625\mathrm{mm}$

b(导线直径)$=0.1524\mathrm{mm}$

$2l$(回路间距)$=0.667\mathrm{mm}$

N(螺旋回路中的匝数)$=3$

非手性主材料

硅橡胶：7GHz 时的本构参数。

$\mu_{\mathrm{h}} = \mu_0(1-\mathrm{j}0)$

$\varepsilon_{\mathrm{h}} = \varepsilon_0(2.95-\mathrm{j}0.07)$

在上式中，μ_{h} 和 ε_{h} 分别是在工作频率下主介质的磁导率与介电常数。手性介质的本构关系有时候可写为如下形式：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_c\boldsymbol{E} - \mathrm{j}\kappa\sqrt{\mu_{\mathrm{h}}\varepsilon_{\mathrm{h}}}\boldsymbol{H} \tag{9.95}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_c\boldsymbol{H} + \mathrm{j}\kappa\sqrt{\mu_{\mathrm{h}}\varepsilon_{\mathrm{h}}}\boldsymbol{E} \tag{9.96}$$

在 Lindell—Sihvola 提倡的这种标记中，ε_c 和 μ_c 分别是手性材料的有效介电常数与有效磁导率，κ 是一个标量手性参数。在 $f=5\text{GHz}$ 时，上面提到的手性材料具有下面的参数值：

$$\varepsilon = 1.3\varepsilon_0 \tag{9.97}$$

$$\mu = 1.05\mu_0 \tag{9.98}$$

$$\kappa = 0.07 \tag{9.99}$$

Dikshitulu 等人[7]给出了 κ 随频率变化的曲线（见图 9.17）。在频率远大于 10GHz 或远小于 5GHz 时，手性参数可以忽略不计。这是容易理解的，因为人工介质具有 cm 级的长度。

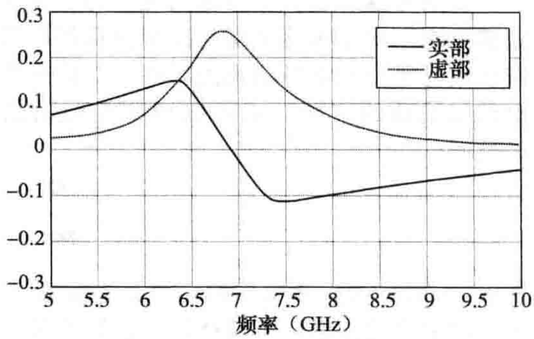


图 9.18 手性参数 κ 随频率的变化

在可见光频带范围内，糖是能表现出手性介质特性的材料的一个例子。之所以会出现这种现象，因为糖分子具有固有的螺旋特性并且其长度尺度远小于上面提到的人工介质。附录 9A 对波在手性介质中的传播进行了讨论。Kalluri 和 Rao[25]讨论了手性滤波器（见图 9.18）。

参考文献

1. Kraus and Carver, *Electromagnetics* (2nd edition), McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1973.
2. Rotman, W., Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media, *IRE Trans. Antennas Propag.*, AP-10, 82–95, 1962.
3. Larsen, T., A survey of the theory of wire grids, *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-10, 191–201, 1962.
4. Pendry, J. B., Holden, A. J., and Robbins, D. J., Low frequency plasmons in thin-wire structures, *J. Phys. Condens. Matter*, 10, 4485–4809, 1998.
5. Dikshitulu, K. and Ramjee, P., Experimental simulation of waveguide and cavity filled with low-loss plasma, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-6(4), 568–573, 1978.
6. Dikshitulu, K., Ramjee, P., and Shashibala, S., Experimental simulation of plasma using strip medium, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-34(7), 825–828, 1986.
7. Dikshitulu, K., Ramjee, P., and Shashibala, S., Experimental simulation of a warm plasma medium, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13(4), 194–196, 1985.
8. Collin, R. E., A simple artificial anisotropic dielectric medium, *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, 206–209, 1958.
9. Colden, K. E., Plasma simulation with an artificial dielectric in a horn geometry, *IEEE Trans. Antenna Propagat*, AP-13, 587–594, 1965.
10. Collin, R. E., *Field Theory of Guided Wave* (2nd edition), IEEE Press, New York, NY, 1991, pp. 749–780.
11. Caloz, C. and Itoh, T., *Electromagnetic Metamaterials*, Wiley, Hoboken, NJ, 2006.
12. Veselago V., The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ, *Soviet Phys. Uspekhi*, 10(4), 509–514, 1968.
13. Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D. C., Nemat-Nasser, S. C., and Schultz, S., Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity, *Phys. Rev. Lett.*, 84(18), 4184–4187, 2000.
14. Pendry, J. B., Holden, A. J., Stewart, W. J., and Youngs, I., Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructure, *Phys. Rev. Lett.*, 76(25), 4773–4776, 1996.
15. Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., and Stewart, W. J., Low frequency plasmons in thin-wire structure, *J. Phys. Condens. Matter*, 10, 4785–4809, 1998.
16. Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., and Stewart, W. J., Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena, *IEEE Trans. Microw. Theory. Tech.*, 47(11), 2075–2084, 1999.

17. Smith, D. R., Vier, D. C., Kroll, N., and Schultz, S., Direct calculation of permeability and permittivity for a left-handed metamaterial, *App. Phys. Lett.*, 77(14), 2246–2248, 2000.
18. Sheley, R. A., Smith, D. R., and Schultz, S., Experimental verification of a negative index of refraction, *Science*, 292, 77–79, 2001.
19. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1965.
20. Pendry, J. B., Negative refraction makes a perfect lens, *Phys. Rev. Lett.*, 85(18), 3966–3969, 2000.
21. Caloz, C. and Itoh, T., Application of the transmission line theory of left-handed (LH) materials to the realization of a microstrip LH transmission line, in *Proc. IEEE-AP-S USNC/URSI National Radio Science Meeting*, Vol. 2, San Antonio, TX, June 2002, pp. 412–415.
22. Caloz, C. and Itoh, T., Transmission line approach of left-handed (LH) structures and microstrip realization of a low-loss broadband LH filter, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 52(5), 1159–1166, 2004.
23. Lindell, I. V., Sihvola, A. H., Tretyakov, S. A., and Viitanen, A. J., *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotopic Media*, Artech House, Boston, MA, 1994.
24. Bahr, A. J. and Clansing, K. R., An approximate model for artificial chiral material, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, AP-42, 1592, 1994.
25. Kalluri, D. K. and Rao, T. C. K., Filter characteristics of periodic chiral layers, *Pure Appl. Opt.*, 3, 231, 1994.
26. DeMartinis, G., *Chiral media using conical coil wire inclusions*, Doctoral thesis, University of Massachusetts Lowell, Lowell, 2008.

第10章

各向同性冷等离子体中的波：色散媒质[1]

10.1 基本方程

我们假设电子密度仅在空间(非均匀各向同性等离子体)中变化：

$$\omega_p^2 = \omega_p^2(\boldsymbol{r}) \tag{10.1}$$

然后，如果场量随时间作如下式所示的时谐变化，就可以构造其基本解：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t) \tag{10.2}$$

在上式中，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$代表相量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$或$\boldsymbol{J}$。因此，得到基本场方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{10.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \tag{10.4}$$

$$\mathrm{j}\omega\boldsymbol{J} = \varepsilon_0\omega_p^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} \tag{10.5}$$

联立式(10.4)和式(10.5)，可写出：

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_p(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E} \tag{10.6}$$

式中，ε_p为各向同性等离子体的介电常数，且由下式表示：

$$\varepsilon_p(\boldsymbol{r},\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(\boldsymbol{r})}{\omega^2} \tag{10.7}$$

矢量波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_p(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{H} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_p(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H} &= -\frac{\varepsilon_0}{\mathrm{j}\omega}\nabla\omega_p^2(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E} \\ &= -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\nabla\varepsilon_p(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{10.9}$$

而一维标量方程具有如下形式：

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 H \tag{10.10}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E + J \tag{10.11}$$

$$\mathrm{j}\omega J = \varepsilon_0\omega_p^2(z)E \tag{10.12}$$

联立式(10.11)和式(10.12)，或者根据式(10.6)，有：

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_p(z,\omega)E \tag{10.13}$$

式中，

$$\varepsilon_p(z,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2} \tag{10.14}$$

图10.1给出了ε_p随ω的变化曲线。当$\omega<\omega_p$时，ε_p为负数；当$\omega=\omega_p$时，ε_p为零；当$\omega>\omega_p$时，ε_p为正数但是小于1。在这种情况下，一维标量波动方程可以简化为方程式(10.15)和方程式(10.16)：

---

[1] 第10章的附录参见附录10A～10B。

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_p(z,\omega)E = 0 \tag{10.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_p(z,\omega)H = \frac{1}{\varepsilon_p(z,\omega)}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_p(z,\omega)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} \tag{10.16}$$

若我们进一步假设电介质是均匀的（ε_p 不是 z 的函数），则方程式(10.15)很容易求解。这样的解由下式给出：

$$E = E^+(z) + E^-(z) \tag{10.17}$$

$$E = E_0^+\exp(-\mathrm{j}kz) + E_0^-\exp(+\mathrm{j}kz) \tag{10.18}$$

式中

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_p} = k_0\sqrt{\varepsilon_p} = k_0 n \tag{10.19}$$

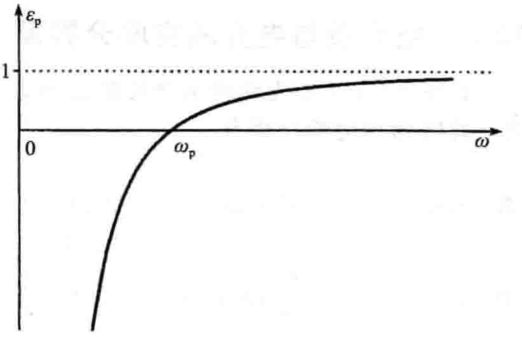


图 10.1 等离子媒质的介电常数与频率的关系

这里，n 是折射率，k_0 是自由空间中的波数。方程式(10.17)右边的第一项表示一个角频率为 ω、波数为 k 且沿 $+z$ 方向（正向行波）的行波，第二项也是一个行波但是一个负向行波。z 方向是相位传播的方向，每一个波的相位传播速度 v_p（相速度）都为

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{10.20}$$

由式(10.10)可知，

$$H^+(z) = \frac{1}{(-\mathrm{j}\omega\mu_0)}(-\mathrm{j}k)E_0^+\exp(-\mathrm{j}kz) = \frac{1}{\eta}E^+(z) \tag{10.21}$$

$$H^-(z) = -\frac{1}{\eta}E^-(z) \tag{10.22}$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_p}} = \frac{\eta_0}{n} = \frac{120\pi}{n} \quad (\Omega) \tag{10.23}$$

这里，η 是介质的波阻抗。上面所描述的波称为均匀平面波，它是在无限大各向同性媒质中波动方程的一维解，波的相位和振幅在同一个波前面中都是常数。在无坐标系的描述中，这样的一维解称为横电磁(Transverse Electric and Magnetic，TEM)波。对于沿任意方向 $\hat{k}$ 传播的平面波，其特性可以归纳如下：

$$\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{H}} = \hat{k} \tag{10.24}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{k} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{H}} \cdot \hat{k} = 0 \tag{10.25}$$

$$E = \eta H \tag{10.26}$$

在上式中，$\hat{k}$ 是在相位传播方向上的单位矢量。换句话说，这些性质是：

1) 单位电场矢量、单位磁场矢量和相位传播方向上的单位矢量三者相互垂直，构成一个相互正交的系统。

2) 在传播方向上，不存在电场和磁场矢量的分量。

3) 电场振幅与磁场振幅的比值等于介质的本征阻抗。

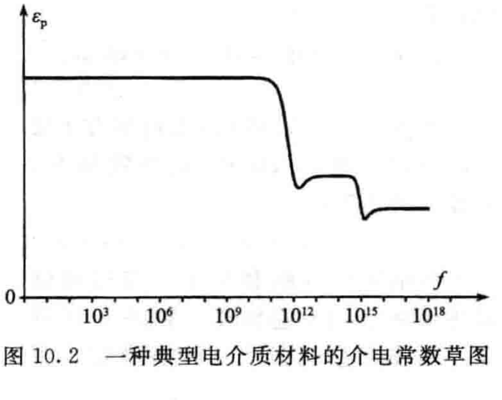


图 10.2 一种典型电介质材料的介电常数草图

图 10.2 所示为一个典型的实际电介质

的介电常数 ε_p 随频率的变化曲线。在很宽的频带内，这种介质的 ε_p 几乎不随 ω 变化，记为介电常数 ε_r。下面将考虑对电介质纵断面的阶跃近似。在媒质 1 和媒质 2 中，电介质分别看做均匀的。大家已经熟悉这个问题的解，但在这里对其进行讨论，就是为了与第 3 章讨论的时间阶跃纵断面的解进行对比。

10.2 电介质与电介质空间分界面

如图 10.3 所示为两种电介质的空间分界面。让入射波在媒质 1 中，也可以称作入射波，其电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_i(x,y,z,t)=\hat{x}E_0\exp[\mathrm{j}(\omega_i t-k_i z)] \tag{10.27}$$

$$\boldsymbol{H}_i(x,y,z,t)=\hat{y}\frac{E_0}{\eta_1}\exp[\mathrm{j}(\omega_i t-k_i z)] \tag{10.28}$$

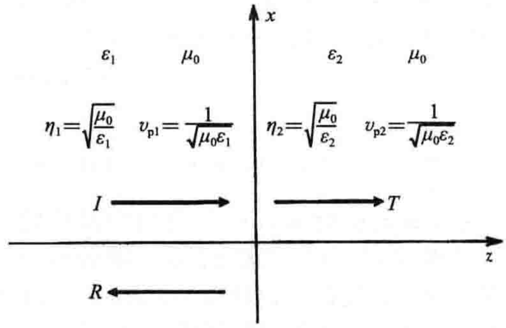


图 10.3 电介质-电介质空间边界问题

式中，ω_i是入射波的频率，且

$$k_i=\omega_i\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}=\frac{\omega_i}{v_{p1}} \tag{10.29}$$

反射波的电场和磁场为

$$\boldsymbol{E}_r(x,y,z,t)=\hat{x}E_r\exp[\mathrm{j}(\omega_r t+k_r z)] \tag{10.30}$$

$$\boldsymbol{H}_r(x,y,z,t)=-\hat{y}\frac{E_r}{\eta_1}\exp[\mathrm{j}(\omega_r t+k_r z)] \tag{10.31}$$

式中，ω_r是反射波的频率，且

$$k_r=w_r\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} \tag{10.32}$$

透射波的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_t(x,y,z,t)=\hat{x}E_t\exp[\mathrm{j}(\omega_t t-k_t z)] \tag{10.33}$$

$$\boldsymbol{H}_t(x,y,z,t)=\hat{y}\frac{E_t}{\eta_2}\exp[\mathrm{j}(\omega_t t-k_t z)] \tag{10.34}$$

式中，ω_t是透射波的频率，且

$$k_t=\omega_t\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}=\frac{\omega_t}{v_{p2}} \tag{10.35}$$

在分界面 $z=0$ 处，电场切向分量的连续性边界条件可以表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,0^-,t)\times\hat{z}=\boldsymbol{E}(x,y,0^+,t)\times\hat{z} \tag{10.36}$$

$$[\boldsymbol{E}_i(x,y,0^-,t)+\boldsymbol{E}_r(x,y,0^-,t)]\times\hat{z}=[\boldsymbol{E}_t(x,y,0^+,t)]\times\hat{z} \tag{10.37}$$

上式必须对所有 x、y 和 t 都成立。因此，有：

$$E_0\exp[\mathrm{j}\omega_i t]+E_r\exp[\mathrm{j}\omega_r t]=E_t\exp[\mathrm{j}\omega_t t] \tag{10.38}$$

因为方程式(10.38)必须对所有 t 都成立，所以方程式(10.38)的指数项中 t 的系数必须相等：

$$\omega_i=\omega_r=\omega_t=\omega \tag{10.39}$$

上述结果可以解释如下：穿过电磁媒质性质在空间不连续处，频率 ω 保持不变。当波在空间中从一种媒质射入到

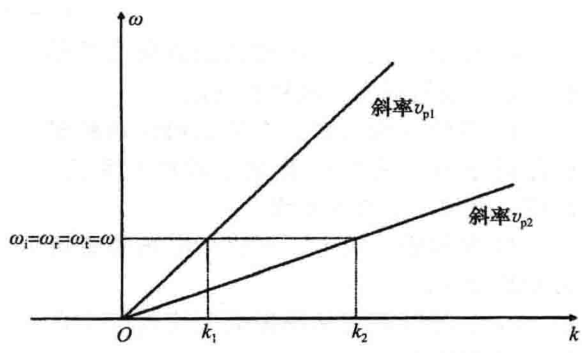


图 10.4 穿过空间边界频率的守恒

另一种媒质时，波数k会改变，正如相速度会发生变化一样(见图 10.4)。

由方程式(10.38)和方程式(10.39)，得到：

$$E_0 + E_r = E_t \tag{10.40}$$

第二个独立的切向磁场分量的连续性边界条件可以写为

$$[\boldsymbol{H}_i(x,y,0^-,t) + \boldsymbol{H}_r(x,y,0^-,t)] \times \hat{z} = [\boldsymbol{H}_t(x,y,0^+,t)] \times \hat{z} \tag{10.41}$$

利用式(10.40)和式(10.41)，可以求出反射系数 $R_A = E_r/E_0$ 和透射系数 $T_A = E_t/E_0$。根据式(10.41)，我们有：

$$\frac{E_0 - E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} \tag{10.42}$$

有如下结果：

$$R_A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{10.43}$$

$$T_A = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{10.44}$$

在上面两式中，为了区别起见，下标 A 意味着这是由于媒质性质的时间不连续而产生的反射和透射系数。第 3 章已经讨论过这方面的内容。

下面证明，入射波的功率密度时间平均值等于反射波和透射波的功率密度时间平均值之和：

$$\left|\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{H}_i^* \cdot \hat{z}]\right| = \left|\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_r^* \cdot \hat{z}]\right| + \left|\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{H}_t^* \cdot \hat{z}]\right| \tag{10.45}$$

上式左边为

$$\frac{1}{2}E_0 H_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_1} \tag{10.46}$$

而右边为

$$\frac{1}{2}E_0^2\left[\frac{|R_A|^2}{\eta_1} + \frac{|T_A|^2}{\eta_2}\right] = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_1}\left[\frac{(\eta_2-\eta_1)^2 + 4\eta_1\eta_2}{(\eta_2+\eta_1)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_1} \tag{10.47}$$

10.3 半空间等离子体的反射

假设一频率为ω的平面波由自由空间($z<0$)垂直入射到半无限大空间($z>0$)中的等离子体，等离子体频率为ω_p。等离子体媒质的波阻抗为

$$\eta_p = \frac{\eta_0}{n_p} = \frac{120\pi\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \tag{10.48}$$

由式(10.43)，可以得到反射系数R_A为

$$R_A = \frac{\eta_p - \eta_0}{\eta_p + \eta_0} = \frac{1 - n_p}{1 + n_p} = \frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}} \tag{10.49}$$

式中

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p} \tag{10.50}$$

Ω是相对于等离子体频率归一化的入射波频率。图 10.5 所示为功率反射系数$\rho = |R_A|^2$和功率透射系数$\tau(=1-\rho)$随

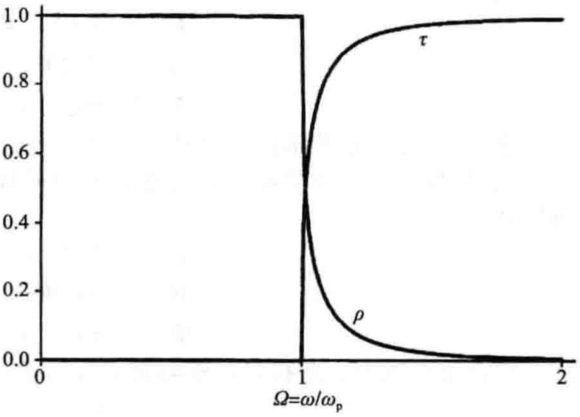


图 10.5　等离子体半空间的功率反射系数(ρ)和功率传输系数(τ)的草图

Ω 的变化曲线。在 $0<\omega<\omega_p$ 频带内，波阻抗 η_p 是虚数。等离子体中的电场 $\boldsymbol{E}_p$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_p$ 在时间上有 90°的相位差；$(\boldsymbol{E}_p\times\boldsymbol{H}_p^*)$ 的实部是 0。等离子体中的波是一种倏逝波[1]，它不携带任何有功功率。入射波被完全反射，且 $\rho=1$。在 $\omega_p<\omega<\infty$ 频带内，等离子体好像是一种像电介质，入射波部分地被透射，部分地被反射。入射波功率密度的时间平均值等于反射波和透射波功率密度的时间平均值之和。

在光频段，金属可以被看成等离子体，等离子体频率 ω_p 的数量级为 10^{16}。如果考虑碰撞频率，精确的等离子体模型将分成导电、截止和介电现象三个频率区间[2]。文献[3]和[4]给出了将金属看成等离子体的一种更加详细的解释。与衰减全反射、表面等离子体和其他一些有趣专题的有关现象的解释都是基于将金属看成等离子体。10.8 节给出了表面波的一种简要解释。

10.4 等离子体平板的反射

为了使所得到的问题的公式具有普遍性，本节将会考虑斜入射。如图 10.6所示，让 x-z 平面为波的入射平面，且 $\hat{k}$ 为在传播方向上的单位矢量。令磁场 H^{I} 沿 y 轴方向，而电场 E^{I} 完全位于入射平面中。在文献中，这样的波命名为 p 波，或 TM 波，或平行极化波。因为边界是在 $z=0$ 和 $z=d$ 处，所以有必要在 x-y-z 坐标系中来表述问题，并用坐标 x 和 z 来表示 $\hat{k}$。因此，所要分析的问题是一个二维问题。入射波可以写成如下式(10.51)至式(10.56)的形式：

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}=\hat{y}H_y^{\mathrm{I}}\exp[-\mathrm{j}k_0\hat{k}\cdot\boldsymbol{r}] \tag{10.51}$$

$$\hat{k}=\hat{x}S+\hat{z}C \tag{10.52}$$

$$S=\sin\theta_{\mathrm{I}},\quad C=\cos\theta_{\mathrm{I}} \tag{10.53}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}=(\hat{y}\times\hat{k})E^{\mathrm{I}}\exp[-\mathrm{j}k_0\hat{k}\cdot r]=(\hat{x}E_x^{\mathrm{I}}+\hat{z}E_z^{\mathrm{I}})\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{I}} \tag{10.54}$$

$$E_x^{\mathrm{I}}=CE^{\mathrm{I}},E_z^{\mathrm{I}}=-SE^{\mathrm{I}},E^{\mathrm{I}}=\eta_0H_y^{\mathrm{I}} \tag{10.55}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{I}}=\exp[-\mathrm{j}k_0(Sx+Cz)] \tag{10.56}$$

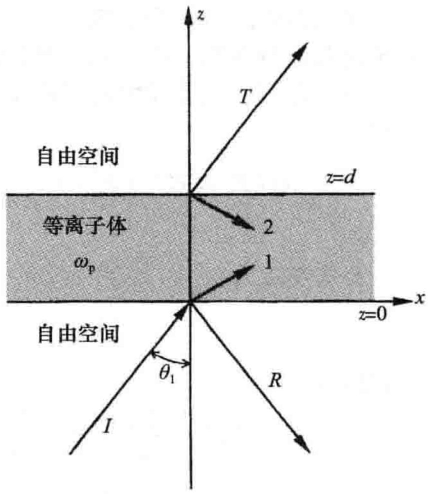


图 10.6 等离子体平板问题

反射波可写为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{R}}=(\hat{x}E_x^{\mathrm{R}}+\hat{z}E_z^{\mathrm{R}})\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{R}} \tag{10.57}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}=\hat{y}H_y^{\mathrm{R}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{R}} \tag{10.58}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{R}}=\exp[-\mathrm{j}k_0(Sx-Cz)] \tag{10.59}$$

在 $z=0$ 处，边界条件要求在 $z>0$ 和 $z<0$ 这两个区域中变量 x 的变化形式相同。由于 $z>d$ 区域也是自由空间，因此透射波的指数因子与入射波的指数因子相同，且透射波的场是：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=(\hat{x}E_x^{\mathrm{T}}+\hat{z}E_z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} \tag{10.60}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\hat{y}H_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} \tag{10.61}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}=\exp[-\mathrm{j}k_0(Sx+Cz)] \tag{10.62}$$

在自由空间中，所有场的振幅都可以用 E_x^{I}、E_x^{R} 或 E_x^{T} 来表示：

$$CE_z^{\mathrm{I,T}}=-SE_x^{\mathrm{I,T}} \tag{10.63}$$

$$CE_z^{\mathrm{R}}=SE_x^{\mathrm{R}} \tag{10.64}$$

$$C\eta_0H_y^{\mathrm{I,T}}=E_x^{\mathrm{I,T}} \tag{10.65}$$

$$C\eta_0 H_y^{\mathrm{R}} = -E_x^{\mathrm{R}} \tag{10.66}$$

现在，我们考虑在均匀等离子体区域 $0<z<d$ 中的波。在等离子体中，波随变量 x 和 z 的变化形式由指数因子 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{P}}$ 所确定：

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{P}} = \exp[-\mathrm{j}k_0(Sx+qz)] \tag{10.67}$$

式中，q 是待定的。等离子体中的波数为 $k_{\mathrm{p}}=k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{p}}}$。因此，有：

$$q^2+S^2=\varepsilon_{\mathrm{p}}=1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2} \tag{10.68}$$

$$q_{1,2}=\pm\sqrt{C^2-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}}=\pm\sqrt{\frac{C^2\Omega^2-1}{\Omega^2}} \tag{10.69}$$

q 有两个值表明在等离子体中会激发出两个波，第一个是正向波，第二个则是负向波。当 $\Omega<1/C$ 时，q 是纯虚数，等离子体中的两个波都是倏逝波。下一节讨论这一频段。

等离子体中的场量可以重新写为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=\sum_{m=1}^{2}(\hat{x}E_{xm}^{\mathrm{P}}+\hat{z}E_{zm}^{\mathrm{P}})\boldsymbol{\Psi}_m^{\mathrm{P}} \tag{10.70}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{P}}=\sum_{m=1}^{2}\hat{y}H_{ym}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{\Psi}_m^{\mathrm{P}} \tag{10.71}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_m^{\mathrm{P}}=\exp[-\mathrm{j}k_0(Sx+q_m z)] \tag{10.72}$$

等离子体中所有场量的幅值都可以用 E_{x1}^{P} 和 E_{x2}^{P} 来表示：

$$\eta_0 H_{ym}^{\mathrm{P}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{p}}}{q_m}E_{xm}^{\mathrm{P}}=\eta_{ym}E_{xm}^{\mathrm{P}} \tag{10.73}$$

$$E_{zm}^{\mathrm{P}}=-\frac{S}{q_m}E_{xm}^{\mathrm{P}} \tag{10.74}$$

如果注意到 $\partial/\partial x=-\mathrm{j}k_0S$ 和 $\partial/\partial z=-\mathrm{j}k_0q$，就可以根据式(10.3)和式(10.6)得到上述关系式；也可以通过观察直接地写出来。假设 E_x^{I} 已知，未知量将减少到 4 个：E_{x1}^{P}、E_{x2}^{P}、E_x^{R} 和 E_x^{T}。它们可以从在 $z=0$ 和 $z=d$ 处 E_x 与 H_y 切向分量的 4 个连续性边界条件得到。用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ C\eta_{y1} & C\eta_{y2} & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -1\\ \lambda_1 C\eta_{y1} & \lambda_2 C\eta_{y2} & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{x1}^{\mathrm{P}}\\ E_{x2}^{\mathrm{P}}\\ E_x^{\mathrm{R}}\\ E_x^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}E_x^{\mathrm{I}} \tag{10.75}$$

式中

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\exp[\mathrm{j}k_0(C-q_1)d]\\ \lambda_2&=\exp[\mathrm{j}k_0(C-q_2)d]\end{aligned} \tag{10.76}$$

解方程式(10.75)，得到

$$E_{x1}^{\mathrm{P}}=2\lambda_2(1-C\eta_{y2})E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.77}$$

$$E_{x2}^{\mathrm{P}}=-2\lambda_1(1-C\eta_{y1})E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.78}$$

$$E_x^{\mathrm{R}}=(1-C\eta_{y1})(1-C\eta_{y2})(\lambda_2-\lambda_1)E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.79}$$

$$E_x^{\mathrm{T}}=2\lambda_1\lambda_2 C(\eta_{y1}-\eta_{y2})E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.80}$$

式中

$$\Delta=\lambda_2(1+C\eta_{y1})(1-C\eta_{y2})-\lambda_1(1-C\eta_{y1})(1+C\eta_{y2}) \tag{10.81}$$

反射功率系数 $\rho=|E_x^{\mathrm{R}}/E_x^{\mathrm{I}}|^2$ 为

$$\rho = \frac{1}{1+(2C\varepsilon_p q_1/(C^2\varepsilon_p^2 - q_1^2)\csc(2\pi\Omega q_1 d_p))^2} \tag{10.82}$$

式中

$$d_p = \frac{d}{\lambda_p} \tag{10.83}$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \tag{10.84}$$

在上式中，λ_p 是相应于等离子体频率的自由空间中的波长，并用于归一化等离子体平板的厚度。代入 q_1，在 q_1 为实数的范围内，有

$$\rho = \frac{1}{1+B\csc^2 A}, \quad \frac{1}{C} < \Omega < \infty \tag{10.85}$$

在 q_1 为虚数范围内，有

$$\rho = \frac{1}{1-B\operatorname{csch}^2|A|}, \quad 0 < \Omega < \frac{1}{C} \tag{10.86}$$

式中，A 和 B 由下式给出

$$A = 2\pi\Omega q_1 d_p = 2\pi\sqrt{C^2\Omega^2 - 1}\,d_p \tag{10.87}$$

$$B = \frac{4C^2\varepsilon_p^2 q_1^2}{(C^2\varepsilon_p^2 - q_1^2)^2} = \frac{4C^2\Omega^2(\Omega^2-1)^2(C^2\Omega^2-1)}{(2C^2\Omega^2 - \Omega^2 - C^2)^2} \tag{10.88}$$

功率透射系数为 $\tau=(1-\rho)$，并由下式给出：

$$\tau = \frac{|B|}{|B|+\sin^2|A|}, \quad \frac{1}{C} < \Omega < \infty \tag{10.89}$$

$$\tau = \frac{|B|}{|B|+\sinh^2|A|}, \quad 0 < \Omega < \frac{1}{C} \tag{10.90}$$

由式(10.85)可知，$\rho=0$，只要取 $\sin A=0$ 或者

$$A = n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{10.91}$$

还存在一个 Ω 的值，能使得 $\rho=0$。由式(10.88)可知，当 $C\varepsilon_p=q_1$ 时，$B=\infty$，而由式(10.89)可知，$\tau=1$ 且 $\rho=0$。这对应于一个频率 Ω_B，由下式给出：

$$\Omega_B^2 = \frac{C^2}{2C^2-1} \tag{10.92}$$

很容易证明，对于 p 波，才存在 Ω_B，并且其值大于 $1/C$。事实上，这相当于布儒斯特角(Brewster angle)[4]。图 10.7 为 Ω_B 随 $\cos\theta_B$ 的变化关系曲线，其中 θ_B 是布儒斯特角。

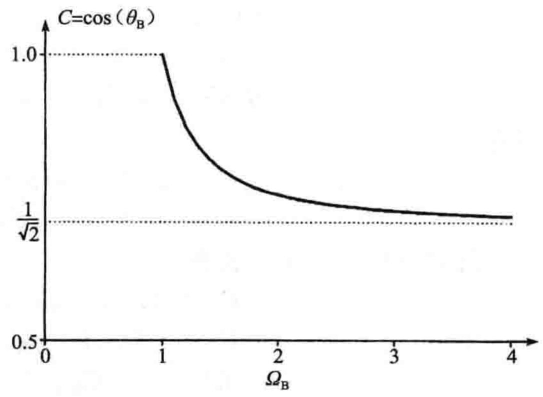


图 10.7 等离子体媒质的布儒斯特角

因此，在 $\Omega>1/C$ 频带中，ρ 随等离子体平板厚度的变化而振荡。Stratton[6] 讨论了在电介质层中出现的这些振荡，并认为是由电介质层中内反射波的干涉所引起的。在等离子体平板情况中，ρ 随着入射波频率的变化也是振荡的，因为在这个范围内等离子体就像是一种色散电介质。ρ 的最大值小于等于 1，出现在当 Ω 满足如下式的超越方程时：

$$\tan A = fA \tag{10.93}$$

式中

$$f=\frac{C^2\Omega^2(\Omega^2-1)(C^2+\Omega^2-2C^2\Omega^2)}{(2C^2\Omega^4-2C^2\Omega^2+C^2-\Omega^2)(1+\Omega^2-2C^2\Omega^2)} \tag{10.94}$$

对于一个归一化厚度 $d_p=1.0$ 和 $C=0.5(\theta_1=60°)$的等离子体平板，图 10.8 所示为 ρ 和 Ω 的关系曲线。其中的插图表示 q 随着 Ω 的变化情况。在 q 的实数区间内，可清晰地看到出现了振荡。Heald 和 Wharton[2] 给出了垂直入射于一有损耗等离子体平板中的类似曲线，但使用了对于入射波量归一化的参数。

在图 10.8 中，在 q 为虚数范围内，$\rho\approx 1$表明入射波被全反射。然而，我们将证明对于足够薄的等离子体平板，存在着一个相当大的功率隧道。

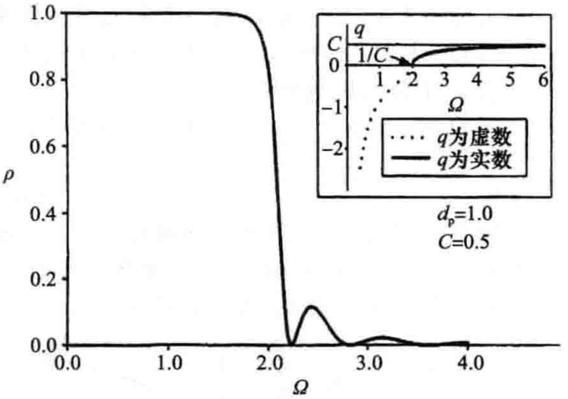


图 10.8　各向同性等离子体平板(平行极化)的 ρ 与 Ω 关系曲线

10.5　穿过等离子体平板的功率隧道

在 $\Omega<1/C$ 频带内，特征根是虚数，在等离子体中激发的波是倏逝波。入射波被半无限大等离子体平板完全地反射。然而，在等离子体平板情况中，即使在这个频带中，一定数量的功率还是穿过等离子体平板传输。可以证明，这种隧道效应是由正向波的电场和负向波的磁场之间的相互作用所引起的，反之亦然。

以上所述，可以通过计算坡印亭矢量得到的功率流来给出解释。由式(10.77)～式(10.81)，得到：

$$E_x^{\mathrm{T}}=2C\varepsilon_p q_1\exp[\mathrm{j}k_0Cd]E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.95}$$

$$E_{x1}^{\mathrm{P}}=(q_1+C\varepsilon_p)q_1\exp[\mathrm{j}k_0q_1d]E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.96}$$

$$E_{x2}^{\mathrm{P}}=-(-q_1+C\varepsilon_p)q_1\exp[-\mathrm{j}k_0q_1d]E_x^{\mathrm{I}}/\Delta \tag{10.97}$$

式中

$$\Delta=2q_1C\varepsilon_p\cos(k_0q_1d)+\mathrm{j}(q_1^2+C^2\varepsilon_p^2)\sin(k_0q_1d) \tag{10.98}$$

磁场 H_{y1}^{P}、H_{y2}^{P}和 H_y^{T} 可以由方程式(10.65)和方程式(10.73)得到。

计算等离子体波的坡印亭矢量的 z 分量，可以求出穿过在等离子体中与分界面平行的任意平面的功率。有如下结果：

$$S_z^{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[(E_{x1}^{\mathrm{P}}\Psi_1^{\mathrm{P}}+E_{x2}^{\mathrm{P}}\Psi_2^{\mathrm{P}})(H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_1^{\mathrm{P}*}+H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_2^{\mathrm{P}*})] \tag{10.99}$$

将上式展开，可得

$$\begin{aligned}S_z^{\mathrm{P}}=&\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_{x1}^{\mathrm{P}}\Psi_1^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_1^{\mathrm{P}*}]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_{x2}^{\mathrm{P}}\Psi_2^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_1^{\mathrm{P}*}]\\&+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_{x1}^{\mathrm{P}}\Psi_1^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_2^{\mathrm{P}*}]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_{x2}^{\mathrm{P}}\Psi_2^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_2^{\mathrm{P}*}]\end{aligned} \tag{10.100}$$

式中，Ψ_1^{P} 和 Ψ_2^{P} 由式(10.72)给出。现在，讨论在 q_1 为实数 $\Omega>1/C$ 和 q_1 为虚数 $\Omega<1/C$ 两种情况下，式(10.100)右边四项中每一项的贡献。应该注意的是，第二项与第三项的贡献是由正向波和负向波中场之间的相互作用所产生的。

情况 1：q_1 为实数

容易看到，因为第二项和第三项相等，但符号相反，所以相互作用对净功率流没有贡献。第一项和第四项之和等于$(1/2)\mathrm{Re}[(E_x^{\mathrm{T}}\Psi^{\mathrm{T}})(H_y^{\mathrm{T}*}\Psi^{\mathrm{T}*})]$，其中 Ψ^{T} 由式(10.62)给出。

因此，穿过任意与等离子体平板分界面相平行平面的功率，精确地给出了透入等离子体平板另一边自由空间中的功率。

情况 2：q_1 为虚数

可以证明，第一项和第四项都为零。这是因为它们的电场和磁场在时间上都有 90°的相位差。此外，第二项和第三项相等，都等于$(1/4)\mathrm{Re}[(E_x^{\mathrm{T}}\Psi^{\mathrm{T}})(H_y^{\mathrm{T}*}\Psi^{\mathrm{T}*})]$。因此，在隧道频带($\Omega<1/C$)中，功率流完全是由相互作用所引起的。

当 $\Omega=1$ 时，$\varepsilon_{\mathrm{p}}=0$，由式(10.88)可得 $B=0$ 但 $A\neq0$。由式(10.89)可得，$\tau=0$。仅对于 p 波，才会出现这种情况。

当 $\Omega=1/C$ 时，$A=0$ 且 $B=0$。取极限，可以得到此时的功率透射系数 τ_{c}：

$$\tau_{\mathrm{c}}=\frac{1}{1+S^4\pi^2\mathrm{d}_{\mathrm{p}}^2},\quad \Omega=\frac{1}{C} \tag{10.101}$$

图 10.9 和图 10.10 为在遂隧频带内，τ 随 Ω 变化的数值结果。在图 10.9 中，取入射角为 60°，给出了在不同 d_{p} 时的曲线。在 $\Omega=0\sim1$ 之间，存在一个透射最大的值 $\Omega=\Omega_{\max}$。透射功率的最大值随 d_{p} 增大而减少。

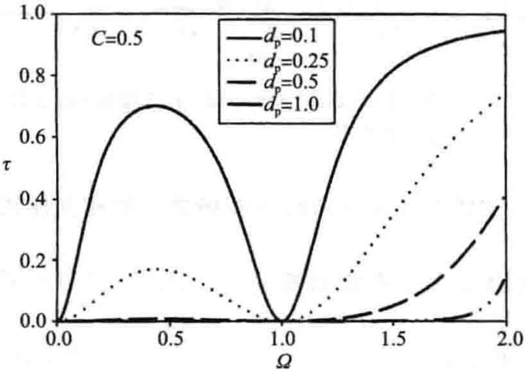


图 10.9 对于不同 d_{p}，在隧道频带($\Omega<1/C$)范围内，各向同性等离子体平板(平行极化)的折射功率

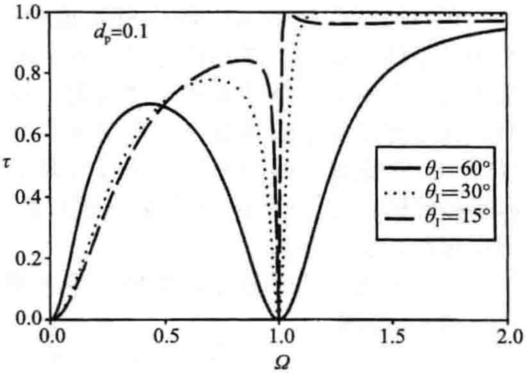


图 10.10 对于不同入射角，在隧道频带($\Omega<1/C$)范围内，各向同性等离子体平板(平行极化)的折射功率

在图 10.10 中，给出了以入射角为参数时 τ 和 Ω 的关系曲线。可以看到，最大透射功率点随入射角的减小向右移，并当 $\theta_1=0°$(垂直入射)时，与 $\Omega=1$ 相重和。透射功率最大值随着 θ_1 的增加而减少。出现透射功率最大值的点就是如下超越方程的解：

$$\tanh|A|=f|A| \tag{10.102}$$

式中，f 和 A 分别由式(10.94)与式(10.87)给出。实际上，当给定入射角时，由实验测量出 $\Omega_{\max}$，我们就可以计算出等离子体频率或者等离子体平板的厚度。

10.6 非均匀等离子体平板问题

现在，我们考虑在 $1<z<d$ 的区域中，ε_{p} 是 z 的函数的情况。为了简化问题并且重点计及媒质性质不均匀的影响，我们考虑垂直入射的情况。电场的微分方程由式(10.15)给出。对于一般的 $\varepsilon_{\mathrm{p}}(z)$ 纵断面，不能精确地求解这个方程。

然而，对于某些特殊问题，可以得到用特殊函数表示的精确解。作为例子，线性变化纵断面问题可以用 Airy 函数来求解。文献[8]和[9]给出了 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(z)$ 电介质纵断面的这种解，文献[2]和[10]给出了 $\varepsilon_{\mathrm{p}}(z,\omega)$ 等离子体纵断面的这种解。Abramowitz 和 Stegun[11] 详细介绍了特殊函数。

关于非均匀媒质问题的近似解有大量文献可供参考。本书重点介绍如下几种方法。实际的纵断面可看做对精确解已知的某一纵断面的一种微扰。这种微扰的影响可以通过格林函数来计算。可以通过对一个阶跃纵断面问题进行微扰，来处理在有限长度范围内快速变

化的纵断面问题。另一方面，慢速变化的纵断面问题可应用绝热和 WKBJ 方法来处理。电介质纵断面问题的例子参见文献[1]和[8]，等离子体纵断面问题的例子参见文献[2]和[10]。我们也可以使用数值近似的方法，这种方法在求解给定问题的具体数值及验证从物理近似中得到的理论结果时非常有用。后续章节将会讨论时域纵断面问题。

10.7　等离子体层的周期分布

下面考虑非均匀等离子体媒质中的一种特殊情况：等离子体媒质是周期性变化的。让电介质函数为

$$\varepsilon_{\mathrm{p}}(z,\omega)=\varepsilon_{\mathrm{p}}(z+mL,\omega) \tag{10.103}$$

式中，m 是一个整数，L 是空间周期。如果 m 是定义在 $-\infty<m<\infty$ 中的无穷个整数，那么周期性媒质的分布将是无界的。对于无限大周期性结构问题[1,9,12]，方程式(10.15)的解将会使得电场 $E(z)$ 与电场 $E(z+L)$ 相差一个常数：

$$E(z+L)=CE(z) \tag{10.104}$$

复常数 C 可写为

$$C=\exp(-\mathrm{j}\beta L) \tag{10.105}$$

式中，β 是周期性媒质的复传播常数。因此，可以写出：

$$E(z)=E_{\beta}(z)\exp(-\mathrm{j}\beta z) \tag{10.106}$$

由式(10.106)，可得

$$E(z+L)=E_{\beta}(z+L)\exp[-\mathrm{j}\beta(z+L)] \tag{10.107}$$

同样，由式(10.104)和式(10.106)，可知

$$\begin{aligned}E(z+L)&=E(z)\exp(-\mathrm{j}\beta L)=E_{\beta}(z)\exp(-\mathrm{j}\beta z)\exp(-\mathrm{j}\beta L)\\&=E_{\beta}(z)\exp(-\mathrm{j}\beta(z+L))\end{aligned} \tag{10.108}$$

根据式(10.107)和式(10.108)，可知 $E_{\beta}(z)$ 是周期性变化的：

$$E_{\beta}(z+L)=E_{\beta}(z) \tag{10.109}$$

式(10.106)称作 Bloch 波条件，其中 $E_{\beta}(z)$ 是周期变化性的。这个周期性函数可展开为傅里叶级数：

$$E_{\beta}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m\exp(-\mathrm{j}2m\pi z/L) \tag{10.110}$$

且 $E(z)$ 可写为

$$E(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m\exp[-\mathrm{j}(\beta+2m\pi/L)z]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m\exp(-\mathrm{j}\beta_m z) \tag{10.111}$$

式中

$$\beta_m=\beta+\frac{2m\pi}{L} \tag{10.112}$$

同时考虑正向和负向行波，$E(z)$ 可以表示为[1]

$$E(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m\exp(-\mathrm{j}\beta_m z)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m\exp(+\mathrm{j}\beta_m z) \tag{10.113}$$

接下来，我们考虑波在由等离子体层和自由空间交替分布的周期性媒质中的传播问题。如图 10.11 所示，与文献[12]中一样：一个单元由自由空间层 $-l<z<l$ 和等离子体层 $l<z<l+d$ 组成，等离子体频率为 ω_{p0}。单元的厚度是 $L=2l+d$。在单元中的电场可以写为

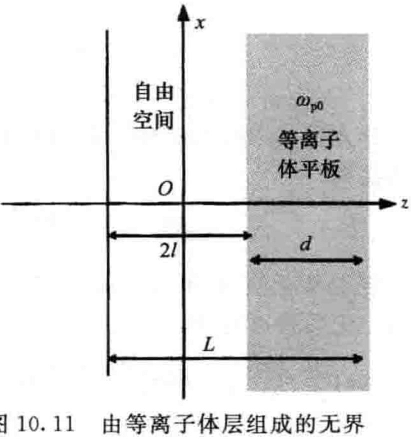


图 10.11　由等离子体层组成的无界周期媒质中的单元

$$E(z)=A\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}z\right)+B\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}z\right),\quad -l\leqslant z\leqslant l \tag{10.114}$$

$$E(z)=C\exp\left[-\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}(z-l)\right]+D\exp\left[\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}(z-l)\right],\quad l\leqslant z\leqslant l+d \tag{10.115}$$

式中，n 是等离子体介质的折射系数：

$$n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{p}}}=\sqrt{1-\omega_{\mathrm{p0}}^{2}/\omega^{2}} \tag{10.116}$$

在分界上，切向电场和磁场的连续性条件可以转化为 E 与 $\partial E/\partial z$ 的连续性条件：

$$E(l^{-})=E(l^{+}) \tag{10.117}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}(l^{-})=\frac{\partial E}{\partial z}(l^{+}) \tag{10.118}$$

$$E(l+d^{-})=E(l+d^{+}) \tag{10.119}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}(l+d^{-})=\frac{\partial E}{\partial z}(l+d^{+}) \tag{10.120}$$

由式(10.117)和式(10.118)，可得

$$A\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)+B\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)=C+D \tag{10.121}$$

$$A\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)-B\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)=n(C-D) \tag{10.122}$$

因为 $l+d^{+}=-l^{+}+L$，由式(10.104)可得

$$E(l+d^{+})=E(-l^{+}+L)=\exp(-\mathrm{j}\beta L)E(-l^{+}) \tag{10.123}$$

由式(10.114)、式(10.115)、式(10.119)和式(10.123)，可得：

$$C\exp\left(-\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}d\right)+D\exp\left(\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}d\right)=\exp(-\mathrm{j}\beta L)\left[A\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)+B\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)\right] \tag{10.124}$$

从式(10.114)、式(10.115)、式(10.120)和式(10.123)，可得：

$$\begin{aligned}&-n\,\frac{\omega}{c}C\exp\left(-\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}d\right)+n\,\frac{\omega}{c}D\exp\left(\mathrm{j}n\,\frac{\omega}{c}d\right)\\&=\exp(-\mathrm{j}\beta L)\left[-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}A\exp\left(-\frac{\mathrm{j}\omega l}{c}\right)+\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}B\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}l\right)\right]\end{aligned} \tag{10.125}$$

方程式(10.121)、方程式(10.122)、方程式(10.124)和方程式(10.125)可以整理为矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l/c} & \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega l/c} & -1 & -1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l/c} & -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega l/c} & -n & n\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l/c} & \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega l/c} & -\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta L-n\omega d/c)} & -\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta L+n\omega d/c)}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l/c} & -\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega l/c} & -n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta L-n\omega d/c)} & n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta L+n\omega d/c)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\\D\end{bmatrix}=0 \tag{10.126}$$

让方程式(10.126)中方阵的行列式等于零，可以得到场的一个非零解。由此得到如下色散关系

$$\cos\beta L=\cos\frac{n\omega d}{c}\cos\frac{2\omega l}{c}-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\omega d}{c}\sin\frac{2\omega l}{c} \tag{10.127}$$

使用参考值 β_{r} 和 $\omega_{\mathrm{r}}=\beta_{\mathrm{r}}c=2\pi c/\lambda_{\mathrm{r}}$，可以研究上述方程的解。因此，方程式(10.127)的归一化形式可写为

$$\cos\left(\frac{\beta}{\beta_{\mathrm{r}}}\,\frac{2\pi L}{\lambda_{\mathrm{r}}}\right)=\cos\left(\frac{n\omega}{\omega_{\mathrm{r}}}\,\frac{2\pi d}{\lambda_{\mathrm{r}}}\right)\cos\left(\frac{2\omega}{\omega_{\mathrm{r}}}\,\frac{2\pi l}{\lambda_{\mathrm{r}}}\right)-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n\omega}{\omega_{\mathrm{r}}}\,\frac{2\pi d}{\lambda_{\mathrm{r}}}\right)\sin\left(\frac{2\omega}{\omega_{\mathrm{r}}}\,\frac{2\pi l}{\lambda_{\mathrm{r}}}\right) \tag{10.128}$$

图 10.12 所示为 $\omega/\omega_{\mathrm{r}}$ 和 β/β_{r} 的关系曲线，参数取值为：$L=0.6\lambda_{\mathrm{r}}$，$d=0.2\lambda_{\mathrm{r}}$ 和 $\omega_{\mathrm{p0}}=$

$1.2\omega_r$。我们看到，在频带 $0<\omega/\omega_r<0.611$ 中波是倏逝波。这个阻带是由于层结构中的等离子体介质产生的。如果在层结构中都是电介质层，就不会出现这个阻带。在频带 $0.877<\omega/\omega_r<1.225$ 中又存在一个阻带。这条阻带的出现是由于媒质的周期特性所引起的。周期性电介质层确实会呈现出这样的禁带。在光学中用这一原理来构造具有极大反射比的布拉格反射器(Bragg reflector)[9]。图 10.13 为折射系数 $n=1.8$ 时的电介质层的 ω-β 的关系曲线。在这种情况下，第一个阻带是 $0.537<\frac{\omega}{\omega_r}<0.779$。

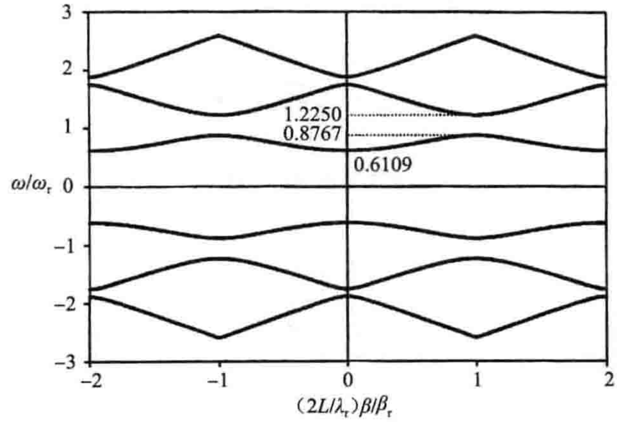


图 10.12　当 $d=0.2\lambda_r$，$L=0.6\lambda_r$ 时，周期等离子体媒质的色散关系式

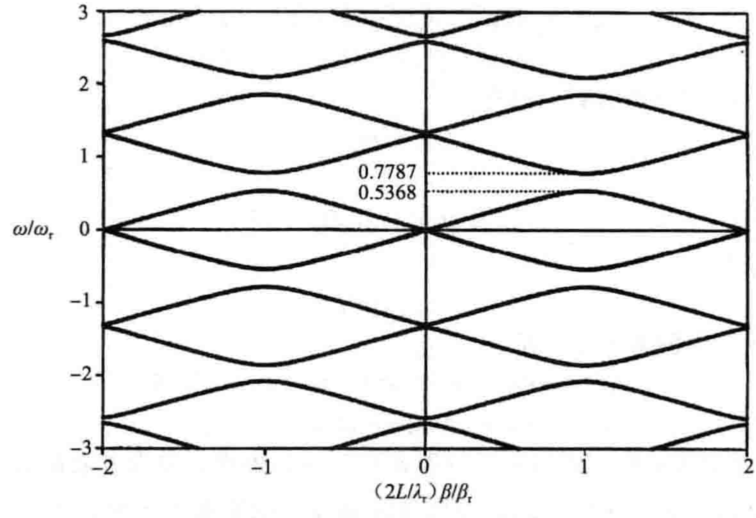


图 10.13　当 $d=0.2\lambda_r$，$L=0.6\lambda_r$ 时，周期电介质层的色散关系式。电介质层的折射系数是 1.8

10.8　表面波

让我们返回来一点，考虑 p 波斜入射到半无限空间中的等离子体。这种情况下，在半无限空间中的等离子体内只能激起外向波。方程式(10.75)变为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ C\eta_{y1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{x1}^{P} \\ E_x^{R} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}E_x^{I} \tag{10.129}$$

给定入射波的电场，由方程式(10.129)可以解出反射波和等离子体空间中波的电场。

如果 E_x^{I} 是零(没有入射波)，我们期望得到 $E_{x1}^{\mathrm{P}}=E_x^{\mathrm{R}}=0$。通常这个结论是正确的，但有一个例外。当方程式(10.129)中左边方阵的行列式为零时，会出现这个例外。在这种情况下，即使 E_x^{I} 是零，E_{x1}^{P} 和 E_x^{R} 也可能不为零，这表明即使不存在入射场，在自由空间中都有可能存在场量。对于这个例外的特解，反射系数是无穷大，也就是说 $E_x^{\mathrm{R}}\neq 0$，但是 $E_x^{\mathrm{I}}=0$。这个解是一个特征解，它给出了表面等离子体的色散关系。由式(10.73)和式(10.129)，得到的色散关系为

$$1+C\eta_{y1}=1+C\frac{\varepsilon_{\mathrm{p}}}{q_1}=0 \tag{10.130}$$

如果注意到

$$k_0q_1=\sqrt{k_0^2\varepsilon_{\mathrm{p}}-k_x^2} \tag{10.131}$$

和

$$k_0^2C^2=k_0^2-k_x^2 \tag{10.132}$$

式中

$$k_0=\frac{\omega}{c} \tag{10.133}$$

$$k_x=k_0S \tag{10.134}$$

那么，色散关系可以写为

$$k_x^2=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_{\mathrm{p}}}{1+\varepsilon_{\mathrm{p}}} \tag{10.135}$$

在 $z>0$ 和 $z<0$ 时，指数因子可以分别写为

$$\psi^{\mathrm{P1}}=\exp[-\mathrm{j}k_xx-\mathrm{j}k_0q_1z],\quad z>0 \tag{10.136}$$

$$\psi^{\mathrm{R}}=\exp[-\mathrm{j}k_xx+\mathrm{j}k_0Cz],\quad z<0 \tag{10.137}$$

可以证明，k_x 是一个实数，且有

$$\alpha_1=\mathrm{j}k_0q_1 \tag{10.138}$$

和

$$\alpha_2=\mathrm{j}k_0C=\mathrm{j}\sqrt{k_0^2-k_x^2} \tag{10.139}$$

都是正实数，如果

$$\varepsilon_{\mathrm{p}}<-1 \tag{10.140}$$

当方程式(10.140)得到满足时，有

$$\psi^{\mathrm{P1}}=\exp(-\alpha_1z)\exp(-\mathrm{j}k_xx),\quad z>0 \tag{10.141}$$

$$\psi^{\mathrm{R}}=\exp(\alpha_2z)\exp(-\mathrm{j}k_xx),\quad z<0 \tag{10.142}$$

式中，α_1 和 α_2 都是正实数。式(10.141)和式(10.142)表明，波沿着表面传播，但在垂直于表面的方向衰减。由于这个原因，波称作表面波。在等离子体中，当 $\omega<\omega_{\mathrm{p}}/\sqrt{2}$ 时，ε_{p} 将小于-1。因此，在自由空间和等离子体介质的分界面上可以传播一个表面波。

如果定义表面模式的折射系数为 n，也就是说，

$$n=\frac{c}{\omega}k_x \tag{10.143}$$

那么，式(10.135)可以写为

$$n^2=\frac{\Omega^2-1}{2\left(\Omega^2-\frac{1}{2}\right)},\quad \Omega<\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10.144}$$

当 $0<\omega<\omega_{\mathrm{p}}/\sqrt{2}$ 时，n 是实数，表面波能够传播。在这个 ω 范围内，介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{p}}<1$。

表面波模式在文献中称为法诺模式(Fano mode)[13]，也称为非辐射表面等离子体。在区间 $1<\Omega<\infty$ 中，n^2 是正的且小于 0.5。然而，由式(10.138)和式(10.139)得到的 α 值是虚数。在这种情况下，波不再被束缚在分界面上，这种模式(称为布儒斯特模式)是辐射模式，称为辐射表面等离子体。图 10.14 画出了 $\varepsilon_p(\omega)$ 和 $n^2(\omega)$ 的关系曲线。另一种方法是画出 Ω-K 图，其中 Ω 和 K 分别是归一化的频率与波数，分别为

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p} \tag{10.145}$$

$$K = \frac{ck_x}{\omega_p} = n\Omega \tag{10.146}$$

从式(10.143)和式(10.144)，可以得到如下关系：

$$K^2 = n^2\Omega^2 = \frac{\Omega^2(\Omega^2-1)}{2\Omega^2-1} \tag{10.147}$$

法诺模式是一种称为表面等离子体的表面波，当 $\omega<\omega_p/\sqrt{2}$ 时存在。表面模式没有低频截止区。它由一个开放边界结构所导引。它的相速度小于光速。特征值谱是连续的。这与导体波导的特征值谱不同，导体波导在给定频率下具有无限个离散的传播模式。

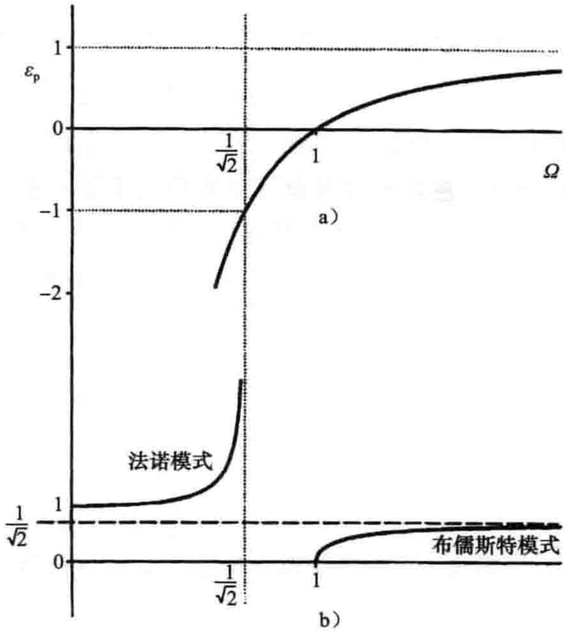


图 10.14 表面等离子体模式的折射系数

应用光子(电磁光波，见附录 10B)来激发表面等离子体会遇到一个困难，就是由于法诺模式的色散关系位于光线 $\Omega=K$ 的右边(见图 10.15)。对于一个给定的光子能量 $\hbar\omega$，波矢量为 ω/c。为了将光子转化为表面等离子体，必须使 ω/c 增加一个值 $\Delta k_x=(\omega_p/c)\Delta K$。常用于激发表面等离子体的两种技术是光栅耦合器和衰减全反射(ATR)法。文献[13]和[14]对表面等离子体进行了全面的介绍。

图 10.15 所示为 Ω-K 图形。

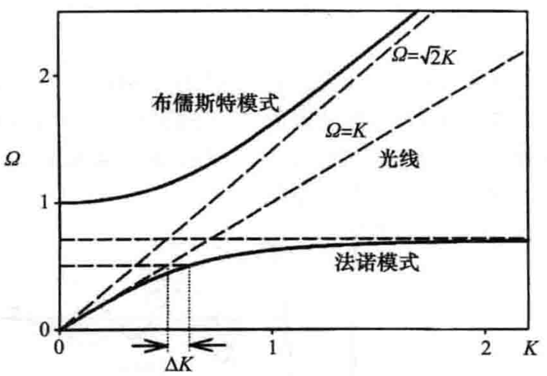


图 10.15 表面等离子体模式的 Ω-K 图

表面波也可以存在于电介质与等离子体平板的分界面上，或者电介质与等离子体圆柱的分界面上。文献[15]介绍了气体放电等离子体中表面波的理论。Kalluri 应用这一理论分析了等离子体羽衣产生反向散射的可能性，详细请参见附录 10A。Moissan 等[17]利用 Surfatron 的装置中的表面等离子体实现了等离子体发生器。它在微波频率段能高效发射可以产生等离子体的表面等离子体激元。

10.9 半空间等离子体的暂态响应

通过求出等离子体对一个时谐波的响应，可以得到有界半空间中紧束缚等离子体对暂态脉冲的反射。例如，如果 $R(j\omega)$ 是反射系数，就可以得到脉冲平面波 $e_r(t)$ 的响应[18]。

让 $e_0(t)=\delta(t)$ 为在 $z=0$ 处脉冲平面波的电场。它的拉普拉斯变换为

$$E_0(s) = L[e_0(t)] = L[\delta(t)] = 1 \tag{10.148}$$

如果反射场是指在分界面 $e_r(t)$ 的入射点上，那么它的拉普拉斯变换 $E_r(s)$ 由下式给出

$$E_r(s) = R(s)E_0(s) = R(s) \tag{10.149}$$

式中，用 s 替换 $R(j\omega)$ 中的 $j\omega$ 得到 $R(s)$，由 $R(s)$ 的逆拉普拉斯变换得到 $e_r(t)$：

$$e_r(t) = L^{-1}R(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1+j\infty}^{\sigma_1+j\infty} R(s)e^{st}\,ds \tag{10.150}$$

为了进行数值计算，式(10.150)可以解析地修正为[19]

$$e_r(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}[j\omega]\cos\omega t\,d\omega \tag{10.151}$$

在上式中，假定 $t<0$ 时 $e_r(t)=0$，Re 表示取实部。

10.9.1 各向同性等离子体半空间中的 s 波

考虑 s 波斜入射的情况。可以证明[18]，有

$$R_s(j\omega) = \frac{j\omega C - j^2\omega^2 C^2 + \omega_p^2}{j\omega C + j^2\omega^2 \tau C^2 + \omega_p^2} \tag{10.152}$$

$$R_s(s) = \frac{[s-(s^2+\omega_{p1}^2)^{\frac{1}{2}}]^2}{\omega_{p1}^2} \tag{10.153a}$$

式中

$$\omega_{p1} = \frac{\omega_p}{C} \tag{10.153b}$$

$$C = \cos\theta \tag{10.153c}$$

θ 是入射角。由拉普拉斯变换表[11]，可以查得

$$\Lambda^{-1}[(s^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-s]^{\nu} = \frac{\nu b^2}{t}J_{\nu}(bt),\quad v>0 \tag{10.154}$$

因此，可以得到方程式(10.153)的逆拉普拉斯变换，结果为

$$\omega_p^{-1}e_r(t) = -\frac{2}{\omega_p t}J_2\left(\frac{\omega_p t}{C}\right) \tag{10.155}$$

图 10.16 所示为不同入射角时的脉冲响应。色散的影响清晰可见。入射角对响应的振荡周期和幅值都有可以看得到的影响。可以看到，随着入射角减小(或是 C 增大)，响应的幅值(特别是在早期)减小，但振荡周期增大。当 $C=0.4$ 时，$\mathrm{Re}[R(\Omega)]$ 随 $\Omega=\omega/\omega_p$ 的变化曲线如图 10.16 中的插图所示。

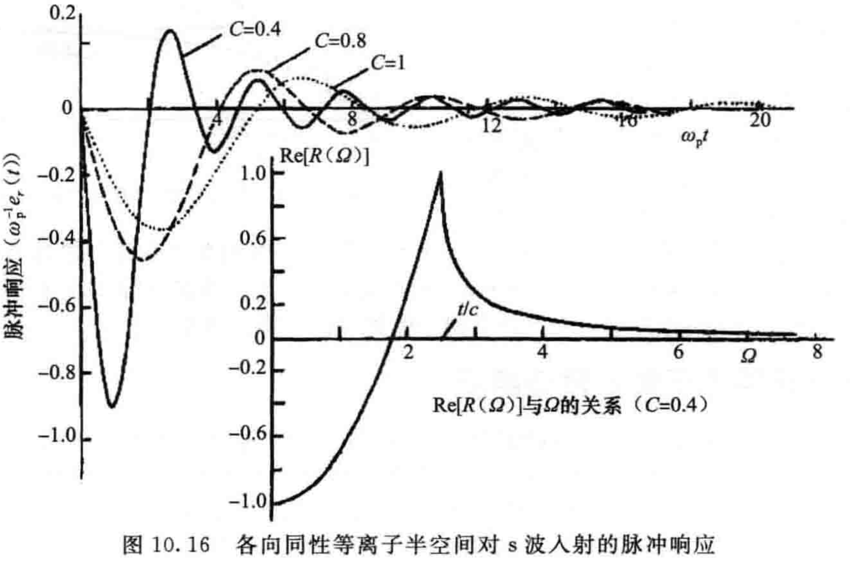


图 10.16 各向同性等离子半空间对 s 波入射的脉冲响应

10.9.2　包含等离子体平板的几种其他情况的脉冲响应

参考文献[18～26]及这些文献引用的参考材料提供了关于这个专题的补充文献。

10.10　孤波[27]

这个专题涉及通过平衡两个会产生非期望效应的复杂性的作用来实现所期望的电磁波变换。非线性媒质复杂性引起波的破碎与色散引起波的伸张之间的平衡过程，就会产生一个孤波。Hirose 和 Longren[27]用传输线模拟解释了色散和非线性这两个复杂性影响之间的平衡。

参考文献

1. Ishimaru, A., *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
2. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965.
3. Forstmann, F. and Gerhardts, R. R., *Metal Optics Near the Plasma Frequency*, Springer, New York, NY, 1986.
4. Boardman, A. D., *Electromagnetic Surface Modes*, Wiley, New York, NY, 1982.
5. Kalluri, D. K. and Prasad, R. C., Thin film reflection properties of isotropic and uniaxial plasma slabs, *Appl. Sci. Res. (Netherlands)*, 27, 415, 1973.
6. Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, NY, 1941.
7. Kalluri, D. K. and Prasad, R. C., Transmission of power by evanescent waves through a plasma slab, *1980 IEEE International Conference on Plasma Science*, Madison, WI, 11, 1980.
8. Lekner, J., *Theory of Reflection*, Kluwer, Boston, MA, 1987.
9. Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York, NY, 1988.
10. Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
11. Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, NY, 1965.
12. Kuo, S. P. and Faith, J., Interaction of an electromagnetic wave with a rapidly created spatially periodic plasma, *Phys. Rev. E*, 56, 1, 1997.
13. Boardman, A. D., Hydrodynamic theory of plasmon–polaritons on plane surfaces, in *Electromagnetic Surface Modes*, Boardman, A. D., Wiley, New York, NY, 1982, chap. 1.
14. Raether, H., *Surface Plasmons*, Springer, New York, NY, 1988.
15. Shivarova, A. and Zhelyazkov, I., Surface waves in gas-discharge plasmas, in *Electromagnetic Surface Modes*, Boardman, A. D., Ed., Wiley, New York, NY, 1982, chap. 12.
16. Kalluri, D. K., Backscattering from a plasma plume due to excitation of surface waves, *Final Report Summer Faculty Research Program*, Air Force Office of Scientific Research, 1994.
17. Moissan, C., Beandry, C., and Leprince, P., *Phys. Lett.*, 50A, 125, 1974.
18. Prasad, R. C., Transient and frequency response of a bounded plasma, Doctoral Thesis, Birla Institute of Technology, Ranchi, India, 1976.
19. Ley, B. J., *Computer Aided Analysis and Design for Electrical Engineering*, Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, 1970.
20. Kalluri, D. and Prasad, R. C., Transient response of a cold lossless plasma half-space in the presence of transverse static magnetic field, *J. Appl. Phys.*, 49(6), 3593–3594, 1978.
21. Kalluri, D. and Prasad, R. C., Reflection of an impulsive plane wave by a plasma half-space moving perpendicular to the plane of incidence, *J. Appl. Phys.*, 49(5), 2696–2699, 1978.
22. Prasad, R. C. and Kalluri, D., Reflection of an obliquely incident impulsive plane wave from isotropic and uniaxial cold lossy plasma half-spaces, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-6(4), 543–549, 1978.
23. Kalluri, D. and Prasad, R. C., On impulse response of plasma half-space moving normal to the interface-I: Formulation of the solution, 1979 *IEEE International Conference on Plasma Science*, 4–6 June 1979, Montreal, Quebec Canada, Conference Record-Abstracts, p. 155.
24. Kalluri, D. and Prasad, R. C., On impulse response of plasma half-space moving normal to the interface-II: Results, 1979 *IEEE International Conference on Plasma Science*, 4–6 June 1979, Montreal, Quebec, Canada, Conference Record-Abstracts, pp. 154–155.
25. Kalluri, D. and Prasad, R. C., Transient response of a cold lossless plasma half-space in the presence of transverse static magnetic field, *J. Appl. Phys.*, 50(4), 2959–2961, 1979.
26. Prasad, R. C. and Kalluri, D., Impulse response of a lossy magnetoplasma half-space moving along the magnetic field, 1980 *IEEE International Conference on Plasma Science*, 19–21 May 1980, Madison, WI, Conference Record-Abstracts, pp. 11–12.
27. Hirose, A. and Longren, K. E., *Introduction to Wave Phenomena*, Wiley, New York, NY, 1985.

第11章

空间色散和热等离子体⊖

第 10 章讨论了波在各向同性冷等离子体中的传播，重点强调了色散的影响，更确切地说是时间色散。在文献中，冷等离子体有时称为“温等离子体”[1,2]。热等离子体的介电常数不仅是频率 ω 的函数，还是波数 k 的函数。由于这个原因，热等离子体可以说既是空间色散的又是时间色散的[1~3]。在光频段，金属可以看成一种热等离子体[4]，费米速度即热等离子体中的热速度。据说基于冷等离子体的模型表示局域光学，而热等离子体模型则表示非局域光学。11.7 节给出了用于描述等离子体状态的技术名词的一些基本解释，参考文献解释了更加深入的含义。

11.1 可压缩气体中的波

可压缩气体满足状态方程

$$P = k_B NT \tag{11.1}$$

式中，P 是压强，N 是分子数密度，T 是温度，k_B 是玻尔兹曼常数(1.38×10^{-23} J/K)。

令

$$P = P_0 + p \tag{11.2}$$

$$N = N_0 + n \tag{11.3}$$

标有下标 0 的变量表示平均值，小写字母则表示交流值。

对于一个等温过程(T 为常数)，由式(11.1)～式(11.3)，可得

$$P_0 = k_B N_0 T$$

$$p = k_B nT$$

对于声波，采用无热传递的绝热过程比较合适；P 和 N 满足关系式

$$\frac{P}{N^\gamma} = \frac{P_0}{N_0^\gamma} \tag{11.4}$$

式中，γ 是热容比。

γ 的值取决于气体的类型(单原子的、双原子的、或多原子的)。对于一维等离子体问题，取 $\gamma=3$ 是合适的。

由式(11.2)～式(11.4)，有

$$p = \gamma k_B nT \tag{11.5}$$

流体动力学方程(Navier-Stokes 方程)是：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{N}\nabla p \tag{11.6}$$

式中，m 是微粒的质量。

连续性方程为

$$\nabla\cdot[Nv] + \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \tag{11.7}$$

在可压缩气体中，方程式(11.6)的右边不为零。

⊖ 第 11 章的附录参见附录 11A～11C。

对于小信号交流情况，经过线性化处理后，式(11.6)和式(11.7)可近似为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{N_0}\nabla p \tag{11.8}$$

$$N_0\nabla\cdot v=-\frac{\partial n}{\partial t} \tag{11.9}$$

对式(11.8)两边取散度，得到

$$\frac{\partial(\nabla\cdot v)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2 p}{N_0 m} \tag{11.10}$$

由式(11.9)和式(11.5)，得到

$$\nabla\cdot v=-\frac{1}{N_0\gamma k_B T}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{11.11}$$

将式(11.11)代入式(11.10)中，得到压强的波动方程

$$\nabla^2 p-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \tag{11.12}$$

式中，声速 a 为

$$a=\left(\frac{\gamma k_B T}{m}\right)^{1/2} \tag{11.13}$$

11.2　热等离子体中的波

我们考虑在气体中有带电粒子分布的情况。第 10 章讨论了自由电子气体，它称为冷等离子体，受力方程基于洛伦兹力

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-q\boldsymbol{E} \tag{11.14}$$

在冷等离子体中，我们忽略了式(11.6)右端的项，假设它与洛伦兹力相比可忽略不计。只要气体温度很低且认为气体不可压缩，这个假设就是成立的。在热等离子体中，我们考虑压强梯度对力的贡献，并将方程式(11.6)修正为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-q\boldsymbol{E}-\frac{1}{N}\nabla p \tag{11.15}$$

取式(11.15)的散度(取近似 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\to\partial/\partial t$)，

$$\frac{\partial(\nabla\cdot v)}{\partial t}=-q(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\frac{1}{N}\nabla^2 p \tag{11.16}$$

将式(11.11)代入式(11.16)中，得到压强的波动方程

$$\nabla^2 p-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+N_0 q\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{11.17}$$

利用麦克斯韦方程，可以消去式(11.17)中的变量 $\boldsymbol{E}$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-N_0 q v \tag{11.18}$$

$$0=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\varepsilon_0\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{E})}{\partial t}-N_0 q(\nabla\cdot v)$$

$$0=\varepsilon_0\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{E})}{\partial t}+\frac{q}{\gamma k_B T}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{q}{\gamma k_B T}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{11.19}$$

$$N_0 q\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{N_0 q^2}{\gamma k_B T\varepsilon_0}p=\frac{N_0 q^2}{m\varepsilon_0}\frac{m}{\gamma k_B T}p$$

$$N_0 q\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\omega_p^2}{a^2}p$$

因此，在热等离子体中，压强变量 p 的波动方程为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{a^2} p = 0 \tag{11.20}$$

为了得到电场的波动方程，我们应用麦克斯韦方程

$$\overline{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.21}$$

方程两边取旋度：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\partial t}$$

由式(11.18)，得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - N_0 q v\right)$$

由式(11.15)，可得

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + N_0\mu_0 q\left(-\frac{q}{m}\boldsymbol{E} + \frac{1}{N_0 m}\nabla p\right) = 0$$

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E} + \frac{\mu_0 q}{m}\overline{\nabla} p = 0$$

利用式(11.19)消去上式中的 p，有

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E} + \frac{\mu_0 q}{m}\overline{\nabla}\left(\frac{N_0 q a^2}{\omega_p^2}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right) = 0$$

经过化简，得到 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程为

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E} + \mu_0\varepsilon_0 a^2\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) = 0 \tag{11.22}$$

如果将 $a=0$ 代入式(11.22)中，就能得到冷等离子体中 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程

$$-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0$$

$$-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) + \nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}E = 0$$

对于均匀冷等离子体(不可压缩气体)，由于 $p=0$ 且 $\nabla\cdot E=0$，因此得到

$$\nabla^2\overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\overline{E} = 0 \tag{11.23}$$

对于一个相位因子为 $e^{j\omega t}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的时谐波，求方程式(11.22)的解。注意，对于这样一个相位因子，∇可以用$(-j\boldsymbol{k})$来替换，方程式(11.22)变为

$$-(-j\boldsymbol{k})\times(-j\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E} + \frac{a^2}{c^2}(-j\boldsymbol{k})(-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = 0$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E} - \frac{a^2}{c^2}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = 0 \tag{11.24}$$

因为 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}$，所以可以将方程式(11.24)写为

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right) - \left[k^2 - k_0^2\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\right]\boldsymbol{E} = 0 \tag{11.25}$$

方程式(11.24)可以分解为 $E_{\parallel}$ 和 $E_{\perp}$ 的波动方程，其中，$E_{\parallel}$ 是平行于 $\boldsymbol{k}$ 的分量，$E_{\perp}$ 是垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的分量。

对于平行分量 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=kE_{\parallel}$，有

$$k^2E_{\parallel}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right) - \left[k^2 - k_0^2\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\right]E_{\parallel} = 0$$

$$k^2 \frac{a^2}{c^2} + k_0^2\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$$

$$k^2 = k_0^2 \frac{(1 - (\omega_p^2/\omega^2))}{a^2/c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{a^2} \tag{11.26}$$

令

$$\frac{a}{c} = \delta \tag{11.27}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = X \tag{11.28}$$

于是，有

$$k^2 = k_0^2 \frac{1 - X}{\delta^2} \tag{11.29}$$

由式(11.21)，得到

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_0 \mathrm{j}\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \tag{11.30}$$

在这种情况下，因为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是平行的，所以有

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{11.31}$$

现在所讨论的平行模式在波传播方向上存在一个电场分量且磁场为零。它也称为一种电子等离子体波。像声波一样，它是一种可以通过带电可压缩流体的压力来修正的声波。它的相速度为

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{a}{\sqrt{1 - X}} = c\frac{\delta}{\sqrt{1 - X}} \tag{11.32}$$

电子等离子体波的 ω-k 图如图 11.1 所示。

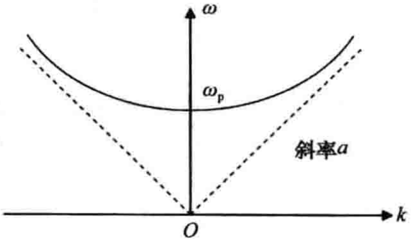


图 11.1 电子等离子体波的 ω-k 图

注意，在冷等离子体近似中，相速度 a 可以忽略不计，电子等离子体波在等离子体频率为 ω_p 时变成一个等离子体振荡。电子等离子体波的一种简单解释就是，当等离子体被看成热等离子体时，等离子体振荡就变成一种纵向电子等离子体波。

仅当 $\omega > \omega_p$ 时，电子等离子体波才能够传播。当 $\omega < \omega_p$ 时，波是倏逝波。现在，我们考察当 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 时波的传播。

由式(11.24)，可得

$$\left[k^2 - k_0^2\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\right]E_\perp = 0 \tag{11.33}$$

$$k^2 = k_0^2\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{11.34}$$

式(11.34)与第 10 章讨论的各向同性冷等离子体的色散关系相同。由式(11.30)，可以得到 $H_\perp$，这个结果表明：

$$E_\perp = \eta_p H_\perp \tag{11.35}$$

式中

$$\eta_p = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - X}} \tag{11.36}$$

尽管电子等离子体波和 TEM 波能独立存在于一个无限大热等离子体中，但是这两个波在有界热等离子体中的幅值却必须由边界条件确定。

11.3 有损热等离子体的本构关系

对于有损热等离子体，式(11.15)将被修正为如下形式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+m\nu v=-q\boldsymbol{E}-\frac{1}{N}\nabla p \tag{11.37}$$

因为

$$\boldsymbol{J}=-N_0qv \tag{11.38}$$

式(11.37)可以写为(用$-N_0q/m$乘以方程式(11.37)的两边)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}+\nu\boldsymbol{J}=\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2\boldsymbol{E}+\frac{v}{N}\nabla p$$

$$\nabla p=rk_\mathrm{B}T\nabla n$$

因为

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_\nu=-qn$$

$$\nabla n=-\frac{\varepsilon_0}{q}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$$

$$\nabla p=-\gamma k_\mathrm{B}T\frac{\varepsilon_0}{q}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$$

$$\frac{q}{m}\nabla p=-\frac{\gamma k_\mathrm{B}T\varepsilon_0}{m}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=-\varepsilon_0a^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$$

所以，本构关系为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}+\nu\boldsymbol{J}=\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0a^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) \tag{11.39}$$

利用式(11.39)和如下式所示的麦克斯韦方程，可以将热等离子体模拟为电介质

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{11.40}$$

如果在空间和时间中都是时谐变化 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$，则方程式(11.39)变为

$$\mathrm{j}(\omega+v)\boldsymbol{J}=\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0a^2(-\mathrm{j}\boldsymbol{k})(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})$$

因为

$$\boldsymbol{J}=J_{\parallel}+J_{\perp}\quad(\text{以 }\boldsymbol{k}\text{ 为参考})$$

$$\boldsymbol{E}=E_{\parallel}+E_{\perp}$$

$$(\mathrm{j}\omega+\nu)J_{\parallel}=\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2E_{\parallel}+\varepsilon_0a^2k_{\parallel}^2E_{\parallel} \tag{11.41}$$

$$(\mathrm{j}\omega+\nu)J_{\perp}=\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2E_{\perp}+0 \tag{11.42}$$

$$(\overline{\nabla}\times\overline{H})_{\perp}=J_{\perp}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0E_{\perp}=\left(\frac{\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{j}\omega+\nu}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\right)E_{\perp}$$

$$(\overline{\nabla}\times\overline{H})_{\perp}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{p}\perp}E_{\perp} \tag{11.43}$$

式中

$$\varepsilon_{\mathrm{p}\perp}=1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega-\mathrm{j}\nu)} \tag{11.44}$$

下面我们来推导 $\varepsilon_{\mathrm{p}\parallel}$ 的表达式。

从式(11.41)，可得

$$J_{\parallel}=\frac{\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{j}\omega+\nu}E_{\parallel}+\frac{\varepsilon_0a^2k_{\parallel}^2}{\mathrm{j}\omega+\nu}E_{\parallel}$$

$$(\overline{\nabla}\times\overline{H})_{\parallel}=J_{\parallel}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0E_{\parallel}=\frac{\varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{j}\omega+\nu}E_{\parallel}+\frac{\varepsilon_0a^2k_{\parallel}^2}{\mathrm{j}\omega+\nu}E_{\parallel}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0E_{\parallel}$$

$$(\overline{\nabla}\times\overline{H})_{\parallel}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{p}\parallel}E_{\parallel} \tag{11.45}$$

式中

$$\varepsilon_{p\|} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)} - \frac{a^2 k_{\|}^2}{\omega(\omega - j\nu)} \tag{11.46}$$

如果我们忽视碰撞，那么有

$$\varepsilon_{p\|} = 1 - \frac{\omega_p^2 + a^2 k_{\|}^2}{\omega^2} \tag{11.47}$$

用式(11.26)来替换 $k_{\|}$，我们得到

$$\varepsilon_{p\|} = 0 \tag{11.48}$$

即便计及碰撞，这个结果也是成立的。

方程式(11.47)中隐含着，即使 $D_{\|}=0$，$E_{\|}$ 也可能是非零的。

利用式(11.47)，就可以得到色散关系式(11.26)和 ω-k 关系图 11.1。

11.4　无损热等离子体的电介质模型

如果把热等离子体看成一种电介质媒质，那么可以写出麦克斯韦方程和如下本构关系

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{11.49}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{11.50}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{11.51}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11.52}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{11.53}$$

$$\boldsymbol{D} = \eta_0 \bar{\varepsilon}_p \cdot \boldsymbol{E} \tag{11.54}$$

$$\bar{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p\perp} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{p\|} \end{bmatrix} \tag{11.55}$$

式中

$$\varepsilon_{p\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{11.56}$$

$$\varepsilon_{p\|} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - a^2 k_{\|}^2} \tag{11.57}$$

注意，当 $\varepsilon_{p\|}=0$ 时，方程式(11.47)和式(11.57)是一样的。

11.5　有损热等离子体的导体模型

如果把有损热等离子体看成一种导体媒质，那么可以写出麦克斯韦方程和如下本构关系

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.58}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{11.59}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{11.60}$$

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt} + \nu \boldsymbol{J} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 a^2 \nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{E}) \tag{11.61}$$

注意

$$\varepsilon_0 \nabla\cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{11.62}$$

$$\rho = -qn \tag{11.63}$$

$$\nabla p = \gamma k T \nabla n \tag{11.64}$$

在式(11.62)和式(11.63)中，ρ是电荷体密度。

对于时谐场，方程式(11.61)可以写为

$$\boldsymbol{J} = \bar{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{11.65}$$

$$\bar{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & \sigma_{\|} \end{bmatrix} \tag{11.66}$$

$$\sigma_{\perp} = -\mathrm{j}\varepsilon_0 \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega - \mathrm{j}\nu} \tag{11.67}$$

$$\sigma_{\|} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu) - ak_{\|}^2} \tag{11.68}$$

注意

$$\bar{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{I}} + \frac{\bar{\boldsymbol{s}}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0} \tag{11.69}$$

我们可以由 $\bar{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{p}}$ 得到电导率张量 $\bar{\boldsymbol{s}}$，反之亦然。

11.6 空间色散和非局域金属光学

热等离子体中的纵向波的色散关系式为

$$\varepsilon_{\mathrm{p}\|} = 0 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu) - a^2k^2} \tag{11.70}$$

其 ω-k 的关系图如图 11.1 所示。从下式的意义上来看，

$$\varepsilon_{\mathrm{p}\|} = \varepsilon_{\mathrm{p}\|}(\omega, k) \tag{11.71}$$

热等离子体在空间和时间上都是色散的。

在 8.3 节中，我们把纯金属(比如钠)模拟为一种有损等离子体。对于钠来说，其典型值是 $\omega_{\mathrm{p}} = 8.2\times10^{15}\,\mathrm{rad/s}$ 和 $v/\omega_{\mathrm{p}} = 3\times10^{-3}$。等离子体频率在光频范围内。由于金属中电子密度很高，可以证明称为费米速度的参数 v_{f} 在把金属模拟为等离子体时也很重要[5]。对于钠，v_{f} 的典型值是 $v_{\mathrm{f}} = 9.8\times10^5\,\mathrm{m/s}$。费米速度 v_{f} 就相当于热等离子体中的声速。因此，在等离子体频率附近，为研究金属薄膜与光波的相互作用就需要将金属模拟为一种热等离子体。热等离子体模型考虑了当入射波是 p 波时，由金属中的电子等离子体波激发而产生的空间色散效应。空间色散具有重要的影响，关于空间色散效应的研究属于非局域光学的研究范畴，它与局域光学(菲涅尔光学)不同。Forstmann 和 Gerhardts 给出了热等离子体模型在非局域光学中应用的详细解释[4]。

11.7 等离子态的技术定义

前面已经给出了等离子体媒质的一种不精确的定义，将它定义为一种具有正离子和电子的电中性电离媒质。我们还使用了冷等离子体和热等离子体等名词。当阅读有关等离子体科学的书籍时，我们还会看到一些名词，比如，集体行为、温等离子体、热等离子体、非中性等离子体、德拜长度和等离子体壳层等。这一节主要定量地解释在 8.3 节、8.4 节、第 10 章和本章中所出现的各种名词。假设是具有一个自由度的一维电子-质子等离子体。

11.7.1 温等离子体

在冷等离子体中，我们忽略了温度的效应。热速度 V_{th} 和温度 T 之间的关系为

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{th}}^2 = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T \tag{11.72}$$

式(11.72)的右边是一电子伏(eV)的一半，如果代入玻尔兹曼常数 k_{B}，得到等效关系式

$$1\mathrm{eV} = 11\,000\mathrm{K} \tag{11.73}$$

在将麦克斯韦方程组和受力方程线性化时，假设电子速度 v 相对于 V_{th} 很小。冷等离子体近似忽略了空间色散效应，如果 V_{th} 小于波的相速度 $V_{ph}=\omega/k$，这将是一种有效的近似。因此，冷等离子体近似是有效的，如果[1]

$$v \ll V_{th} \ll V_{ph} \tag{11.74}$$

这样一来，将冷等离子体称为温等离子体就暗含着 $v \ll V_{th}$。

如果在某一温度下 V_{th} 近似地等于电子等离子体波的 V_{ph}，那么称这种等离子体为热等离子体。

11.7.2 德拜长度、集体行为和整体电中性

等离子体媒质可以屏蔽媒质中剩余的场。一个称为"德拜长度"λ_D 的特征距离是长度尺度参数，它保证了对等离子体中剩余电场的屏蔽[6]。德拜长度取决于温度和电子密度，由下式给出

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{Nq^2}\right)^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}\omega_p} \tag{11.75}$$

$$\lambda_D = 69\left(\frac{T}{N}\right)^{1/2} \tag{11.76}$$

可以证明[6]，等离子体中剩余电位 Φ 将作如下指数衰减

$$\Phi = \Phi_0 e^{-(|z|/\lambda_D)} \tag{11.77}$$

当 $|z|>5\lambda_D$ 时，$\Phi=\Phi_0 e^{-5}\approx 0$，因此剩余电位在大约五倍 λ_D 的范围内被屏蔽掉了。

如果等离子体系统的尺寸 L 远大于 λ_D，等离子体聚集的体积中是电中性的，也就是说，在宏观体积内净电荷为零

$$N_e \oplus N_i \oplus N \tag{11.78}$$

在式(11.78)中，N_i 为离子密度，N 通常指等离子体密度。在词语"中性"前面的限定词"整体"用来表明等离子体没有完全中性地去抵消全部有关的电磁力。因为电库仑力与距离的平方成反比，这种屏蔽是可能的。与其他短程力相比，我们认为这个力是长程力。如果假设电子是一个点电荷，那么在体积 $(4\pi/3)\lambda_D^3$ 中的电荷集体屏蔽了这个电子的效应。与单粒子之间的碰撞不同，正是这种集体行为控制着带电粒子的运动。只有当德拜体积中粒子密度足够大时，集体行为才会发生。

11.7.3 非中性等离子体

在速调管的电子束或回旋加速器的质子束中，都可以产生修正形式的德拜屏蔽现象。这些都不是严格意义上的等离子体，但因为它们也使用了集体行为和屏蔽的概念，并且使用了等离子物理中的数学分析工具，所以称它们为非中性等离子体[7]。

参考文献

1. Allis, W. P., Buchsbaum, S. J., and Bens, A., *Waves in Anisotropic Plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
2. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*. Wiley, New York, NY, 1965.
3. Akira I., *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
4. Forstmann, F. and Gerhardts, R. R., *Metal Optics Near the Plasma Frequency*, Springer, New York, NY, 1986.
5. Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York, NY, 2005.
6. Chen, F. F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Vol. 1), Plasma Physics, Springer, New York, NY, 1983.
7. Davidson, R. C., *Physics of Nonneutral Plasmas*, Addison-Wesley, New York, NY, 1990.

第12章 各向异性媒质和磁等离子体中的波

12.1 引言

处于恒定磁场中的等离子体媒质表现得就像是一种各向异性的电介质。因此，电磁波传播的规律与晶体中光波传播的规律一样。另外，当然必须考虑等离子体媒质的色散性质。

磁离子理论[1~3]主要研究在各向异性冷等离子体中任意极化平面波的传播问题，其中波的相位传播方向与恒定磁场方向成任意角度。当波在这样的媒质中传播时，极化状态会连续地变化。然而，也存在某些特定的标准传播模式，波的极化状态是不变的。当相位传播方向沿恒定磁场方向时，左旋圆极化波(L 波)或右旋圆极化波(R 波)都是标准模式。这种传播称为纵向传播。寻常波(O 波)和非寻常波(X 波)都是横向传播的标准模式。12.3～12.5 节将探讨这些波的性质。

12.2 各向异性冷等离子体媒质的基本场方程

在恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 存在的情况下，因为有额外的磁力作用，所以力方程需要修正为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-q[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0] \tag{12.1}$$

关于 $\boldsymbol{J}$ 的本构关系的相应修正为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}} \tag{12.2}$$

式中

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}}=\frac{q\boldsymbol{B}_0}{m}=\omega_{\mathrm{b}}\hat{\boldsymbol{B}}_0 \tag{12.3}$$

在上式中，$\hat{\boldsymbol{B}}_0$ 是 $\boldsymbol{B}_0$ 方向上的单位矢量。ω_{b} 是电子回转频率的绝对值。

为了方便起见，这里重新写出方程式(1.1)和方程式(1.2)

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{12.4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \tag{12.5}$$

并且方程式(12.2)是基本方程，将用于讨论由磁化冷等离子体产生的电磁波转换。

取方程式(12.4)的旋度，并消去 $\boldsymbol{H}$，可以导出 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}}=0 \tag{12.6}$$

同样，可以得到磁场波动方程：

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\dot{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(\boldsymbol{r},t)\dot{\boldsymbol{H}}+\varepsilon_0\nabla\omega_{\mathrm{p}}^2(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}+\nabla\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{E})=0 \tag{12.7}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{12.8}$$

如果 ω_{p}^2 和 ω_{b} 仅随 t 变化，那么方程式(12.7)变为

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(t)\dot{\boldsymbol{H}} + \varepsilon_0\omega_{\mathrm{b}}(t)(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{E}}) = 0 \tag{12.9}$$

方程式(12.6)和方程式(12.7)包含多个场变量。可以将它们转化为关于一个变量的更高阶的方程。不管怎样，要获得这些高阶矢量偏微分方程有意义的解析解都是很困难的。本节的方程有利于利用数值方法进行求解。

像在各向同性情况中一样，下面将考虑某些特殊情况下的简单解，这里每次只强调一个参数或一个方面。这些简单解将为解决更加复杂的问题打下一定的基础。

12.3　一维方程:纵向传播及 L 波和 R 波

考虑这样一种特殊情况，1)变量仅是一个空间坐标的函数，比如 z 坐标，2)电场是圆极化的，3)恒定磁场是沿 z 方向的，4)各个变量分别记为

$$\boldsymbol{E} = (\hat{x} \mp \mathrm{j}\hat{y})E(z,t) \tag{12.10}$$

$$\boldsymbol{H} = (\pm \mathrm{j}\hat{x} + \hat{y})H(z,t) \tag{12.11}$$

$$\boldsymbol{J} = (\hat{x} \mp \mathrm{j}\hat{y})J(z,t) \tag{12.12}$$

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2(z,t) \tag{12.13}$$

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}} = \hat{z}\,\omega_{\mathrm{b}}(z,t) \tag{12.14}$$

E、H 和 J 的基本方程具有下面的简单形式：

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t} \tag{12.15}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} + J \tag{12.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2(z,t)E \pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(z,t)J \tag{12.17}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(z,t)E \mp \frac{\mathrm{j}}{c^2}\omega_{\mathrm{b}}(z,t)\frac{\partial E}{\partial t} \mp \mathrm{j}\mu_0\omega_{\mathrm{b}}(z,t)\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{12.18}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(z,t)\dot{H} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}\omega_{\mathrm{b}}(z,t)E \mp \mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(z,t)\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\\ &\pm \frac{1}{c^2}\mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(z,t)\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \mp \mathrm{j}\frac{\partial \omega_{\mathrm{b}}(z,t)}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z} \mp \mathrm{j}\varepsilon_0\frac{\partial \omega_{\mathrm{b}}(z,t)}{\partial z}\frac{\partial E}{\partial t} = 0\end{aligned} \tag{12.19}$$

如果 ω_{p} 和 ω_{b} 仅是时间的函数，那么方程式(12.19)可简化为

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\omega_{\mathrm{p}}^2(t)\dot{H} \mp \mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(t)\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \pm \frac{1}{c^2}\mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(t)\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \tag{12.20}$$

接下来，寻找在均匀时不变的无限大磁等离子体媒质中的平面波解，也即

$$f(z,t) = \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz)] \tag{12.21}$$

$$\omega_{\mathrm{p}}^2(z,t) = \omega_{\mathrm{p}}^2 \tag{12.22}$$

$$\omega_{\mathrm{b}}(z,t) = \omega_{\mathrm{b}} \tag{12.23}$$

这里，f 代表场变量 E、或 H 或 J。根据方程式(12.16)和方程式(12.17)，可以证明：

$$\mathrm{j}kH = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{pR,L}}E \tag{12.24}$$

式中

$$\varepsilon_{\mathrm{pR,L}} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{\mathrm{b}})} \tag{12.25}$$

上述结果已经清楚地表明，在这种情况下可以把磁等离子体模拟为一种介电常数由

式(12.25)给出的电介质。色散关系可由下式得到

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{pR,L} \tag{12.26}$$

将上式展开后，得到

$$\omega^3 \mp \omega_b\omega^2 - (k^2c^2 + \omega_p^2)\omega \pm k^2c^2\omega_b = 0 \tag{12.27}$$

介电常数可以用 ω_{c1} 和 ω_{c2} 写为另一种形式，其中 ω_{c1} 和 ω_{c2} 称为截止频率：色散关系也可以用这两个截止频率表示为

$$\varepsilon_{pR,L} = \frac{(\omega \pm \omega_{c1})(\omega \mp \omega_{c2})}{\omega(\omega \mp \omega_b)} \tag{12.28}$$

$$\omega_{c1,c2} = \mp\frac{\omega_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_b}{2}\right)^2 + \omega_p^2} \tag{12.29}$$

$$k_{R,L}^2c^2 = \omega^2\varepsilon_{pR,L} = \frac{\omega(\omega \pm \omega_{c1})(\omega \mp \omega_{c2})}{\omega \mp \omega_b} \tag{12.30}$$

在上式中，上面的符号对应于右旋圆极化(R 波)，下面的符号对应于左旋圆极化(L 波)。图 12.1 与图 12.2 分别给出了 R 波中的 ε_p 和 ω 的关系曲线，以及 ω-k 的图形。图 12.3和图 12.4 分别给出了 L 波中 ε_p 与 ω 的关系曲线，以及 ω-k 的图形。R 波和 L 波都沿着恒定磁场的方向传播，且波的极化状态不发生改变，称为纵向传播的特征波。对于这些波来说，除了介电常数 ε_p 会受到恒定磁场力的影响外，媒质的行为就像一种各向同性的等离子体。在图 12.1 中要特别注意的是，在频段 $0<\omega<\omega_b$ 中，R 波的介电常数 $\varepsilon_p>1$。这种传播模式在有关电离层物理学的文献中称为惠斯勒模式(whistler mode)，在有关固态等离子体的文献中称为螺旋模式。注意，各向同性等离子体不支撑惠斯勒模式。

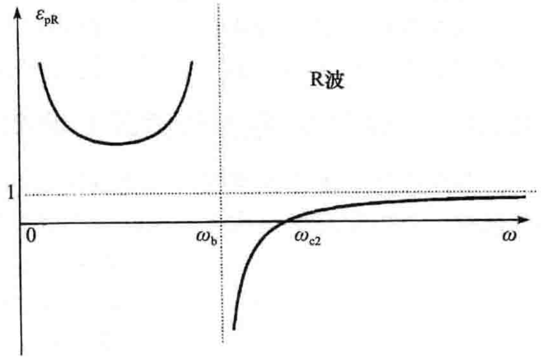


图 12.1 R 波的电介质常数

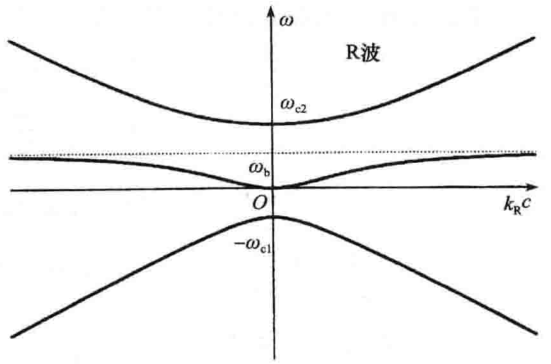


图 12.2 R 波的 ω-k 的图形

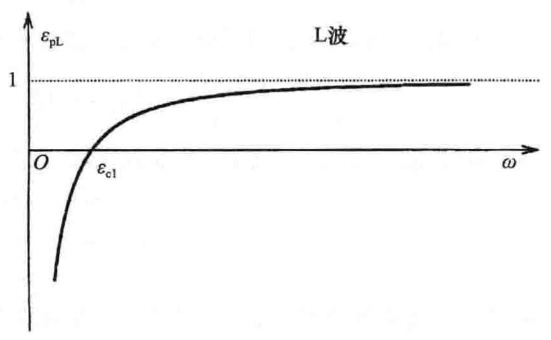


图 12.3 L 波的介电常数

直线极化波的纵向传播总是伴随着极化平面的法拉第旋转。这种现象可以很容易地用 R 和 L 特征波的传播来解释。一个直线极化波是 R 波和 L 波的叠加结果，它们中的每一个在传播时极化状态都不改变，但是相速度却不相同。(从方程式(12.25)中注意到，对于给定的 ω、ω_p 和 ω_b，因为在分母中符号的差别，R 波和 L 波中的 ε_p 是不一样的。)在传播一段距离 d 以后，两个波合成的结果又是一个直线极化波，但是极化平面旋转了一个角度 Ψ，Ψ 为

$$\Psi = \frac{1}{2}(k_L - k_R)d \tag{12.31}$$

附录 12A 更详细地讨论法拉第旋转。

在惠斯勒模式的低频部分中 ε_p 值很高，这可以通过文献[2]中给出的下面的计算来证明；当 $f_p = 10^{14}$ Hz，$f_b = 10^{10}$ Hz 和 $f = 10$Hz 时，$\varepsilon_p = 9 \times 10^{16}$。等离子体中信号的波长仅为 10cm。相关现象的介绍可以参考文献[4~6]。

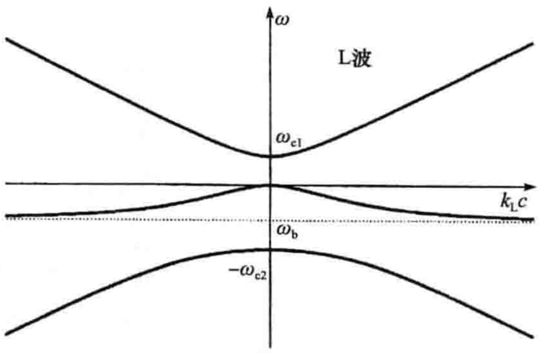


图 12.4 L 波的 ω-k 图

在 $\omega = \omega_b$ 处，R 波的谐振有着特殊的意义。可以证明，在这个频率附近，即便是一个低损耗等离子体，它也会强烈地吸收入射电磁波所携带的能量，用于加热等离子体。这种效应是聚变等离子体的射频加热[7]的基础。这种效应也用于实验测定晶体中一个电子的有效质量[8]。

对于 L 波，图 12.3 中没有出现任何谐振效应。事实上，L 波在离子回旋频率处存在谐振。在洛仑兹等离子体模型中，忽略了离子运动。如果考虑离子运动方程，就可以把电磁波变换理论简单地拓展到低频入射波[2,9~11]。

12.4 一维方程：横向传播及 O 波

接下来考虑电场沿 y 轴方向直线极化的情况，也即

$$\boldsymbol{E} = \hat{y} E(z,t) \tag{12.32}$$

$$\boldsymbol{H} = -\hat{x} H(z,t) \tag{12.33}$$

$$\boldsymbol{J} = \hat{y} J(z,t) \tag{12.34}$$

$$\omega_p^2 = \omega_p^2(z,t) \tag{12.35}$$

$$\boldsymbol{w}_b = \hat{y} \omega_b(z,t) \tag{12.36}$$

因为电流密度与恒定磁场方向相同，所以方程式(12.2)中右边最后一项是零。那么，这些方程就与各向同性情况下的方程没有区别，说明恒定磁场没有影响。电子沿着电场方向运动，在等离子体中产生了一个电流密度，其方向与恒定磁场方向相同。在这种情况下，电子不会受到任何磁场力，它们的运动轨迹不会弯曲，而是继续沿着电场方向运动。平面波在这样的媒质中的一维解就称为正常波或 O 波。它的特性与前面章节讨论的波的特性相同。与在 12.2 节中考虑的情况不同，在这种情况下，相位传播方向与恒定磁场的方向垂直，因此这种情况称为横向传播。

12.5 一维解：横向传播及 X 波

对于横向传播来说，更加复杂的情况是电场与恒定磁场相垂直情况。因为磁力的作用，使得原本沿着电场方向运动的电子的轨道发生改变并弯曲。电子的这种运动在相位传播方向上产生了一个附加电流密度分量。为了得到一个自洽解，不得不假设在相位传播方向上也存在一个电场分量。令

$$\boldsymbol{E} = \hat{x} E_x(z,t) + \hat{z} E_z(z,t) \tag{12.37}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{y} H(z,t) \tag{12.38}$$

$$\boldsymbol{J} = \hat{x} J_x(z,t) + \hat{z} J_z(z,t) \tag{12.39}$$

$$\omega_p^2 = \omega_p^2(z,t) \tag{12.40}$$

$$\boldsymbol{w}_b = \hat{y} \omega_b(z,t) \tag{12.41}$$

E、H 和 J 的基本方程具有以下形式

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \tag{12.42}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + J_x \tag{12.43}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = -J_z \tag{12.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2(z,t) E_x + \omega_\mathrm{b}(z,t) J_z \tag{12.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2(z,t) E_z - \omega_\mathrm{b}(z,t) J_x \tag{12.46}$$

让我们重新讨论在均匀时不变无限大磁等离子体媒质中平面波的解，将式(12.21)代入方程式(12.42)～方程式(12.46)中，有

$$-\mathrm{j}kE_x = -\mu_0 \mathrm{j}\omega H \tag{12.47}$$

$$\mathrm{j}kH = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_x + J_x \tag{12.48}$$

$$\varepsilon_0 \mathrm{j}\omega E_z = -J_z \tag{12.49}$$

$$\mathrm{j}\omega J_x = \varepsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2 E_x + \omega_\mathrm{b} J_z \tag{12.50}$$

$$\mathrm{j}\omega J_z = \varepsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2 E_z - \omega_\mathrm{b} J_x \tag{12.51}$$

由方程式(12.49)～方程式(12.51)，得到 J_x 和 E_x 之间的关系式

$$J_x = \varepsilon_0 \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{b}^2}{(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2)}} \frac{E_x}{\mathrm{j}\omega} \tag{12.52}$$

将式(12.52)代入方程式(12.48)中，

$$\mathrm{j}kH = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{pX} E_x \tag{12.53}$$

$$\varepsilon_\mathrm{pX} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2/\omega^2}{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{b}^2}{(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2)}} \tag{12.54}$$

可以用 ω_c1、ω_c2 和 ω_uh 来写出 ε_pX 的另一种表达式

$$\varepsilon_\mathrm{pX} = \frac{(\omega^2 - \omega_\mathrm{c1}^2)(\omega^2 - \omega_\mathrm{c2}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_\mathrm{uh}^2)} \tag{12.55}$$

在前面已经定义过截止频率 ω_c1 和 ω_c2，ω_uh 是上混合频率

$$\omega_\mathrm{uh}^2 = \omega_\mathrm{p}^2 + \omega_\mathrm{b}^2 \tag{12.56}$$

将色散关系 $k^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon_\mathrm{pX}$ 展开后，得到

$$\omega^4 - (k^2c^2 + \omega_\mathrm{b}^2 + 2\omega_\mathrm{p}^2)\omega^2 + [\omega_\mathrm{p}^4 + k^2c^2(\omega_\mathrm{b}^2 + \omega_\mathrm{p}^2)] = 0 \tag{12.57}$$

在得到方程式(12.57)的过程中，利用了式(12.54)所给出的 ε_pX 的表达式。为了画出 ω-k 图，使用式(12.54)所给出的 ε_pX 的表达式会方便一些，将色散关系写为

$$k^2c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_\mathrm{c1}^2)(\omega^2 - \omega_\mathrm{c2}^2)}{\omega^2 - \omega_\mathrm{uh}^2} \tag{12.58}$$

图 12.5 和图 12.6 分别画出了 ε_pX 和 ω，以及 ω 和 kc 的关系曲线。将式(12.49)和式(12.52)代入式(12.51)中，可以得出 E_z 与 E_x 的比值为

$$\frac{E_z}{E_x} = -\mathrm{j}\omega \frac{\omega_\mathrm{b}}{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}(\varepsilon_\mathrm{pX} - 1) \tag{12.59}$$

这表明在 x-z 平面中的极化是否为直线、圆形，或椭圆，取决于入射波的频率和等离子体参数。此外，利用式(12.52)和式(12.49)，$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系可以写为

$$\boldsymbol{J} = \bar{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{12.60}$$

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_z \end{bmatrix} = j\omega\varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{pX}-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} \tag{12.61}$$

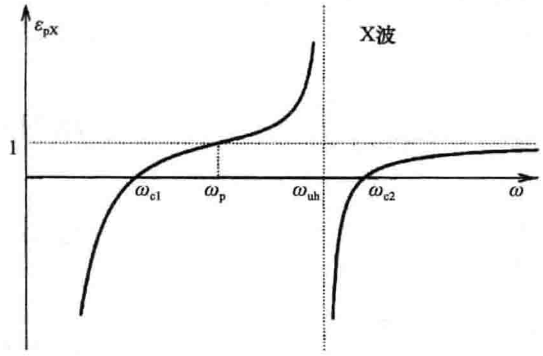


图 12.5　X 波的介电常数

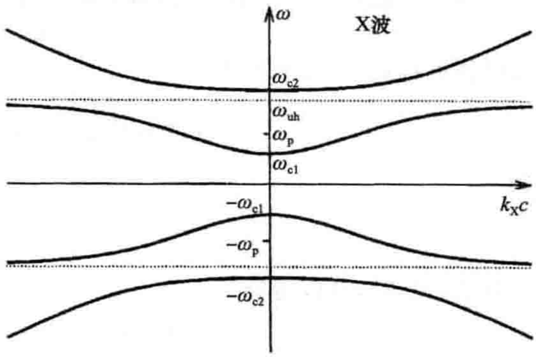


图 12.6　X 波的 ω-k 图

式中，$\overline{s}$ 是考虑目前情况下的电导率张量。等离子体的电介质模型可以由下式得到

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \overline{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{12.62}$$

其中，介电张量 $\overline{\boldsymbol{K}}$ 和 $\overline{s}$ 的关系为

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \overline{\boldsymbol{I}} + \frac{\overline{s}}{j\omega\varepsilon_0} \tag{12.63}$$

对于现在这种情况，由上式可以得到

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{pX} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} \tag{12.64}$$

这表示即使当 $E_z \neq 0$ 时，也有 $D_z = 0$。对于 X 波，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和波传播方向三者相互垂直。当 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 垂直时，$\boldsymbol{E}$ 和 $\overline{\boldsymbol{k}}$(传播方向上的单位矢量)就不再垂直。我们可以总结出如下各式

$$\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{H}} \neq \hat{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{D}} \times \hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.65}$$

$$E_x = \eta_{pX} H_y = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{pX}}} = \frac{\eta_0}{n_{pX}}, \tag{12.66}$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \neq 0, \quad \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{12.67}$$

在上式中，n_{pX}是折射率。图 12.7 是 X 波中各个分量的几何示意图。功率流的方向由坡印亭矢量 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ 决定，在现在这种情况下，坡印廷矢量的方向并不是沿相位传播的方向。在平面波中$D_z = 0$，这是由于在无源媒质中如下所示的散度方程成立

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{12.68}$$

这样一来，在各向异性媒质中，因为本构关系的张量特性，就不必要求电场散度也等于零。例如，根据下列关系式

$$D_z = \varepsilon_0 [K_{zx} E_x + K_{zy} E_y + K_{zz} E_z] \tag{12.69}$$

即使 E_z 不为零，D_z 也可能是零。

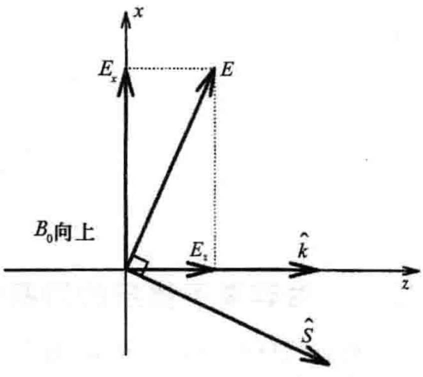


图 12.7　X 波的各个分量方向草图

12.6　有损磁等离子体媒质的介电张量

对于碰撞频率为 ν(rad/s)的有损等离子体，其本构关系可以通过修正方程式(12.2)得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}+\nu\boldsymbol{J}=\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}} \tag{12.70}$$

假设场随时间作时谐变化 $\exp(\mathrm{j}\omega t)$，且取 z 轴为恒定磁场的方向，

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{b}}=\hat{z}\,\omega_{\mathrm{b}} \tag{12.71}$$

可以将方程式(12.70)写作

$$(\nu+\mathrm{j}\omega)\begin{bmatrix}J_x\\J_y\end{bmatrix}=\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix}-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}\begin{bmatrix}J_y\\-J_x\end{bmatrix} \tag{12.72}$$

和

$$J_z=\frac{\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2}{\nu+\mathrm{j}\omega}E_z \tag{12.73}$$

方程式(12.72)可以写为

$$\begin{bmatrix}\nu+\mathrm{j}\omega & \omega_{\mathrm{b}}\\-\omega_{\mathrm{b}} & \nu+\mathrm{j}\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_x\\J_y\end{bmatrix}=\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix} \tag{12.74}$$

$$\begin{bmatrix}J_x\\J_y\end{bmatrix}=\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2\begin{bmatrix}\nu+\mathrm{j}\omega & \omega_{\mathrm{b}}\\\omega_{\mathrm{b}} & \nu+\mathrm{j}\omega\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix} \tag{12.75}$$

组合方程式(12.75)和方程式(12.73)，得到

$$\begin{bmatrix}J_x\\J_y\\J_z\end{bmatrix}=\bar{\mathbf{s}}\cdot E \tag{12.76}$$

式中

$$\bar{\mathbf{s}}=\begin{bmatrix}\sigma_{\perp} & -\sigma_{\mathrm{H}} & 0\\\sigma_{\mathrm{H}} & \sigma_{\perp} & 0\\0 & 0 & \sigma_{\|}\end{bmatrix} \tag{12.77}$$

在上式中，$\sigma_{\perp}$、σ_{H} 和 $\sigma_{\|}$ 分别称为垂直电导率、霍尔电导率(Hall conductivity)和平行电导率。根据式(12.63)，现在可以得到介电张量 $\overline{\boldsymbol{K}}$ 为

$$\overline{\boldsymbol{K}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{r}\perp} & -\mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{rH}} & 0\\\mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{rH}} & \varepsilon_{\mathrm{r}\perp} & 0\\0 & 0 & \varepsilon_{\mathrm{r}\|}\end{bmatrix} \tag{12.78}$$

式中

$$\varepsilon_{\mathrm{r}\perp}=1-\frac{(\omega_{\mathrm{p}}/\omega)^2(1-\mathrm{j}\nu/\omega)}{[1-\mathrm{j}(\nu/\omega)]^2-(\omega_{\mathrm{b}}/\omega)^2} \tag{12.79}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{rH}}=\frac{(\omega_{\mathrm{p}}/\omega)^2(\omega_{\mathrm{b}}/\omega)}{(1-\mathrm{j}\nu/\omega)^2-(\omega_{\mathrm{b}}/\omega)^2} \tag{12.80}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}\|}=1-\frac{(\omega_{\mathrm{p}}/\omega)^2}{1-\mathrm{j}\nu/\omega} \tag{12.81}$$

12.7 磁等离子体层的周期分布

在直流磁场中，半导体-电介质呈周期性放置的层状结构，可以模拟成磁等离子体层的周期性分布。应用12.6节中导出的介电张量，可以研究电磁波在这种结构中的传播问题。将10.7节中的理论拓展至磁化的等离子体层情况，从而考虑各向异性这一复杂性[12]。Brazis 和 Safonova[13~15]研究了在这种结构中的谐振与吸收频带。

12.8 表面磁等离子体

10.8节的理论可以推广到在恒定磁场存在情况下，分析表面波在半导体和电介质分界面

上的传播。在恒定电磁场中，半导体可以被模拟为一各向异性的介电张量。Wallis[16]详细地探讨了半导体中表面磁等离子体的性质。

12.9 周期介质中的表面磁等离子体

Wallis 等人[17,18]讨论了表面磁等离子体在截断超晶格中的传播。这种模型是 12.7 节和 12.8 节中所使用的模型的一种组合。

12.10 磁导率张量

在恒定磁场存在的情况下，铁氧体材料(参见 8.9 节)表现得就像是一种各向异性的磁介质。波在这种媒质中的传播性质与在磁等离子体中相似。磁导率是一个张量。附录 12B 讨论磁导率张量。

参考文献

1. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965.
2. Booker, H. G., *Cold Plasma Waves*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1984.
3. Swanson, D. G., *Plasma Waves*, Academic Press, New York, NY, 1989.
4. Steele, M. C., *Wave Interactions in Solid State Plasmas*, McGraw-Hill, New York, NY, 1969.
5. Bowers, R., Legendy, C., and Rose, F., Oscillatory galvanometric effect in metallic sodium, *Phys. Rev. Lett.*, 7, 339, 1961.
6. Aigrain, P. R., in *Proceedings of the International Conference on Semiconductor Physics*, Czechoslovak Academy Sciences, Prague, 224, 1961.
7. Miyamoto, K., *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1976.
8. Solymar, L. and Walsh, D., *Lectures on the Electrical Properties of Materials* (5th edition), Oxford University Press, Oxford, 1993.
9. Madala, S. R. V. and Kalluri, D. K., Longitudinal propagation of low frequency waves in a switched magnetoplasma medium, *Radio Sci.* 28, 121, 1993.
10. Dimitrijevic, M. M. and Stanic, B. V., EMW transformation in suddenly created two-component magnetized plasma, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 23, 422, 1995.
11. Madala, S. R. V., *Frequency shifting of low frequency electromagnetic waves using magnetoplasmas*, Doctoral Thesis, University of Massachusetts Lowell, Lowell, 1993.
12. Kalluri, D. K., *Electromagnetics of Time Varying Complex Media: Frequency and Polarization Transformer*, CRC Press/Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2010.
13. Brazis, R. S. and Safonova, L. S., Resonance and absorption band in the classical magnetoactive semiconductor–insulator superlattice. *Int. J. Infrared Millimeter Waves*, 8, 449, 1987.
14. Brazis, R. S. and Safonova, L. S., Electromagnetic waves in layered semiconductor–dielectric periodic structures in DC magnetic fields, *Proc. SPIE*, 1029, 74, 1988.
15. Brazis, R. S. and Safonova, L. S., In-plane propagation of millimeter waves in periodic magnetoactive semiconductor structures, *Int. J. Infrared Millimeter Waves*, 18, 1575, 1997.
16. Wallis, R. F., Surface magnetoplasmons on semiconductors, in *Electromagnetic Surface Modes*, Boardman, A. D., Ed. Wiley, New York, NY, 1982, chap. 2.
17. Wallis, R. F., Szenics, R., Quihw, J. J., and Giuliani, G. F., Theory of surface magnetoplasmon polaritons in truncated superlattices, *Phys. Rev. B*, 36, 1218, 1987.
18. Wallis, R. F. and Quinn, J. J., Surface magnetoplasmon polaritons in truncated superlattices, *Phys. Rev. B*, 38, 4205, 1988.

第13章

各向异性晶体中的光波

光学晶体是一种各向异性的电介质，在坐标轴与晶体主轴相一致的坐标系中，这种晶体的介电常数张量中的非对角线元素为零，并由下式给出

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

晶体的主折射率是

$$n_j = \left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}, \quad j = 1,2,3 \tag{13.2}$$

根据主折射率的个数，可将晶体分为双轴、单轴和各向同性三类：

$$n_1 \uparrow n_2 \uparrow n_3 \uparrow \quad \text{（双轴晶体）} \tag{13.3}$$

$$n_1 = n_2 = n_o, \quad n_3 = n_e \quad \text{（单轴晶体）} \tag{13.4}$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_o \quad \text{（各向同性晶体）} \tag{13.5}$$

第1章已经讨论过在各向同性晶体中波的传播性质。下面将由易及难地讨论波在晶体中的传播[1~3]。

13.1 双轴晶体中波沿主轴的传播

令晶体主轴与直角坐标系中的坐标轴相重合，则在空间和时间中都作谐函数变化的均匀平面波

$$f(\boldsymbol{r},t) = \exp[\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{13.6}$$

满足下列方程：

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B} \tag{13.7}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D} \tag{13.8}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{13.9}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0 \tag{13.10}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} \tag{13.11}$$

$$D_x = \varepsilon_0 n_x^2 E_x, \quad D_y = \varepsilon_0 n_y^2 E_y, \quad D_z = \varepsilon_0 n_z^2 E_z \tag{13.12}$$

式(13.7)～式(13.12)是由麦克斯韦方程组和晶体的本构关系得到的。由式(13.9)和式(13.10)，得到

$$B_k = D_k = 0 \tag{13.13}$$

又由式(13.7)和式(13.8)，得到

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}) = -\mu_0\omega^2\boldsymbol{D} \tag{13.14}$$

对于如下特殊情况

$$\boldsymbol{k} = \hat{z}\,k \tag{13.15}$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}\,E \tag{13.16}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{y}\,H \tag{13.17}$$

得到

$$(-k^2 + \mu_0\varepsilon_0\omega^2 n_x^2)E = 0 \tag{13.18}$$

因此，在这种情况下的色散关系式为

$$k^2 = n_x^2\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{13.19}$$

上述结果说明：在这种特殊情况下，沿某一主轴方向作直线极化并沿另一个主轴方向传播的波，除了有效折射率由极化方向的折射率给出之外，这个波与在各向同性介质中波的传播相似。

接下来，讨论由双轴晶体引起波的极化改变的例子。在这种晶体中，令沿 z 方向传播的波的电场 $\boldsymbol{E}$ 在 $z=0$ 处为

$$\boldsymbol{E}(0) = E_0[\hat{x}\cos45° + \hat{y}\sin45°],\quad z = 0 \tag{13.20}$$

这个波是一个直线极化波，在 $z=0$ 平面上，它的极化方向与 x 轴的夹角为 45°。如果把这个波看做两个波的叠加：一个是沿 x 方向的直线极化波，另一个是沿 y 方向的直线极化波，那么可以写出这个波在 $z=d$ 处的电场为

$$\boldsymbol{E}(d) = \hat{x}E_0\cos45°\exp[\mathrm{j}(\omega t - n_x k_0 d)] + \hat{y}E_0\sin45°\exp[\mathrm{j}(\omega t - n_y k_0 d)] \tag{13.21}$$

注意，因为 $n_x k_0 d \neq n_y k_0 d$，所以波的相位会随 d 而变化。因此，波的极化不会保持直线极化。

13.2　沿任意方向波的传播

13.2～13.4 节使用的符号和公式都严格地与文献[3]中的符号与公式相同。令波传播方向上的单位矢量记为$\hat{e}_3$(见图 13.1)：

$$\boldsymbol{k} = k\,\hat{e}_3 \tag{13.22}$$

令$\hat{e}_1$ 为 x-y 平面上的一个单位矢量。如图 13.1所示，将$\hat{e}_3$ 在 x-y 平面上的投影旋转 90°就可以得到$\hat{e}_1$的方向。很明显，有

$$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0 \tag{13.23}$$

且

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (\hat{e}_1\cdot\hat{x})\,\hat{x} + (\hat{e}_1\cdot\hat{y})\,\hat{y}\\ &= \cos(90-\phi)\,\hat{x} + \cos(180-\phi)\,\hat{y}\\ &= \hat{x}\sin\phi - \hat{y}\cos\phi\end{aligned} \tag{13.24}$$

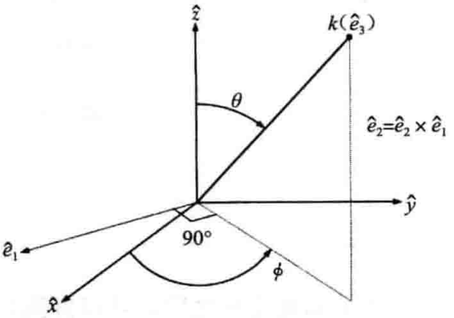


图 13.1　有一个坐标轴沿波法线方向的正交坐标系

令

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3\times\hat{e}_1 = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \tag{13.25}$$

单位矢量$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$ 和$\hat{e}_3$ 三者是相互正交的。一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为沿 x-y-z 坐标轴的各个分量或者沿$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$ 和$\hat{e}_3$ 方向的各个分量。在后一种情况中，记矢量 $\boldsymbol{A}_k$ 具有分量 A_1、A_2 和 A_3。将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_k$ 的各个分量相联系起来的变换可以写为

$$\boldsymbol{A}_k = \overline{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{A} \tag{13.26}$$

$$\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{T}}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}_k \tag{13.27}$$

注意下式，就很容易确定出这个变换

$$A_1 = \boldsymbol{A}_k\cdot\hat{e}_1 = \hat{x}A_x\cdot\hat{e}_1 + \hat{y}A_y\cdot\hat{e}_1 + \hat{z}A_z\cdot\hat{e}_1 = A_x\sin\phi - A_y\cos\phi \tag{13.28}$$

同样，可以得到变换矩阵$\overline{\boldsymbol{T}}$：

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix}\sin\phi & -\cos\phi & 0\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{13.29}$$

如果计算出$\overline{\boldsymbol{T}}^{-1}$，可以证明，有

$$\overline{\boldsymbol{T}}^{-1} = \left(\overline{\boldsymbol{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{13.30}$$

式中，上标 T 表示转置运算。定义一个非介电常数张量 $\overline{\eta}$(这里 $\overline{\eta}$ 不是特征阻抗)，

$$\eta = \varepsilon_{\mathrm{p}}^{-1} \tag{13.31}$$

式中

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \overline{\varepsilon}_{\mathrm{p}} \tag{13.32}$$

我们得到

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overline{\eta} \cdot \boldsymbol{D} \tag{13.33}$$

$$\overline{\boldsymbol{T}}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_k = \frac{1}{\varepsilon_0}\overline{\eta} \cdot \overline{\boldsymbol{T}}^{-1} \cdot \boldsymbol{D}_k \tag{13.34}$$

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{1}{\varepsilon_0}[\overline{\boldsymbol{T}} \cdot \overline{\eta} \cdot \overline{\boldsymbol{T}}^{-1}] \cdot \overline{\boldsymbol{D}}_k \tag{13.35}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_k = \frac{1}{\varepsilon_0}\overline{\eta}_k \cdot \overline{\boldsymbol{D}}_k \tag{13.36}$$

如果把 $\overline{\eta}_k$ 的元素记为 η_{ij}，那么式(13.33)就可以写为

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.37}$$

由式(13.7)、式(13.8)和式(13.37)，得到

$$\omega B_2 = kE_1 = \frac{k}{\varepsilon_0}[\eta_{11}D_1 + \eta_{12}D_2] \tag{13.38}$$

$$\omega B_1 = -kE_2 = -\frac{k}{\varepsilon_0}[\eta_{21}D_1 + \eta_{22}D_2] \tag{13.39}$$

$$\omega D_2 = -kH_1 = -\frac{kB_1}{\mu_0} \tag{13.40}$$

$$\omega D_1 = kH_2 = \frac{kB_2}{\mu_0} \tag{13.41}$$

消去其他变量之后，可以得到如下色散关系式

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} - \dfrac{u^2}{c^2} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} - \dfrac{u^2}{c^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{13.42}$$

式中，$u=\omega/k$ 是相速度。

13.3 沿任意方向波的传播：单轴晶体

举进一步计算的一个例子，现在只考虑单轴晶体情况。在这种情况下，

$$\overline{\eta}_k = \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta\cos^2\theta + \eta_z\sin^2\theta & (\eta - \eta_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\eta - \eta_z)\sin\theta\cos\theta & \eta\sin\theta + \eta_z\cos\theta \end{bmatrix} \tag{13.43}$$

式中

$$\eta = \frac{1}{n_{\mathrm{o}}^2} \tag{13.44}$$

$$\eta_z = \frac{1}{n_{\mathrm{e}}^2} \tag{13.45}$$

因此，

$$\eta_{11} = \eta \tag{13.46}$$

$$\eta_{12} = \eta_{21} = 0 \tag{13.47}$$

$$\eta_{22} = \eta\cos^2\theta + \eta_z\sin^2\theta \tag{13.48}$$

从式(13.42)和式(13.46)～式(13.48)，得到如下结果。

情况 1：

$$\left(\eta - \frac{u^2}{c^2}\right) = 0 \quad (D_1 \neq 0, D_2 = 0) \tag{13.49}$$

情况 2：

$$\eta_{22} = \eta\cos^2\theta + \eta_z\sin^2\theta = \frac{u^2}{c^2} \quad (D_1 = 0, D_2 \neq 0) \tag{13.50}$$

在第 1 种情况中，相速度为

$$u = \pm\frac{c}{n_o} \quad (\text{寻常波}) \tag{13.51}$$

在第 2 种情况中，相速度为

$$\frac{u}{c} = \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}} \quad (\text{异常波}) \tag{13.52}$$

在第 2 种情况，相速度依赖于 θ。

13.4　k 曲面

让 k 为标量波数，并由下式给出

$$k_z = k\cos\theta \tag{13.53}$$

$$k_s = k\sin\theta \tag{13.54}$$

式中，k_s 是横向波数。

对于第 1 种情况，有

$$u = \frac{c}{n_o} = \frac{\omega}{k} \tag{13.55}$$

$$k_z^2 + k_s^2 = k^2 = \frac{\omega^2 n_o^2}{c^2} \tag{13.56}$$

如图 13.2a 所示，在 k_s-k_z 平面上画出了这个圆。

对于第 2 种情况，有

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{13.57}$$

上式可写为

$$\frac{k_s^2}{n_e^2(\omega^2/c^2)} + \frac{k_z^2}{n_o^2(\omega^2/c^2)} = 1 \tag{13.58}$$

这样，在 k_s-k_z 平面上的曲线是一个椭圆，如图 13.2b 所示。

相速度为 ω/k，对于寻常波来说，对所有的 θ 值相速度都是相同的。对于异常波来说，因为 k 曲线是一个椭圆，所以 ω/k依赖于 θ。对于这种情况，群速度可以定义为一个矢量：

$$\boldsymbol{u}_g = \nabla_k\omega = \hat{k}_s\frac{\partial\omega}{\partial k_s} + \hat{z}\frac{\partial\omega}{\partial k_z} \tag{13.59}$$

在三维 k 空间中，对于寻常波，可得到一个球面；而对于异常波，可得到一个椭球面。

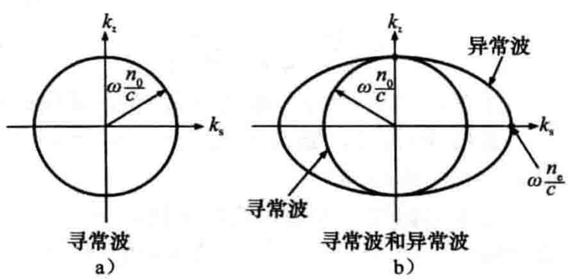


图 13.2　k 曲面

对于单轴晶体，沿两个主轴方向(在这里，在 x 和 y 方向记为 n_o)的折射率是相同的，而沿光轴方向(n_e 沿 z 轴)是不同的。注意，折射率曲面与 k_z 轴相接触。

13.5 群速度作为极角的函数

如果把光轴和波法线(相位传播的方向)之间的夹角叫作极角 θ，那么由式(13.58)，得到

$$\omega^2 = c^2\left(\frac{k_z^2}{n_o^2}+\frac{k_s^2}{n_e^2}\right)$$

$$\omega = c\left(\frac{k_z^2}{n_o^2}+\frac{k_s^2}{n_e^2}\right)^{1/2}$$

式中，c 是真空中的光速，$k_z=k\cos\theta$ 和 $k_s=k\sin\theta$：

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{c}{2}\left(\frac{k_z^2}{n_o^2}+\frac{k_s^2}{n_e^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2k_z}{n_o^2}\right) \tag{13.60}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_s} = \frac{c}{2}\left(\frac{k_z^2}{n_o^2}+\frac{k_s^2}{n_e^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2k_s}{n_e^2}\right) \tag{13.61}$$

注意到

$$\left(\frac{k_z^2}{n_o^2}+\frac{k_s^2}{n_e^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{c}{\omega}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{c}{2}\,\frac{2k_z}{n_o^2}\,\frac{c}{\omega} = \frac{k_z c^2}{\omega n_o^2} = \frac{c^2 k\cos\theta}{\omega n_o^2}$$

类似地，有

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_s} = \frac{c^2 k\sin\theta}{\omega n_e^2}$$

$$\boldsymbol{u}_g = c^2\,\frac{k}{\omega}\left(\frac{\sin\theta}{n_e^2}\,\hat{a}_s+\frac{\cos\theta}{n_o^2}\,\hat{a}_z\right) \tag{13.62}$$

群速度 $|\boldsymbol{u}_g|$ 的幅值由下式给出

$$|\boldsymbol{u}_g| = c^2\,\frac{k}{\omega}\left(\frac{\sin^2\theta}{n_e^4}+\frac{\cos^2\theta}{n_o^4}\right)^{1/2} \tag{13.63}$$

如果 $\omega/k=u$，那么相速度为

$$|\boldsymbol{u}_g|\,u = c^2\left(\frac{\sin^2\theta}{n_e^4}+\frac{\cos^2\theta}{n_o^4}\right)^{1/2} \tag{13.64}$$

如果 $\boldsymbol{u}_g$ 与极轴的夹角是 θ_g，那么

$$\tan\theta_g = \frac{u_{gs}}{u_{gz}} = \frac{\sin\theta/n_e^2}{\cos\theta/n_o^2} = \tan\frac{n_o^2}{n_e^2}$$

如果 $\alpha=\theta-\theta_g$，那么

$$\tan\alpha = \tan(\theta-\theta_g) = \frac{\tan\theta-\tan\theta_g}{1+\tan\theta\tan\theta_g}$$

$$= \frac{\tan(1-n_o^2/n_e^2)}{1+(n_o^2\tan^2\theta)/n_e^2} \tag{13.65}$$

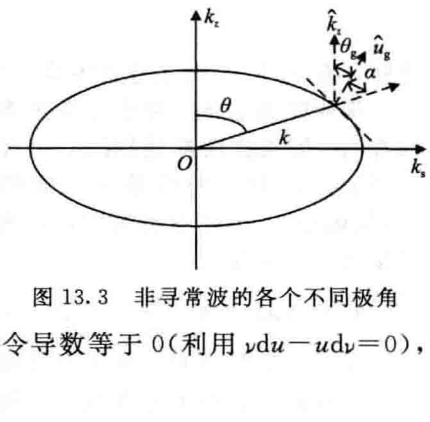


图 13.3 非寻常波的各个不同极角

注意，如果 $\theta=0$，那么 $\tan\alpha=0$，其中 $\alpha=0$。

如果 $\theta=\pi/2$，那么 $\tan\alpha=\infty/\infty^2=1/\infty=0$，其中 $\alpha=0$(见图 13.3)。

为求得能使 α 取最大值的 θ 值，令 $\tan\theta=x$，必须求出使 $x/[1+(n_o^2x^2)/n_e^2]$ 取最大值的 x。对 x 求导，并令导数等于 0(利用 $\nu du-ud\nu=0$)，得到

$$\left(1+\frac{n_o^2}{n_e^2}x^2\right)-x\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}2x\right)=0$$

$$1-\frac{n_o^2}{n_e^2}x^2=0 \tag{13.66}$$

$$x=\frac{n_e}{n_o}$$

当 $\tan\theta=n_e/n_o$ 时，α 取最大值：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_{\max})&=\frac{n_e/n_o(1-n_o^2/n_e^2)}{1+(n_o^2/n_e^2)(n_e^2/n_o^2)}=\frac{n_e/n_o-n_o/n_e}{2}=\frac{n_e^2-n_o^2}{2n_on_e}\\&=\frac{(n_e+n_o)(n_e-n_o)}{2n_on_e}\end{aligned} \tag{13.67}$$

例如，对于石英晶体，有

$$\tan(\alpha_{\max})=\frac{(1.553+1.544)\times(1.553-1.544)}{2\times1.553\times1.544}=5.812\times10^{-3}$$

$$\alpha_{\max}=0.333°$$

对于 $n_o\approx n_e$ 的情况，可以做进一步的近似。

当 $n_o\approx n_e$ 时，α 要取最大值，则应有 $\tan\theta\approx1$。

因此，α 要取最大值，应有 $\theta\approx45°$。

由式(13.67)，得到

$$\tan(\alpha_{\max})\approx\frac{2n_e(n_e-n_o)}{2n_on_e}=\frac{n_e-n_o}{n_o}=\frac{\Delta n}{n}=\frac{0.009}{1.544}=5.829\times10^{-3}$$

$\alpha_{\max}=0.334°$与前面的答案很接近。

$\tan(\alpha_{\max})$正比于$|n_o-n_e|$。

13.6　各向异性半空间的反射

当透射媒质是各向异性时，已经看到存在着两个透射波(见图 13.4)。对于斜入射，每一个透射波都有它自己的透射角。由于必须满足边界条件，对所有的波 k_x 仍然保持不变，斯涅尔定律可以写为

$$k_x=k_o\sin\theta_i=k_1\sin\theta_{T1}=k_2\sin\theta_{T2} \tag{13.68}$$

式中，k_1 和 k_2 分别是各个透射波的波数。我们已经注意到，对于异常波来说，k 曲面不是一个球面。在这种情况下，k 值取决于折射角。图 13.5 给出了计算透射角的一种图解方法。

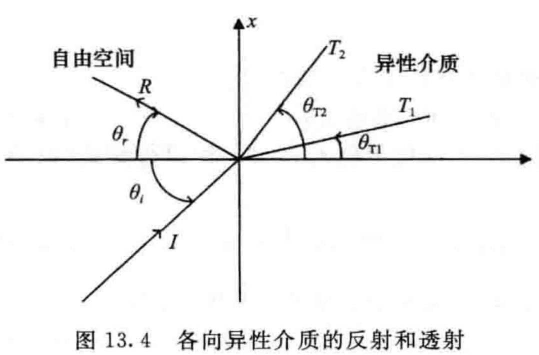


图 13.4　各向异性介质的反射和透射

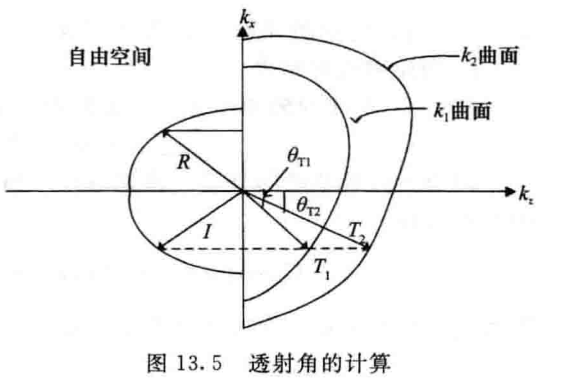


图 13.5　透射角的计算

参考文献

1. Saleh, B. E. A. and Teich, M. C., *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York, NY, 1991.
2. Yariv, A. and Yeh, P. *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York, NY, 1984.
3. Kong, J. U., *Electromagnetic Wave Theory*, Wiley, New York, NY, 1990.

第14章

运动媒质中的电磁场[⊖]

14.1 引言

在运动媒质的电磁场研究中，关键的工作是洛伦兹变换定律。在这些变换定律下，麦克斯韦方程组在两个以相对速度 v_0 匀速运动的参考系中具有相同的形式。真空中的光速仍然保持相同的值 $c=3\times10^8\text{m/s}$，而与测量它的观测者的速度无关。在匀速运动的观测者之间物理定律形式不变的特定速度的假设与洛伦兹变换是一致的。有大量可供参考的文献，我们只是选择了其中的一部分作为参考文献[1~30]。这一章研究电磁波与运动媒质之间的相互作用。

14.2 斯涅尔定律

对于静止媒质情况，考虑 2.13 节讨论过的一个平面 s 波的斜入射。图 14.1中示出了相同的几何结构，除了媒质现在是以速度 v_0 运动外。在讨论这种情况下的斯涅尔定律之前，回顾静止媒质的问题，并证明反射波的频率与入射波的频率是相同的。上面提到的这一性质以及斯涅尔定律 $\theta_i=\theta_r$ 对所有的 x 和 t 都满足在 $z=0$ 处的边界条件。

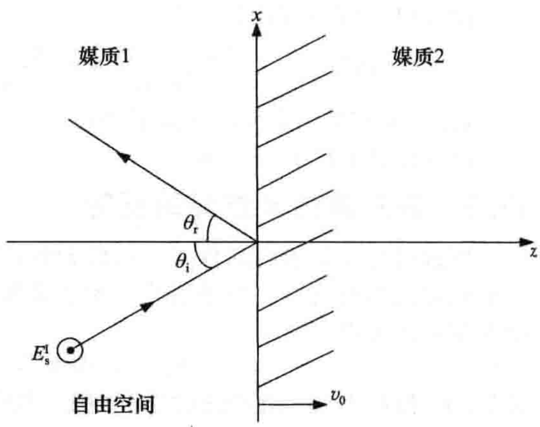


图 14.1 运动平面的反射

令

$$\boldsymbol{E}_s^I=\hat{y}E_0\cos\left(\omega_i t-x\frac{\omega_i}{c}\sin\theta_i-z\frac{\omega_i}{c}\cos\theta_i\right) \tag{14.1}$$

$$\boldsymbol{E}_s^R=\hat{y}E_r\cos\left(\omega_r t-x\frac{\omega_r}{c}\sin\theta_r+z\frac{\omega_r}{c}\cos\theta_r\right) \tag{14.2}$$

式中，c 为真空中的光速，ω_i 为入射波的频率，ω_r 为反射波的频率。

在 $z=0$ 处的理想导电壁上，边界条件要求对所有的 x 和 t 都有 $E_{\tan}=0$：

$$E_{\tan}\big|_{z=0}=0 \quad (\text{对所有的 } x \text{ 和 } t \text{ 都成立}) \tag{14.3}$$

因为 y 分量是切向分量，将式(14.1)和式(14.2)相加并代入 $z=0$，可以得到式(14.3)中的左端项：

$$E_0\cos\left(\omega_i t-x\frac{\omega_i}{c}\sin\theta_i\right)+E_r\cos\left(\omega_r t-x\frac{\omega_r}{c}\sin\theta_r\right)=0 \tag{14.4}$$

既然式(14.4)不是一个关于 x 和 t 的方程，而是联系这两个变量的一个恒等式，那么

$$\omega_i=\omega_r=\omega \tag{14.5a}$$

$$\frac{\omega_i}{c}\sin\theta_i=\frac{\omega_r}{c}\sin\theta_r \tag{14.5b}$$

⊖ 第 14 章的附录参见附录 14A~14E。

$$\theta_i = \theta_r \tag{14.5c}$$

现在，研究 $v_0 \neq 0$ 但 $v_0 \ll c$ 的情况，实际上，这是"非相对论"速度。因此，我们考虑的就是所谓的"伽利略"变换。假设在 $t=0$ 时边界为 $z=0$，那么在其他任何时刻有

$$z = v_0 t \tag{14.6}$$

在这种情况下，需要在 $z=v_0 t$ 处施加边界条件 $E_{\tan}=0$。把这个值代入式(14.1)和式(14.2)中，

$$E_0 \cos\left(\omega_i t - x\frac{\omega_i}{c}\sin\theta_i - v_0 t\frac{\omega_i}{c}\cos\theta_i\right) + E_r\cos\left(\omega_r t - x\frac{\omega_r}{c}\sin\theta_r + v_0 t\frac{\omega_r}{c}\cos\theta_r\right) = 0 \tag{14.7}$$

由于式(14.7)是关于 x 和 t 的一个恒等式，因此得到

$$\frac{\omega_i}{c}\sin\theta_i = \frac{\omega_r}{c}\sin\theta_r \tag{14.8a}$$

$$\omega_i - v_0\frac{\omega_i}{c}\cos\theta_i = \omega_r + v_0\frac{\omega_r}{c}\cos\theta_r \tag{14.8b}$$

如果记

$$\beta = \frac{v_0}{c} \tag{14.9}$$

则方程式(14.8)可以写为

$$\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i} = \frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{1+\beta\cos\theta_r}{1-\beta\cos\theta_i} \tag{14.10}$$

当然，$\beta=0$ 给出了在静止边界时的结果式(14.5a)和式(14.5c)。当 $\beta\neq 0$ 时，反射波的频率与入射波的频率是不同的。这个频率差正是"多普勒雷达"应用的理论基础，"多普勒雷达"被用于测量运动导电目标的速度，比如你开车的速度。当式(14.7)中的左边两项 t 和 x 的系数分别相同时，余弦项就可以相互抵消，于是得到

$$E_0 + E_r = 0$$

$$\Gamma_0 = \frac{E_r}{E_0} = -1 \tag{14.11}$$

即使导体运动，仍然可以得到理想导电体(PEC)的全反射。在这一章中，可以证明斯涅尔定律仍然是成立的，只需通过在分界面上所有点(例子中的任意 x)和所有时间(例子中的任意 t)满足边界条件。

14.3　伽利略变换

如图 14.2 所示，让Σ为实验室参照系，Σ'为运动媒质在其中是静止的参照系。

在一般公式中，t 是"绝对的"，

$$t' = t \tag{14.12}$$

$$x' = x \tag{14.13}$$

$$y' = y \tag{14.14}$$

$$z' = z - v_0 t \tag{14.15}$$

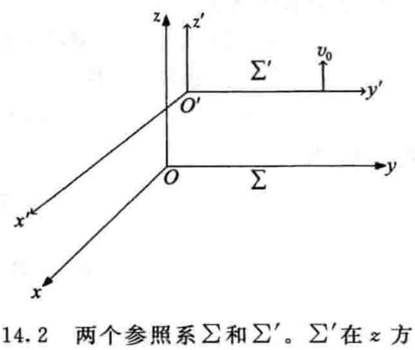


图 14.2　两个参照系Σ和Σ'。Σ'在 z 方向相对于Σ以速度 v_0 匀速运动。在 $t=0$时，两个参照系是重合的($z=z'=0$)

现在，讨论运动媒质中微分形式的法拉第定律。

积分形式的法拉第定律通常表示为

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{emf} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14.16}$$

或

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_C (v \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{14.17}$$

式中，C 是限定非闭合曲面 S 的一条闭和曲线。为了帮助理解式(14.17)中的每一项，在图 14.3 中画出了几何图形。

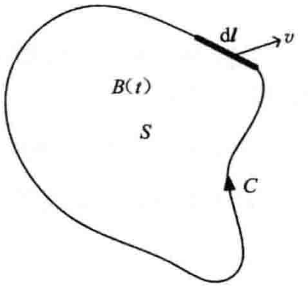


图 14.3 式 14.17 所述法拉第定律的几何表示

在式(14.16)中，右端最后一项给出了在闭合回路 C 中感应的总电动势(emf)，它可能是随时间变化的，同时点函数 B 也可能随时间变化。式(14.17)将总电动势分成时变磁场(称为变压器电动势，式(14.17)中右端第一项)的贡献和时变回路 C(动生电动势，式(14.17)中右端第二项)的贡献。式(14.17)中右端最后一项可以改写为 $-\oint_C \boldsymbol{B} \cdot (v \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})$。$v \times \mathrm{d}l$项是由微元在 1s 时间内所扫过的面积。由于运动，因此最后一项等于$-\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t$。

应用斯托克斯(Stoke)定理，式(14.17)中的闭合线积分可以转化为面积分：

$$\iint_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_S \nabla \times (v \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14.18}$$

由于式(14.18)对于任意 S 是成立的，如果在式(14.18)中所有积分中 S 是相同的，那么式(14.18)中两边的被积函数一定是相同的：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (v \times \boldsymbol{B}) \tag{14.19}$$

令

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (v \times \boldsymbol{B}) \tag{14.20}$$

可以证明，式(14.20)是法拉第定律伽利略不变性的结果。

首先

$$\nabla \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}$$

且代入

$$\boldsymbol{B}'(z', t) = B(z - v_0 t, t)$$

$$-\frac{\partial B'}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} + v_0 \frac{\partial B}{\partial z}$$

$v_0(\partial B/\partial z)$一项可以写为$(v_0 \cdot \boldsymbol{V})\boldsymbol{B}$。

根据矢量恒等式

$$\nabla \times (\boldsymbol{B} \times v_0) = \boldsymbol{B}(\nabla \cdot v_0) - v_0(\nabla \cdot \boldsymbol{B}_0) + (v_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) v_0 \tag{14.21}$$

由于 v_0 是一个常矢量且$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0$，因此得到

$$(v_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B} = -\nabla \times (\boldsymbol{B} \times v_0) \tag{14.22}$$

因此，得到

$$\nabla \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{B} \times v_0)$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{B} \times v_0) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.23}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}' - v_0 \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}$$

作为法拉第定律伽利略不变性的结果，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.24}$$

从而给出

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - v_0 \times \boldsymbol{B} \tag{14.25}$$

类似地，在伽利略变换下，可以给出变换前后磁场 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系：

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{1}{c} v_0 \times \boldsymbol{E} \tag{14.26}$$

将式(14.20)和式(14.26)给出的变换规则代入麦克斯韦方程组中，如果忽略 $(v_0/c)^2$ 和更高阶项，可以看到如果麦克斯韦方程组在一个参照系中成立，那么它们在另一个参照系中几乎也是成立的。

伽利略变换没有改变牛顿力学方程，因为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) \tag{14.27}$$

$$\boldsymbol{F}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m'v') \tag{14.28}$$

由于

$$t = t' \tag{14.29}$$

$$m = m' \tag{14.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v - v_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' \tag{14.31}$$

然而，在下一节中将要讨论的洛伦兹变换下，可以证明 $t \neq t'$，$F \neq F'$，且伽利略变换对非相对论速度是有效的。对于参数 $\beta = v_0/c$ 的任意值，需要考虑基于洛伦兹变换的相对论力学。洛伦兹变换是与狭义相对论和四维空间理论相联系的。

14.4　洛伦兹变换

在伽利略变换中，因为 $t=t'$，所以这种变换使得两个物理点之间的距离在所有坐标系中不变。

如图 14.2 所示，一个在 z 轴上运动的观察者(在 Σ' 中是静止的)测到的光速将为 $(c-v_0)$。然而，实验证明一个静止观测者和一个运动观测者测到的光速将是相同的。这很好地证实了狭义相对论的第一个假设。在四维空间 x，y，z，$\mathrm{i}ct$ 中，洛伦兹变换将保留第一个假设。

为了方便起见，把四维空间中的坐标分别记为 x_μ，$\mu=1$，2，3，4：

$$x_1 = x \tag{14.32}$$

$$x_2 = y \tag{14.33}$$

$$x_3 = z \tag{14.34}$$

$$x_4 = \mathrm{i}ct \tag{14.35}$$

在四维空间中，仍然假设两点之间的距离为

$$R^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu'^2 \tag{14.36}$$

对于如图 14.2 所示的几何构形，有

$$x' = x \tag{14.37}$$

$$y' = y \tag{14.38}$$

$$z' = a_1 z + a_2 t \tag{14.39}$$

$$t' = b_1 z + b_2 t \tag{14.40}$$

如果有

$$(a_1 z + a_2 t)^2 - c^2 (b_1 z + b_2 t)^2 = z^2 - c^2 t^2 \tag{14.41}$$

则式(14.36)将成立。而且，在极限 $\lim v_0 \to 0$ 的情况下，有

$$\lim_{v_0 \to 0} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14.42}$$

Σ'的原点相对于Σ的原点以速度 v_0 运动。因此，可以得到Σ'的原点的位置为 $z = vt$。将 $z' = 0$ 代入式(14.39)中，

$$0 = a_1 z + a_2 t \tag{14.43a}$$

$$0 = a_1 v_0 t + a_2 t \tag{14.43b}$$

$$a_2 = - v_0 a_1 \tag{14.44}$$

选择与式(14.42)相一致的符号，求解相关的方程，得到

$$a_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0^2/c^2)}} \tag{14.45a}$$

$$b_1 = - \frac{v_0}{c^2} a_1 \tag{14.45b}$$

因此，有

$$z' = \gamma(z - \beta c t) \tag{14.46}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} t\right) \tag{14.47}$$

式中

$$\beta = \frac{v_0}{c} \tag{14.48}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{14.49}$$

在上述结果中，参照系Σ和Σ'之间的相对速度为 v_0 而不是$\hat{z} v_0$，很容易将其推广为一般形式，有

$$\boldsymbol{x}'_{\parallel} = \gamma(\boldsymbol{x}'_{\parallel} - v_0 t), \quad \boldsymbol{x}'_{\perp} = \boldsymbol{x}_{\perp} \tag{14.50}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{x}}{c^2}\right) \tag{14.51}$$

式(14.50)也可以写为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + (\gamma - 1) \frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_0/c^2) v_0}{c^2} - \gamma \boldsymbol{v}_0 t \tag{14.52}$$

不难看出，式(14.46)与式(14.47)会引起长度收缩和时间膨胀

$$L_0 = \gamma L \tag{14.53a}$$

$$\tau = \gamma \tau_0 \tag{14.53b}$$

在式(14.52)中[3]，$L = z_2 - z_1$，其中 z_2 和 z_1 是在同一时刻 t 所观察到的杆的两个端点的瞬时坐标；$L_0 = z'_2 - z'_1$，其中 z'_2 和 z'_1 是在参照系Σ'中两个端点的坐标。

式(14.53b)[3]可解释为时间膨胀。我们会发现一个相对于观测者运动的时钟要比一个相对于观测者静止的时钟走得慢。如果将不稳定的基本粒子看做时钟，我们就可以通过考察粒子的寿命来解释时间膨胀这一概念。在式(14.53)中，τ_0 是在参照系Σ'中粒子处于静止状态下的寿命。粒子以速度 v_0 相对于参照系Σ做匀速运动。当在参照系Σ中观察时，运动粒子的寿命要比在Σ中的静止粒子更长。我们观察到运动中的时钟比相同的静止时钟走得更慢。Schmitt[3]利用大量图表与示例解释了长度收缩和时间膨胀。

14.5 洛伦兹标量、矢量和张量

式(14.36)是在四维空间中进行坐标系旋转时需要满足的一个约束条件。在洛伦兹变换下 R 是一个不变量。在四维欧几里得空间中洛伦兹变换是旋转变换。这种正交变换可以写为

$$x'_\mu = \sum \alpha_{\mu\nu} x_\nu, \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{14.54a}$$

对于图 14.2 的几何图形，其变换矩阵为

$$(\alpha_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \mathrm{i}\gamma\beta \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\gamma\beta & \gamma \end{vmatrix} \tag{14.54b}$$

如图 14.4a 所示，为实现洛伦兹变换，在 x_3-x_4 平面上须将坐标轴旋转一个角度 Ψ。

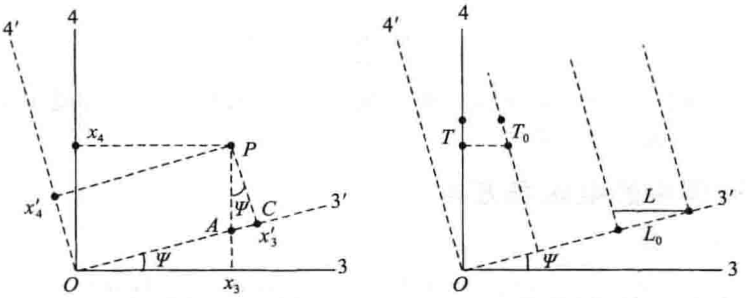
通过改变 β 的符号可以得到一个逆变换，从逆变换得到 $\alpha_{\nu\mu}$。因此，有

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} x'_\nu \alpha_{\nu\mu} \tag{14.54c}$$

也有

$$[\alpha_{\mu\nu}(-\beta)] = [\alpha_{\mu\nu}(\beta)]^{-1} = [\alpha_{\mu\nu}(\beta)^{\mathrm{T}}] \tag{14.55}$$

式(14.54a)和式(14.54b)表明洛伦兹变换是一个正交变换。



a）正交变换的旋转角度　　b）变换的时间膨胀和长度收缩

图 14.4　洛伦兹变换

由几何图形(图 14.4)，有 $OC = x'_3$，得到

$$x'_3 = x_3(\cos\Psi) + x_4(\sin\Psi) \tag{14.56a}$$

类似地，有

$$x'_4 = x_3(-\sin\Psi) + x_4(\cos\Psi) \tag{14.56b}$$

比较式(14.56)和式(14.54c)，得到

$$\tan\Psi = i\beta \tag{14.57}$$

注意到 Ψ 角是复数，其余弦 $\cos\Psi = \gamma \geqslant 1$。因此，旋转了一个角度 Ψ 的洛伦兹变换仅是一个概念，而不是一个真正的角旋转。图 14.4b 中画出了 L、L_0、T 和 T_0。在参照系 Σ 中，在某一恒定时刻可观测到参照系 Σ' 中的距离 L_0 为 L。虽然在图中 L 似乎大于 L_0，但由于 Ψ 的复数特性，有

$$L_0 = L\cos\Psi \tag{14.58a}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} < L_0 \tag{14.58b}$$

在坐标系 Σ 中，坐标系 Σ' 中的时间间隔 T_0 的测量值为 T，其中

$$T = T_0\cos\Psi = \gamma T_0 > T_0 \tag{14.59}$$

在洛伦兹变换下，存在着一个不会改变的量，称为洛伦兹标量，比如 Φ。洛伦兹标量

对于 x'_μ 的导数是一个四维矢量：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \tag{14.60}$$

导数变换就像一个四维矢量。

四维矢量的四维散度是洛伦兹不变的，即

$$\square \cdot \boldsymbol{A}' = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x'_\mu} \tag{14.61}$$

如果 $A_\mu = \partial\Phi/\partial x_\mu$，式(14.61)表明四维拉普拉斯算子是一个洛伦兹不变算子。

$$\square' \cdot \boldsymbol{A}' = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \tag{14.62}$$

式中，$\square'$是在四维空间中式(14.61)中的矢量算子，且在式(14.62)中$\square^2 = \square \cdot \square$。

两个四维矢量的标量积是一个不变标量

$$(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}') = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{14.63}$$

洛伦兹标量可以看成一个零阶张量，四维矢量可以看成一个一阶张量。一个二阶张量包含 16 个分量，可以表示为

$$T'_{\mu\theta} = \sum_{\lambda=1}^{4} \sum_{\sigma=1}^{4} a_{\mu\lambda} a_{\mu\sigma} T_{\lambda\sigma} \tag{14.64}$$

这样一种张量的一个例子是场强四维张量 $F_{\mu\nu}$，它可应用于合并麦克斯韦方程组中的两个方程，下一节会证明这一点。

14.6 四维空间中的电磁场方程

在四维空间中，有

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, \mathrm{i}ct) = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}ct) \tag{14.65}$$

我们可以用适当选择的标量，或四维向量，或二阶四维张量来写出电磁场方程。在四维空间中，将用带有下标 μ 的斜体符号来表示场量。也将使用一个缩写记号，即用一个重复的希腊字母下标来表示当下标从 1 到 4 变化时对其进行求和。

让我们从连续性方程式(1.5)开始：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$$

令

$$\boldsymbol{J}_\mu = (\boldsymbol{J}, \mathrm{i}c\rho_V)$$

$$(J_1, J_2, J_3, J_4) = (J_x, J_y, J_z, J_{\mathrm{i}ct}) \tag{14.66}$$

则方程式(1.5)的展开式是

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial J(\mathrm{i}c\rho_V)}{\partial(\mathrm{i}ct)} = 0$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial J_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 = \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} \tag{14.67}$$

由于 μ 是一个重复的希腊符号，因此可以使用像式(14.67)中的最后一项那样的缩写记号。

此外，如果定义四维矢量微分算子$\square$为

$$\square = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}ct)}\right) \tag{14.68}$$

那么连续性方程可以写为

$$\square \cdot \boldsymbol{J}_\mu = 0 \tag{14.69}$$

式中，$\boldsymbol{J}_\mu$ 是一个四维矢量电流密度。

接下来，我们考虑洛伦兹条件，当媒质是自由空间时，由式(1.21)可得：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{14.70}$$

下面考虑四维矢量位 $\boldsymbol{A}_\mu$，

$$\boldsymbol{A}_\mu = \left(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\frac{\Phi}{c}\right) \tag{14.71}$$

则式(14.71)可以写为

$$\square \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{14.72}$$

在自由空间中，波动方程是

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{14.73a}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \tag{14.73b}$$

它们可写为

$$\square^2 \boldsymbol{A}_\mu = -\mu_0 \boldsymbol{J}_\mu \tag{14.74}$$

注意，式(14.73b)可由下式得到

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}ct)}\right)^2\right] A_4 = -\mu_0 J_4$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0 \mathrm{i}c^2}{\mathrm{i}}\rho_V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

可以构造出场强张量 $F_{\mu\nu}$，使得方程

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.75}$$

和

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{14.76}$$

都能得到满足。例如，由式(14.75)和式(14.76)，可以写出

$$B_1 = B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \tag{14.77}$$

这样，式(14.75)和式(14.76)可写为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{14.78}$$

其中，$\mu=3$，$\nu=2$，且 $F_{\mu\nu}=F_{32}=-B_1$。

可以证明，式(14.76)和式(14.77)将变为式(14.78)，前提条件是只要当 4×4 矩阵 $F_{\mu\nu}$ 具有下列用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分量表示的元素时：

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\mathrm{i}\dfrac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\mathrm{i}\dfrac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\mathrm{i}\dfrac{E_z}{c} \\ \mathrm{i}\dfrac{E_x}{c} & \mathrm{i}\dfrac{E_y}{c} & \mathrm{i}\dfrac{E_z}{c} & 0 \end{vmatrix} \tag{14.79}$$

虽然我们仅验证了元素 $F_{32}=-B_1$，但是也可以检验其他元素的正确性。利用这个场强张量，可以证明自由空间中的两个麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \tag{14.80}$$

和

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{14.81}$$

在洛伦兹空间中具有如下形式

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \boldsymbol{J}_\mu \tag{14.82}$$

其他两个麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14.83}$$

和

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.84}$$

在洛伦兹空间中可表示为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{14.85}$$

由于上述原因，$F_{\mu\nu}$ 称为场强张量。由式(14.78)，我们注意到它是一个反对称张量。其他两个麦克斯韦方程

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14.86a}$$

和

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho_V \tag{14.86b}$$

可以合并为

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu \tag{14.87}$$

式中

$$G_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}cD_z \\ -\mathrm{i}cD_x & -\mathrm{i}cD_y & -\mathrm{i}cD_z & 0 \end{vmatrix} \tag{14.88}$$

因为 $G_{\mu\nu}$ 是一个二阶张量，可以简写为

$$G'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4} a_{\mu\lambda}a_{\nu\sigma}G_{\lambda\sigma} \tag{14.89}$$

它是一个反对称张量，可以称为激励张量。

14.7 电磁场的洛伦兹变换

场强 $F_{\mu\nu}$ 是一个张量，它的变换可由式(14.64)给出：

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}a_{\nu\sigma}F_{\lambda\sigma} \tag{14.90}$$

$$E'_1 = \gamma(E_1 - \beta c B_2),\quad B'_1 = \gamma\left[B_1 + \left(\frac{\beta}{c}\right)E_2\right] \tag{14.91a}$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 + \beta c B_1),\quad B'_2 = \gamma\left[B_2 - \left(\frac{\beta}{c}\right)E_1\right] \tag{14.91b}$$

$$E'_3 = E_3,\quad B'_3 = B_3 \tag{14.91c}$$

交换带撇和不带撇的量且用$(-\beta)$替代β，可以得到逆变换。对于一般速度v_0，可以将式(14.90)～式(14.91)推广为一般形式

$$E'_{\parallel}=\boldsymbol{E}_{\parallel},\quad B'_{\parallel}=B_{\parallel} \tag{14.92a}$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp}=\gamma(\boldsymbol{E}_{\perp}+v_0\times\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{B}'_{\perp}=\gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp}-\frac{v_0}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right) \tag{14.92b}$$

14.8 频率变换和相位不变性

可以通过构造一个四维矢量波数$\boldsymbol{k}_\mu$

$$\boldsymbol{k}_\mu=\left(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\right) \tag{14.93a}$$

来使得下式成立

$$\boldsymbol{k}_\mu\cdot\boldsymbol{x}_\mu=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t \tag{14.93b}$$

因为式(14.93b)是一个洛伦兹标量，它是洛伦兹不变的，所以给出了相位不变性的概念。因此，得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega' t' \tag{14.94}$$

应用式(14.94)，可以得到如下结果：

$$\omega'=\gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \tag{14.95a}$$

$$\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)} \tag{14.95b}$$

式中，θ和θ'分别是$\boldsymbol{k}$以及$\boldsymbol{k}'$与v_0方向的夹角。如果认为坐标系是沿z轴方向运动且波在x-z平面中传播，就可以更容易地理解式(14.95)的意义。

$$k'_x=k_x \tag{14.96a}$$

$$k'\sin\theta'=k\sin\theta \tag{14.96b}$$

$$k'_z=\gamma(k_z-\beta c\omega) \tag{14.96c}$$

$$k'\cos\theta'=\gamma\left(k\cos\theta-\frac{\beta}{c}\omega\right)$$

$$k'\cos\theta'=\gamma(k\cos\theta-\beta k) \tag{14.96d}$$

$$k'\cos\theta'=\gamma k(\cos\theta-\beta)$$

用式(14.96b)除以式(14.96d)，就可以得到式(14.95b)。

由式(14.94)，得到

$$\omega'=\gamma(\omega-\beta ck_z)$$

$$\omega'=\gamma(\omega-\beta ck\cos\theta)$$

它与式(14.95a)相同。

14.9 运动平面的反射

当导体运动时，让我们来计算一个运动导体的功率反射系数α。我们将使用洛伦兹变换方法求解这个问题。

让自由空间中的 s 波的电场为

$$\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{I}}=\hat{y}\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\Psi}_1$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_x x-k_z z)}$$

$$k_x=k_0\sin\theta=k_0 S$$

$$k_z=k_0\cos\theta=k_0 C$$

$$k_0=\frac{\omega}{c}$$

设Σ'是运动导体上的坐标系，运动导体以速度

$$v_0 = \hat{z} v_0$$

相对于实验室坐标系Σ运动。几何图形如图 14.1 所示。我们将入射波变换到坐标系Σ'中，在该坐标系中运动的导体是静止的。

$$(\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{I}})' = \hat{y}\boldsymbol{E}_0'\boldsymbol{\Psi}_1'$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{I}}' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega' t' - k_x' x' - k_z' z')}$$

$$k_x' = k_0' \sin\theta' = k_0' S'$$

$$k_z' = k_0 \cos\theta = k_0' C'$$

$$k_0' = \frac{\omega'}{c}$$

由洛伦兹变换方程式(14.96)，有

$$k_x' = k_x \tag{14.97a}$$

$$k_z' = \gamma\left(k_z - \frac{v_0 \omega}{c^2}\right) \tag{14.97b}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - \nu_0 k_z) \tag{14.97c}$$

由此得到

$$\omega' = p_z \omega \tag{14.98a}$$

$$k_x' = k_0' S' = k_0 S \tag{14.98b}$$

$$k_z' = k_0' C' = \gamma k_0 (C - \beta) \tag{14.98c}$$

式中

$$S' = \frac{S}{p_z} \tag{14.98d}$$

$$p_z = \gamma(1 - C\beta) \tag{14.98e}$$

利用式(14.97)，可以确定出反射波的波矢量和频率。根据相位不变性原理，在Σ和Σ'中看到的反射波的相位是相同的：

$$\omega' t' - k_x' x' + k_z z' = \omega_r t - k_{xr} x + k_{zr} z \tag{14.99}$$

由式(14.46)、式(14.47)、式(14.50)和式(14.99)，可得

$$\omega_r = \gamma(\omega' - \beta c k_z') \tag{14.100}$$

$$k_{zr} = \gamma(k_z' - \beta c \omega') \tag{14.101}$$

$$k_{xr} = k_0' S' = k_0 S \tag{14.102}$$

将式(14.97)代入式(14.100)至式(14.102)中，得到下式：

$$\omega_r = \gamma^2 \omega (1 + \beta^2 - 2\beta C) \tag{14.103a}$$

$$k_z^r = \gamma^2 k_0 [(1 + \beta^2) C - 2\beta] \tag{14.103b}$$

$$\cos\theta_r = \frac{C}{\beta_z'} \tag{14.104a}$$

$$\sin\theta_n = \frac{S}{p_z} \tag{14.104b}$$

式中

$$\beta' = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta C}{1 + \beta^2 - (2\beta / C)} \tag{14.104c}$$

在沿 x 轴以速度 v_0 运动的媒质中，$v_0 = \hat{x} v_0$，我们得到下式(建议由学生自己来推导这些公式)：

$$k_x' = \gamma\left(k_x - \frac{v_0}{c^2}\omega\right) \tag{14.105a}$$

$$k'_z = k_z \tag{14.105b}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - v_0 k_z) \tag{14.105c}$$

$$\omega' = p_x \omega \tag{14.105d}$$

$$S' = \frac{S-\beta}{1-S\beta} \tag{14.105e}$$

$$C' = \frac{C}{p_x} \tag{14.105f}$$

式中

$$p_x = \gamma(1-S\beta) \tag{14.105g}$$

$$\omega_r = \omega \tag{14.105h}$$

$$k_x^r = k_x = k_0 S \tag{14.105i}$$

$$k_z^r = k_z = k_0 C \tag{14.105j}$$

场变换：

在Σ'中媒质是静止的，可以利用静止媒质中的相关理论来计算 $R'_s=(E_y^r)'/(E_y^I)'$。在Σ'中媒质 2 的电磁性质决定 R'_s。例如，如果媒质 2 是理想电导体，则 $R'_s=-1$。

由场的洛伦兹变换式(14.92)，可以得到 R'_s 和 R_s 之间的关系为

$$R_s = \frac{E_y^r}{E_y^I} \tag{14.106}$$

在 $v_0=\hat{z}v_0$ 的情况下，有

$$E'^{I}_y = \gamma(1-\beta C)E_y^I \tag{14.107a}$$

$$E'^{R}_y = \gamma\left(1+\frac{\beta C}{\beta'}\right)E_y^R \tag{14.107b}$$

用式(14.107b)除以式(14.107a)，得到

$$R'_s = \left(\frac{1+\beta c/\beta'}{1-\beta C}\right)R_s \tag{14.108a}$$

$$R_s = \left(\frac{1-\beta c}{1+\beta C/\beta'}\right)R'_s \tag{14.108b}$$

如果媒质 2 是理想电导体，那么 $R'_s=-1$，且功率反射系数 α 为

$$\alpha = |R_s|^2\frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i} = \frac{1}{\beta'}|R_s|^2 \tag{14.109a}$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta'}\left(\frac{1-\beta C}{1+\beta C/\beta'}\right)^2 \tag{14.109b}$$

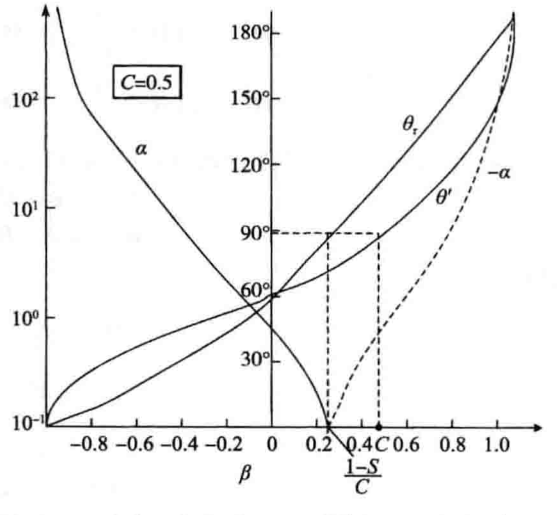


图 14.5　功率反射效率 α，在Σ'中的反射角 θ'，Σ中的反射角 θ 随 β 的变化曲线。当入射角 $\theta=60°$时，$C=\cos\theta=0.5$。纵轴上的值是 α 取对数后的值。注意，因为 $\beta<0$，$\alpha>1$。另外，注意 $\theta_r=90°$，因为 $\beta=(1-S/C)$，其中$S=\sin\theta$

化简式(14.109b)，对于 s 波入射到与垂直于分界面运动的理想导电体的情况，功率反射系数是

$$\alpha = \frac{(1+\beta^2-2\beta C)[1+\beta^2-(2\beta/C)]}{(1-\beta^2)^2} \tag{14.110}$$

图 14.5 中画出了 α 随 β 的变化曲线。其中，参数 $C=0.5$，即入射角 $\theta=60^\circ$。在图 14.5 中也画出了在Σ'中的反射角 θ 和在Σ中的反射角 θ_r。

从图 14.5 中可以注意到以下有趣的几点。当 $\beta=(1-S/C)$时 α 等于 0，因为在 β 取此值时，在Σ中看到的反射角 θ_r 是 90°。当$(1-S/C)<\beta<C$ 时，$\theta_r>90°$，因此 α 是负值。

这意味着在这个 β 值范围内，像在Σ中一样反射波向媒质 2 中传播。在 $C<\beta<1$ 范围内，对于图 14.5 的一种解释可参见文献[12]，附录 14A 也给出了这一解释。

另一个令人惊讶的结果是，在$-1<\beta<0$ 范围内 α 大于 1。如果注意到，为了克服辐射压力而使得导体做匀速运动，需要给系统提供机械功率，就可以解释这个现象。附录 14B[23]给出了电功率 P_{el}、场中储能的减少速度 P_s 以及提供给媒质用于导体和电介质半空间克服辐射压力的机械功率 P_m 的详细计算过程。

这个附录包含更多关于这个专题的参考资料。

14.10 运动电介质的本构关系

闵可夫斯基理论的建立基础是

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon'\boldsymbol{E}' \tag{14.111}$$

$$\boldsymbol{B}'=\mu'\boldsymbol{H}' \tag{14.112}$$

对于一种简单无损媒质，其中 ε'和 μ'是在Σ'中的测量参数。应用场变换方法，可以得到闵可夫斯基理论的本构关系：

$$\boldsymbol{D}+\frac{1}{c^2}v_0\times\boldsymbol{H}=\varepsilon'(\boldsymbol{E}+v_0\times\boldsymbol{B}) \tag{14.113}$$

$$\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}v_0\times\boldsymbol{E}=\mu'(\boldsymbol{H}-v_0\times\boldsymbol{D}) \tag{14.114}$$

利用式(14.92)和式(14.115)，可得到式(14.113)和式(14.114)：

$$\boldsymbol{D}'=\gamma\left(\boldsymbol{D}+\frac{1}{c^2}v_0\times\boldsymbol{H}\right)+(1-\gamma)\frac{\boldsymbol{D}\cdot v_0}{v_0^2}v_0 \tag{14.115a}$$

$$\boldsymbol{H}'=\gamma\left(\boldsymbol{H}+\frac{1}{c^2}v_0\times\boldsymbol{D}\right)+(1-\gamma)\frac{\boldsymbol{H}\cdot v_0}{v_0^2}v_0 \tag{14.115b}$$

由式 14.85[10]，可得到式(14.115a)和式(14.115b)：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon'\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{H} \tag{14.116}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu'\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{E} \tag{14.117}$$

式中

$$\boldsymbol{W}=\frac{n^2-1}{(1-n^2\beta^2)c}\hat{z} \tag{14.118}$$

$$n=\left[\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu_0\varepsilon_0}\right]^{1/2} \tag{14.119}$$

$$\overline{a}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{14.120a}$$

$$a=\frac{1-\beta}{1-n^2\beta^2} \tag{14.120b}$$

在以上分析中，假设 $v_0=\hat{z}v_0$。

14.11 相对论粒子动力学

下面对相对论粒子动力学做一个简要的回顾。在文献[3]中可以找到一个更完整的叙述。电子的电荷量 q 是不变的。然而，电子的质量 m 由下式给出

$$m = \gamma m_0 \tag{14.121}$$

式中，m_0 是电子在静止状态时的质量。

以速度 v_0 运动时，质量 m 的相对论动量是

$$\boldsymbol{p} = m v_0 = \gamma m_0 v_0 \tag{14.122}$$

在碰撞过程中，正是这个相对论动量保持守恒而不是经典的动量 $m_0 v_0$。相对论力是

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m v_0) \tag{14.123}$$

一个能量为 ε 的粒子的四维动量是

$$\boldsymbol{p}_\mu = \left(\boldsymbol{p}, \mathrm{i}\,\frac{\varepsilon}{c}\right) \tag{14.124}$$

将其变换为一个四维矢量，得到

$$p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2' \tag{14.125a}$$

$$p_3 = g\left(p_3' + \beta\frac{\varepsilon'}{c}\right) \tag{14.125b}$$

$$\varepsilon = \gamma(\varepsilon' + \beta c p_3') \tag{14.126}$$

将 β 换成 $-\beta$ 并交换带撇变量和不带撇变量，就可以得到逆变换。

在以上各式中，Σ' 沿 $z=x_3$ 的方向运动。四维矢量 $\boldsymbol{p}_u$ 的长度是一个不变的标量，

$$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_u' \cdot \boldsymbol{p}_u' = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 - \frac{\varepsilon'^2}{c^2} \tag{14.127}$$

在粒子的静止参考系中，$\boldsymbol{p}'=0$，并且得到下式

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = \frac{-(\varepsilon')^2}{c^2} = \frac{-(m_0 c^2)^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \tag{14.128}$$

如果粒子沿着 z 轴运动，即

$$\boldsymbol{v}_0 = \hat{z}\,\boldsymbol{v}_0$$

那么

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = p_z = p$$

$$p^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \tag{14.129}$$

$$m^2 c^4 = \varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{14.130}$$

总能量 ε 是静止能量 $m_0 c^2$ 与动能 T 之和，T 由下式给出

$$T = (\gamma - 1) m_0 c^2 \tag{14.131}$$

总之，在参考系 Σ 中，一个以速度 v_0 运动的静止质量为 m_0 的自由粒子具有的动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 ε 分别为

$$\boldsymbol{p} = \gamma m_0 v_0 \tag{14.132}$$

$$\varepsilon = \gamma m_0 c^2 \tag{14.133}$$

在自由空间中，光子的能量 ε 为

$$\varepsilon = hf = \hbar 2\pi f = \hbar\omega \tag{14.134}$$

式中，h 是普朗克常数，f 是频率，其单位为 Hz，$\hbar = h/2\pi$，ω 是角频率，其单位为 rad。光子的速度是 c。光子的动量是

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k \tag{14.135}$$

14.12 等离子体的参数变换

在两个有相对运动的参考系中，等离子体频率为

$$(\omega_{\mathrm{p}}')^2 = \frac{(q')^2 N'}{\varepsilon_0 m'} \tag{14.136}$$

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 m} \tag{14.137}$$

式中，$(-q', m', N')$和$(-q, m, N)$分别是在两个参考系中电子的电荷量、质量以及体电子数密度。

因为

$$q' = q \tag{14.138}$$

$$m' = \frac{m}{\gamma} \tag{14.139}$$

$$V' = \gamma V \tag{14.140}$$

$$N' = \frac{N}{\gamma} \tag{14.141}$$

所以，得到

$$\omega_{\mathrm{p}}' = \omega_{\mathrm{p}} \tag{14.142}$$

因此，有

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}' = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}'^2}{(\omega')^2} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{(\omega')^2} \tag{14.143}$$

14.13 运动等离子体平板的反射

14.9 节讨论了在求解运动媒质问题中的两个关键步骤。第一步是计算在静止坐标系中的反射系数 R'。第二步是通过考虑运动平面的反射性质来将反射系数 R'和 R 联系起来。14.9 节已经证明，对于 s 波且平面的运动垂直于分界面情况，有

$$R_{\mathrm{s}} = \left(\frac{1-\beta c}{1+\beta c/\beta'}\right) R_{\mathrm{s}}' \tag{14.144}$$

和运动平面的功率反射系数为

$$\alpha_{\mathrm{s}} = \frac{(1+\beta^2-2\beta C)(1+\beta^2-2\beta/C)}{(1-\beta^2)^2} \tag{14.145}$$

对于 p 波，可以证明

$$R_{\mathrm{p}} = \left(\frac{C-\beta}{C+\beta\beta'}\right) R_{\mathrm{p}}' \tag{14.146a}$$

式中

$$R_{\mathrm{p}} = \frac{E_x^{\mathrm{R}}}{E_x^{\mathrm{I}}} \tag{14.146b}$$

$$R_{\mathrm{p}}' = \frac{(E_x^{\mathrm{R}})'}{(E_x^{\mathrm{I}})'} \tag{14.146c}$$

对于 p 波且平面垂直于界面运动情况，运动平面的功率反射系数为

$$\alpha_{\mathrm{p}} = |R_{\mathrm{p}}|^2 \frac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{r}}} = \beta' \left(\frac{C-\beta}{C+\beta\beta'}\right)^2 \tag{14.147}$$

附录 14A 通过计算 R_{p}' 讨论各向同性等离子体平板的运动问题。附录 14C[14] 讨论单轴等离子体问题，其中 ε_{r} 由下式给出

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \varepsilon_{\mathrm{r}}' \hat{z}\hat{z} \tag{14.148}$$

式中，$\varepsilon_{\mathrm{r}}'$ 由式(14.139)给出。

14.14　运动等离子体媒质的布儒斯特角和临界角

附录 14D[18]讨论了以相对论速度运动的等离子体媒质的布儒斯特角。附录 14E[22]讨论了由运动等离子体产生的电磁波全反射。

14.15　垂直于入射面运动的约束等离子体

附录 14F[20]讨论垂直于入射平面运动的等离子体的反射特性。这个参考文献在本书中作为附录 14F。

14.16　运动等离子体的波导模式

参考文献[11]、[16]、[17]、[19]、[21]、[28]、[29]讨论运动等离子体的波导模式。

14.17　运动等离子体媒质的脉冲响应

参考文献[24～26]讨论半无限大运动等离子体对脉冲平面波的反射。

参考文献

1. Lorrain, P., Corson, D. P., and Lorrain, F., *Electromagnetic Fields and Waves* (3rd edition), W.H. Freeman and Company, New York, NY, 1988.
2. Schmitt, R., *Electromagnetics Explained*, Newnes, and imprint of Elsevier Science, Boston, MA, 2002.
3. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, NY, 1962.
4. Kong, J. U., *Electromagnetics Wave Theory*, EMW Publishing, Cambridge, MA, 2002.
5. Bladel, V., *Relativity and Engineering*, Springer, New York, NY, 1984.
6. Chawla, B. R. and Unz, H., *Electromagnetic Waves in Moving Magneto-plasmas*, The University Press of Kansas, Lawrence/Manhattan/Wichita, 1971.
7. Shrivastava, R. K., *The interaction of electromagnetic waves with relativistically moving bounded plasmas*, Doctoral Thesis, Birla Institute of Technology, Ranchi, India, 1975.
8. Prasad, R. C., *Transient and frequency response of a bounded plasma*, Doctoral Thesis, Birla Institute of Technology, Ranchi, India, 1976.
9. Prasad, R., *Wave propagation in plasma waveguides and experimental simulation*, Doctoral Thesis, Birla Institute of Technology, Ranchi, India, 1979.
10. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1965.
11. Kalluri, D. 1970, Waveguide modes of a warm drifting uniaxial electron plasma, *Proc. IEEE*, 58(2), 278–280.
12. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1973, Electromagnetic wave interaction with moving bounded plasmas, *J. Appl. Phys.*, 44(10), 4518–4521.
13. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1973, Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving isotropic plasma slab, *J. Appl. Phys.*, 44(5), 2440–2442.
14. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1973, Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving unaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21(1), 63–70.
15. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1974, On reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving unaxial and isotropic plasma slab, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-2, 206–210.
16. Kalluri, D. and Prasad, R., 1975, Comments on characteristics of waveguides filled with homogeneous lossy anisotropic drifting plasma, *Int. J. Electron.* (Engl.), 38(4), 573–574.
17. Kalluri, D. and Prasad, R., 1975, Waveguide modes of a warm unaxial lossy drifting electron plasma, *Int. J. Electron.* (Engl.), 39(6), 637–646.
18. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1975, Brewster angle for a plasma medium moving at relativistic speed, *J. Appl. Phys.*, 46(3), 1408–1409.
19. Kalluri, D., 1975, Waveguide modes of a warm drifting unaxial electron plasma for large drifting velocities, *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, AP-23(5), 745.
20. Kalluri, D. and Prasad, R. C., 1977, Interaction of electromagnetic waves with bounded plasmas moving perpendicular to the plane of incidence, *Appl. Phys.*, 48(2), 587–591.
21. Kalluri, D. and Prasad, R., 1978, Waveguide modes of a warm unaxial lossy drifting electron plasma for large drift velocities, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-6(4), 593–598.

22. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1978, On total reflection of electromagnetic waves from moving plasmas, *J. Appl. Phys.*, 49(12), 6169–6170.
23. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., 1978, Radiation pressure due to plane electromagnetic waves obliquely incident on moving media, *J. Appl. Phys.*, 49(6), 3584–3586.
24. Kalluri, D. and Prasad, R. C., 1978, Reflection of an impulsive plane wave by a plasma half-space moving perpendicular to the plane of incidence, *J. Appl. Phys.*, 49(5), 2696–2699.
25. Kalluri, D. and Prasad, R. C., 1979, On impulse response of plasma half-space moving normal to the interface-II: Results, *IEEE International Conference on Plasma Science*, 4–6 June 1979, Montreal, Quebec, Canada, Conference Record-Abstracts, pp. 154–155.
26. Kalluri, D. and Prasad, R. C., 1979, On impulse response of plasma half-space moving normal to the Interface-I: Formulation of the solution, *IEEE International Conference on Plasma Science*, 4–6 June 1979, Montreal, Quebec, Canada, Conference Record-Abstracts, p. 155.
27. Shrivastava, R. K. and Kalluri, D., 1979, On Brewster angles for perpendicularly polarized electromagnetic waves interacting with a moving dielectric half-space, *Proceedings of the Symposium on Topics in Applied Physics*, Calcutta University, February 1979.
28. Kalluri, D. and Prasad, R., 1979, Waveguide modes of a warm transversely drifting electron plasma with strong transverse magnetic field, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-7(1), 6–9.
29. Kalluri, D. and Prasad, R., 1979, Waveguide modes of a warm isotropic drifting electron plasma, *J. Appl. Phys.*, 50(4), 2675–2677.
30. Prasad, R. C. and Kalluri, D., 1980, Impulse response of a lossy magnetoplasma half-space moving along the magnetic field, *IEEE International Conference on Plasma Science*, 19–21 May 1980, Madison, Wisconsin, Conference Record-Abstracts, pp. 11–12.

第三部分

电 磁 计 算

第15章 引言和一维问题

15.1 电磁场问题：微分和积分方程

麦克斯韦方程组是电场与磁场相互耦合的一组矢量偏微分方程(阅读第 1 章可以回顾麦克斯韦方程组)。其中，三个空间坐标和时间变量分别是独立变量。对于时谐场，假设随时间以谐函数(余弦)形式变化，我们可以使用相量的概念并使用相量乘法运算(乘以 jω)来替代时域中的 $\partial/\partial t$。因此，我们可以降低问题的维数，将独立变量数由 4 个减少为 3 个，从而降低问题的数学复杂性。对于一些特定问题，进一步降低维数也是可能的。从这个观点出发，我们回顾一下波导问题(见第 3 章)。如果我们考虑矩形波导中的 TM 模式($\widetilde{E}_z \neq 0$，$\widetilde{H}_z = 0$)，其纵向分量满足标量亥姆霍兹方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\widetilde{E}_z + k^2\,\widetilde{E}_z = 0 \tag{15.1}$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{15.2}$$

因为对波的传播或非传播感兴趣，所以可以假定

$$\widetilde{E}_z(x,y,z) = F(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{15.3}$$

并且研究是否或在什么条件下 β 是实数。

将式(15.3)代入式(15.1)中，可得 F 满足的一个二维偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+k_c^2 F = 0 \tag{15.4}$$

式中

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \tag{15.5}$$

方程式(15.4)可写为

$$-\nabla_t^2 F = + k_c^2 F = \lambda F \tag{15.6}$$

在式(15.6)中，∇_t^2是在横截面上的拉普拉斯算子，λ 是特征值。波导问题是一个涉及微分算子的特征值问题，当采用数值方法求解时，它可以转化为如下熟悉的形式

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \tag{15.7}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 是一个方阵，λ 是特征值，$\boldsymbol{X}$ 是相应的特征向量。式(15.6)是一个二阶标量偏微分方程，其定义域为矩形区域 $0<x<a$，$0<y<b$。我们可以应用分离变量法解析地求解式(15.6)，如果强加理想电导体(PEC)边界条件(见图 15.1)，得到

$$\widetilde{E}_z = E_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\quad m=1,2\cdots,\infty,\quad n=1,2,\cdots,\infty \tag{15.8}$$

式中

$$\lambda_{mn} = (k_c)_{mn}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{15.9}$$

从式(15.8)和式(15.9)中，我们看到这一问题具有无穷个特征值 λ_{mn}，并且相应的本征向量与 $\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$成正比。

许多实际问题都没有一个如此简洁的解析解。例如，图 15.2 所示为一个脊形波导，在实际应用中它用于增大矩形波导中单模传输的带宽。数值方法(有限差分法、有限元法、矩量法和其他方法)或近似的解析方法(微扰或变分技术)通常用于求解这样一类问题[1~10]。

下面给出某一个电磁场问题的积分公式。假设我们希望求出自由空间中一个正方形导电板与无穷远处一个球(见图 15.3)之间的电容。

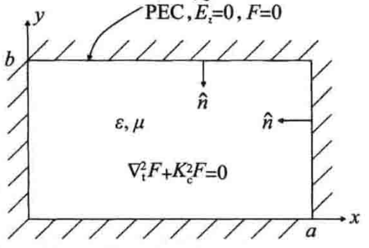


图 15.1　矩形波导：TM 模式

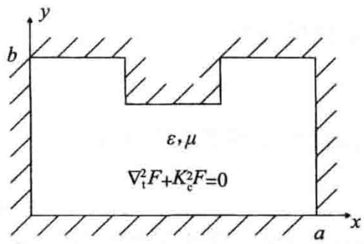


图 15.2　脊形波导

求解中的关键一步是确定导电板上的表面电荷密度 $\rho_s(x,\ y)$，假设导电板的电压是 V_0 伏特。空间中任意一点 $P(x,\ y,\ z)$的电位可以用 $\rho_s(x',\ y')$表示为

$$\Phi(x,y,z)=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\rho_s\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon R_{SP}} \qquad (15.10)$$

式中

$$R_{SP}=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} \qquad (15.11)$$

如果点 P 在导电板上，即$z=0$，$-a<x<a$，$-a<y<a$，则电位是一个由下式给出的常量 V_0：

$$V_p=V_0=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\rho_s\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \quad (P\text{ 点在导电板上}) \qquad (15.12)$$

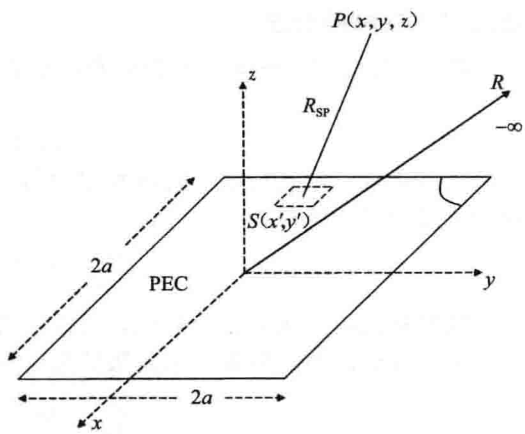


图 15.3　自由空间中的导电板

在方程式(15.12)中，由于未知量 ρ_s 出现在积分符号后面，因此把方程式(15.12)称为积分方程。

15.2　离散化和代数方程组

电磁场问题通常被定义为在连续域中的微分方程、积分方程或微分积分方程。在一个连续域中有无穷多个点，如果能够找到解析解，解析解将给出场在连续域中每一点的数学表达式。通常解析解是一个无穷级数，计算一个给定点的场会遇到一个无穷级数的求和，且需要适当地截断级数以保证给定的精度。许多数值方法的目的是求出场在一组离散点上的值，从而基于已经计算出来的这一组离散场值，应用内插和外推方法就可以得到场在其他点处的值。这种方法将微分方程、积分方程或微积分方程组转化为一组代数方程，其未知量是场在一组离散点上的值。然后，就可以利用像代数方程求解器一类数学软件来进行求解。例如 MATLAB、MATHEMATICA 和 MATHCAD。下面将以一维问题为例来说明这些方法。

15.3　一维问题

在本书所讨论的范围内，一维电磁场问题的一些例子如下。

a. 静态问题：

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{\rho_V}{\varepsilon} \quad (\text{一维泊松方程}) \qquad (15.13)$$

b. 时谐问题：

$$\frac{d^2V}{dz^2}+k^2V=0 \quad (传输线方程) \tag{15.14}$$

c. 谐振传输线：

$$\frac{d^2V}{dz^2}+k_c^2V=0 \tag{15.15}$$

d. 传输线上的暂态过程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0 \tag{15.16}$$

问题(a)和(b)称为平衡问题；在限定一维场域的两个端点处，边界条件是给定的。问题(c)是一个特征值问题，其特征值是 $\lambda=k_c^2$，电位 V 在场域的两个端点处有特定的边界条件。问题(d)称为波传播或行波问题，其初始条件和在端点处的边界条件是给定的。

15.3.1 有限差分法

将 $y(x)$ 的值以等间隔 h 进行列表，可以得到 x_n(自变量)和 y_n(因变量)的一系列值，其中

$$x_n=x_0+nh \tag{15.17}$$

$$y_n=y(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{15.18}$$

可以将某一个点处的一阶导数用相邻点的 y 值来表示。例如，如果用弦 1 来近似曲线 $y(x)$ 在 P 点的切线：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n\approx\frac{y_{n+1}-y_n}{h}+O(h) \tag{15.19}$$

这种近似叫做前向差分近似，可以证明它的无穷小量近似于与 h 同阶，记作 $O(h)$。

另一方面，可以用弦 2 来近似导数，并写为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n\approx\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+O(h) \tag{15.20}$$

这种近似称为后向差分近似。中心差分近似基于用弦 3 来近似这条曲线：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n\approx\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+O(h^2) \tag{15.21}$$

注意，在式(15.21)中近似阶数是 $O(h^2)$。证明式(15.19)～式(15.21)的近似阶数并找到一种构造更高阶近似公式的系统方法都是很有用的。应用“有限差分学”[1]可以得到这样一种方法。

我们从定义一些算子开始，并希望找到这些算子之间的符号关系。

位移算子 E：

$$y_{n+1}=Ey_n$$

$$y_{n+2}=E(y_{n+1})=E^2y_n \tag{15.22}$$

$$\therefore y_{n+m}=E^my_n \tag{15.23}$$

平均算子 μ：

$$\mu y_n=\frac{1}{2}(y_{n+1/2}+y_{n-1/2}) \tag{15.24}$$

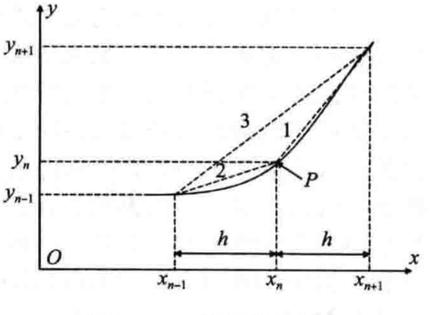


图 15.4 一阶导数的近似

前向差分算子 Δ：

$$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n$$

$$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n=Ey_n-y_n=(E-1)y_n \tag{15.25}$$

$$\therefore\Delta=E-1 \tag{15.26}$$

后向差分算子∇：

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \tag{15.27}$$

$$\therefore \nabla = 1 - E^{-1}$$

$$E = (1 - \nabla)^{-1} \tag{15.28}$$

中心差分算子 δ：

$$\delta y_n = y_{n+1/2} - y_{n-1/2} \tag{15.29}$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \tag{15.30}$$

注意下面的式子：

$$\Delta = \nabla E = \delta E^{1/2} \tag{15.31}$$

$$\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2 \tag{15.32}$$

微分算子 D：

$$Dy = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{15.33}$$

通过考虑如下泰勒级数，可以得到 D 和 E 之间的关系

$$Ey(x) = y(x+h) = y(x) + h\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \cdots$$

$$= \left(1 + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \cdots\right)y(x) = \mathrm{e}^{hD}y(x) \tag{15.34}$$

$$E = \mathrm{e}^{hD}$$

$$hD = \ln E = \ln(1 + \Delta) \tag{15.35}$$

$$= \ln(1 - \nabla)^{-1} = -\ln(1 - \nabla) \tag{15.36}$$

由式(15.35)，有

$$hy_j' = hDy_j = -[\ln(1-\nabla)]y_j = \left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots\right)y_j$$

$$\therefore D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots\right] \tag{15.37}$$

让我们截断式(15.37)中的级数，只保留一项：

$$Dy_j \approx \frac{1}{h}\nabla y_j = \frac{1}{h}(y_j - y_{j-1}) \tag{15.38}$$

式(15.38)与式(15.20)相同。可以通过在式(15.37)中保留前两项来提高精度：

$$Dy_j \approx \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2\right)y_j$$

$$\nabla y_j = y_j - y_{j-1}$$

$$\nabla^2 y_j = \nabla(\nabla y_j) = \nabla(y_j - y_{j-1}) = (y_j - y_{j-1}) - (y_{j-1} - y_{j-2}) \tag{15.39}$$

$$\nabla^2 y_j = y_j - 2y_{j-1} + y_{j-2}$$

$$\therefore Dy_j \approx \frac{1}{h}\left[(y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{2}(y_j - 2y_{j-1} + y_{j-2})\right]$$

化简后，得到：

$$Dy_j \approx \frac{1}{2h}(3y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}) + O(h^2) \tag{15.40}$$

式(15.40)要比式(15.38)更精确，但是注意式(15.40)比式(15.38)会涉及更多相邻的点。可以证明，如果用前向差分公式，则有

$$Dy_j = \frac{1}{2h}(-y_{j+2} + 4y_{j+1} - y_j) + O(h^2) \tag{15.41}$$

而用中心差分公式，则有

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_j = D^2 y_j = \frac{1}{h^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + O(h^2) \tag{15.42}$$

表 15.1 给出了符号算子之间的关系。

表 15.1 符号算子之间的关系式

	E	Δ	δ	∇	hD
E	E	$1+\Delta$	$1+\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{1}{4}\delta^2}$	$(1-\nabla)^{-1}$	e^{hD}
Δ	$E-1$	Δ	$\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{1}{4}\delta^2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1}$	$e^{hD}-1$
δ	$E^{1/2}-E^{-1/2}$	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	δ	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$	$2\sinh\frac{1}{2}hD$
∇	$1-E^{-1}$	$\Delta(1+\Delta)^{-1}$	$-\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{1}{4}\delta^2}$	∇	$1-e^{-hD}$
hD	$\log E$	$\log(1+\Delta)$	$2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\delta$	$-\log(1-\nabla)$	hD
μ	$\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2})$	$\left(1+\frac{1}{2}\Delta\right)(1+\Delta)^{-1/2}$	$\sqrt{1+\frac{1}{4}\delta^2}$	$\left(1-\frac{1}{2}\nabla\right)(1-\nabla)^{-1/2}$	$\cosh\frac{1}{2}hD$

资料源自：Thom，A. and Apelt，C. J.，*Field Computations in Engineering and Physics*，Van Nost，Reinhold，1961.

15.3.2 加权余量法

加权余量法的基本概念可以通过一个简单的例子[2]来得以解释。假如我们希望得到一阶发展问题的解：

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{15.43a}$$

初始条件为：在时域 $0<t<1$ 中，满足

$$x(0) = 1 \tag{15.43b}$$

该问题的精确解是

$$x = e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{15.44}$$

精确解是一个无穷级数，可以在计算机上对该级数进行计算直至达到期望的精度。假设我们限制不能超过三项，因此写出如下一个近似解

$$x_T(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \tag{15.45}$$

我们将证明，如果令 $x(t)$ 近似等于 $x_a(t)$，即

$$x(t) \approx x_a(t) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 \tag{15.46}$$

就可以得到要比式(15.45)更好的结果。现在，调整 c_1 和 c_2 使得余量

$$R(t) = \frac{dx}{dt} + x = 1 + c_1(1+t) + c_2(2t + t^2) \tag{15.47}$$

在某种意义上是最小的。当然，对于 x 的精确解来说，在计算域中所有 t 值时，$R(t)$都将为 0。下面讨论使得 $R(t)$最小化的几种可能方法。

15.3.2.1 配点法(点匹配)

因为在式(15.46)中有两个未知量，所以通过将场域中两个给定点上的 $R(t)$减小为 0 来确定这两个未知量，如在 $t=1/3$ 和 $t=2/3$ 处：

$$R\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + c_1\left(1+\frac{1}{3}\right) + c_2\left[2\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

由此得到

$$\frac{4}{3}c_1 + \frac{7}{9}c_2 = -1 \tag{15.48a}$$

类似地，$R(2/3)=0$ 给出第二个方程：

$$\frac{5}{3}c_1+\frac{16}{9}c_2=-1 \tag{15.48b}$$

联立求解式(15.48a)和式(15.48b)，得到

$$c_1=-0.9310,\quad c_2=0.3103 \tag{15.49}$$

最后，由式(15.46)，得到

$$x_a(t)=x_c(t)=1-0.9310t+0.3103t^2 \tag{15.50}$$

15.3.2.2 子域法

首先，将计算域划分成与可调常数的个数一样多的子域；然后，在每个子域上使用余量的平均值为零的准则。例如，对于前面的问题，令两个子域分别为 $0<t<1/2$ 和 $1/2<t<1$。由下式可以得到确定 c_1 和 c_2 的方程

$$\int_0^{1/2}R(t)\mathrm{d}t=0,\quad \int_{1/2}^{1}R(t)\mathrm{d}t=0 \tag{15.51}$$

最后，得到近似解 $x_a=x_{SD}$ 为

$$x_{SD}=1-0.9474t+0.3158t^2 \tag{15.52}$$

15.3.2.3 伽辽金法

在式(15.46)中，我们已经使用 t^0、t^1 和 t^2 作为“基函数”，这些基函数是幂函数，令 t^0 的系数为 1 以满足初始条件，而令系数 c_1 和 c_2 是可以调整的以便在某种意义上使得余量 R 最小。俄国工程师伽辽金(Galekin)选用基函数作为权函数，并使得余量在整个计算域中的加权平均为零：

$$\int_0^1 tR(t)\mathrm{d}t=0;\quad \int_0^1 t^2R(t)\mathrm{d}t=0 \tag{15.53}$$

由式(15.53)，可以证明近似解 $x_a=x_G$ 为

$$x_G=1-0.9143t+0.2857t^2 \tag{15.54}$$

15.3.2.4 最小二乘法

在这种情况下，调整参数 c_1 和 c_2 使得余量平方的积分最小：

$$\frac{\partial}{\partial c_1}\int_0^1 R^2(t)\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{\partial R}{\partial c_1}R(t)\mathrm{d}t=0$$

于是，最小二乘法的“加权余量”准则可以写为

$$\int_0^1\frac{\partial R}{\partial c_1}R\mathrm{d}t=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}c_1+\frac{9}{4}c_2=0 \tag{15.55a}$$

$$\int_0^1\frac{\partial R}{\partial c_2}R\mathrm{d}t=\frac{4}{3}+\frac{9}{4}c_1+\frac{38}{15}c_2=0 \tag{15.55b}$$

因此，得到的近似解 $x_a=x_L$ 为

$$x_L=1-0.9427t+0.3110t^2 \tag{15.56}$$

在图 15.5 中，比较了各种近似解 x_a 与精确解 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}$之间的误差。当$t>0.4$时，最差的近似解是截断的泰勒级数解(式(15.45))，而其他近似解在整个计算域内的误差不超过 0.001。方法 1～4 的计算工作量会随着基函数项数的增加而迅速增加。配点方法是一种最直接的方法。这 4 种方法可以统称为“加权余量法”，因为用于获得代数方程的准则可以写为如下一般形式

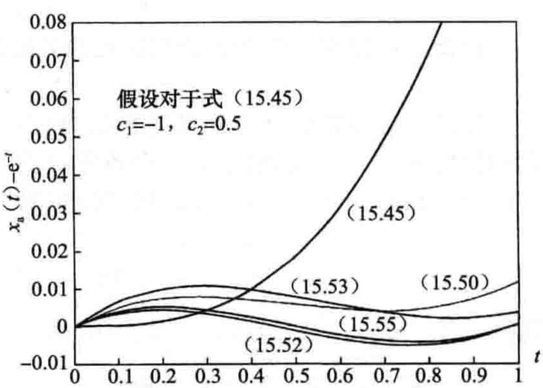


图 15.5 近似解的比较

$$\int_0^1 w_j(t)R(t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2 \tag{15.57}$$

式中，w_j 是权函数。在图 15.6 中画出了权函数。配点法(也称为点匹配法)的权函数是单位冲激函数。这一点可以从下式很容易地看出

$$\int_0^1 \delta(t - t_j)R(t)\mathrm{d}t = R(t_j), \quad j = 1,2 \tag{15.58}$$

如图 15.6 所示，子域法的权函数是脉冲函数。在这个例子中，基函数称为全域基函数，因为它们定义在整个计算域内。

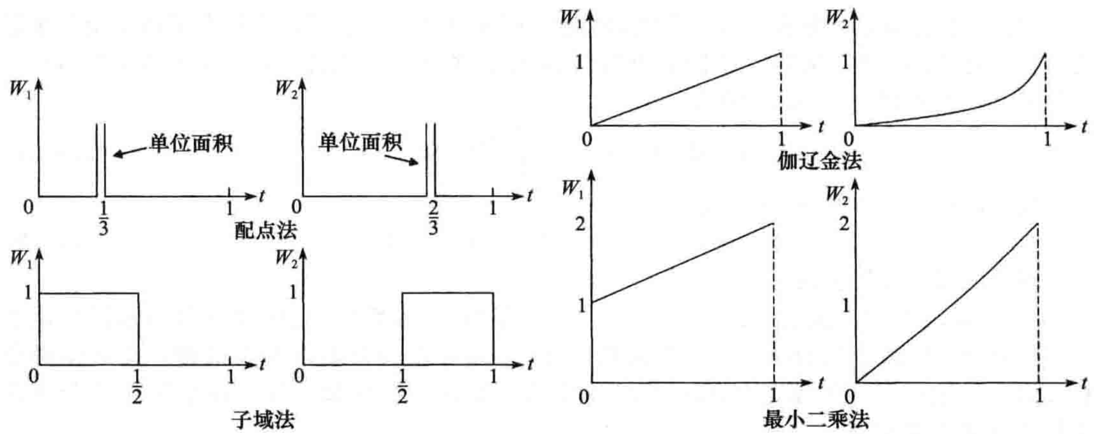


图 15.6 各种近似解法的权函数

我们也可以使用在子域中不为 0 而在子域外为 0 的子域基函数。当讨论"矩量法"时，关于这一专题会讨论得更多。前一节讨论了有限差分法，现在让我们看一下是否也可以用有限差分法来求解式(15.43)。让我们将这种算法推广到式(15.43)中更一般的情况：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \tag{15.59a}$$

$$x(0) = x_0 \tag{15.59b}$$

在点 j 处，用前向差分来近似式(15.59a)的左端，

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{h} = f(t_j, x_j) \tag{15.59c}$$

由此，可以得到微分方程初值问题的欧拉算法：

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j), \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{15.60}$$

注意，这种算法是一种自开始的方法，因为可以把式(15.60)用作一种递推关系式，其初始值为 x_0。由初始值 x_0 这个条件出发，可以把全部解 x_j 逐步推算出来。对于现在这个例子，$f(t, x) = -x$，则式(15.60)变为

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{j+1} &= x_j - hx_j = (1-h)x_j, \quad j = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{15.61}$$

选择 $h=1/3$，$x_1=2/3$，$x_2=\frac{2}{3}x_1=4/9$，以及 $x_3=\frac{2}{3}x_2=8/27=x(1)$。

对 $x_a = x_{FD}$ 来说，其近似答案为

$$x_{FD} = \frac{8}{27} = 0.2963 \tag{15.62}$$

在表 15.2 中，对各种近似方法所得到的结果进行了比较。

表 15.2 使用不同算法时，方程$(dx/dt)+x=0$，$x(0)=1$ 的近似解与精确解 $x(t)=e^{-t}$在 $t=1$ 和 $x(1)=0.3679$的结果比较

方程#	15.45	15.50	15.52	15.53	15.56	15.60
$x_a(1)$	$x_T(1)$	$x_c(1)$	$x_{SD}(1)$	$x_G(1)$	$x_L(1)$	$x_{FD}(1)$
值	0.5	0.3793	0.3684	0.3714	0.3683	0.2963
%误差 $\frac{x(1)-x_a(1)}{x(1)}\times 100$	−35.91	−3.1	−0.14	−0.96	−0.11	19.46

从表 15.2 中，我们看到其他所有方法都比基于泰勒展开式的二项式近似解要好。基于三步($h=1/3$)的前向差分近似解法的结果并不理想，但是其计算时间远小于基于加权余量的方法，因为基于加权余量的方法要求解联立代数方程组。如果取 $h=0.1$，可以使 FD 迭代计算更准确，这时需要进行 10 步递推计算，但是我们不需要解 10 个联立的代数方程。取$h=0.1$，将给出 x_{FD}的近似结果为 0.3487，误差值为 5.2%。可以尝试用中心差分公式计算一阶导数(式(15.21))，因为误差是 $O(h^2)$的高阶无穷小，在同样的迭代步数时可以得到更高的精度。

由式(15.21)，有

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_j=\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}=f(t_j,x_j)$$

$$x_0=x(0)$$

$$x_{j+1}=x_{j-1}+2hf(t_j,x_j),\quad j=0,1,2,\cdots \tag{15.63}$$

上式不能给出一种逐步递推的过程，因为 x_{-1}是未知的。当 $x_0=x(0)$时，可以将式(15.63)重新写为

$$x_i=x_{i-2}+2hf(t_{i-1},x_{i-1}),\quad i=2,3,\cdots \tag{15.64}$$

式(15.64)需要的计算工作量与式(15.60)一样多，但它不是自动开始的。为了启动逐步递推过程，就必须用其他方法求得 x_1 和 $f(t_j, x_j)=f_1$ 的值。应该注意到，为了保证中心差分方法的精度，其他方法的精度也必须是 $O(h^2)$的高阶无穷小。有关数值分析[3]的书会对这些方法加以讨论。

15.3.3 矩量法

矩量法是上一节讨论的加权余量法的另一种形式，Harrington[4]将其推广应用于电磁场问题中。通常都用线性空间中的语言来介绍矩量法[5]，这里将通过一个例子来进行说明。设问题用算子可以描述为

$$Lf=g \tag{15.65}$$

式中，L 是一个算子，f 是待求的函数，g 是已知的源函数，代表一种激励。现在的问题就是给定 L 和 g，求 f。算子可以是微分算子、积分算子或者微积分算子。计算域和边界条件都是这个问题的已知条件中的一部分。矩量法包括如下几个步骤。假定

$$f\approx\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n \tag{15.66}$$

式中，f_n 是所选择的基函数。这些基函数满足边界条件。像在前面一样，选择权函数 w_m 使得余量在某种意义下最小。选择问题的内积。最好是通过一个例子[4]来说明如何选择 f_n、w_m 和 N。假设我们希望求解如下问题：

$$-\frac{d^2f}{dx^2}=1+4x^2 \tag{15.67a}$$

给定计算域为 $0<x<1$，边界条件是：

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{15.67b}$$

这个问题很容易求解，只需对式(15.67a)进行两次积分，然后由边界条件确定出积分常数。该问题的精确解是

$$f(x) = \frac{5x}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} \tag{15.67c}$$

下面给出基于“矩量法”的近似解的求解公式。将式(15.66)代入式(15.65)中，然后乘以 w_m 并计算两边的内积，由此得到求解 α 的第 m 个代数方程。这一步骤可以写成如下数学形式：

$$\left\langle w_m, L\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n \right\rangle = \langle w_m, g\rangle \tag{15.68}$$

式中，〈〉是一个内积符号。对于现在的例子，两个函数 ψ_m 和 ψ_n 的内积是

$$\langle \psi_m, \psi_n\rangle = \int_0^1 \psi_m\psi_n \mathrm{d}x \tag{15.69}$$

将式(15.69)应用于式(15.68)中，得到

$$\int_0^1 \left[w_m L\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 w_m g\,\mathrm{d}x \tag{15.70}$$

下一步要考虑 w_m 和 f_n 的选择问题。注意，w_m 和 f_n 不必是在整个计算域内定义的函数，它们不需要在整个计算域上是非零的。它们可以是分段函数，在部分计算域内不为 0，而在剩余部分计算域内为 0。在许多情况下，使用这种函数可以减少在获得代数方程组过程中的计算工作量。下面定义两个这样的分段基函数。

脉冲函数 $P(x)$；令

$$P(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \dfrac{1}{2(N+1)} \\ 0, & 其他 \end{cases} \tag{15.71}$$

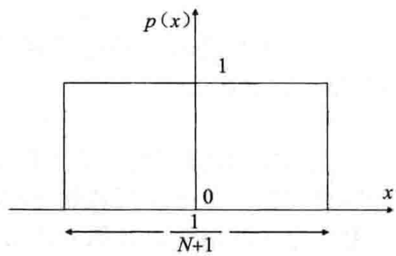


图 15.7 脉冲函数

在图 15.7 中画出了这个函数。利用如下定义，可以对脉冲函数的中心进行位移

$$P(x-x_n) = \begin{cases} 1, & |x-x_n| < \dfrac{1}{2(N+1)} \\ 0, & 其他 \end{cases} \tag{15.72}$$

另一个有用的函数是三角形函数 $T(x-x_n)$，其定义如下

$$T(x-x_n) = \begin{cases} 1-|x-x_n|(N+1), & |x-x_n| < \dfrac{1}{N+1} \\ 0, & |x-x_n| > \dfrac{1}{N+1} \end{cases} \tag{15.73}$$

在图 15.8 中画出了该函数。

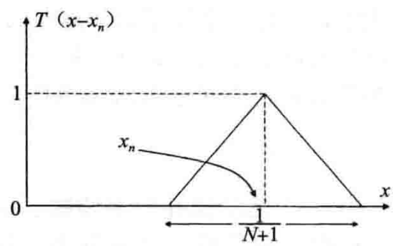


图 15.8 三角形函数

在选择式(15.70)中的 w_m 和 f_n 之后，就可以完成关于 x 的定积分，其结果可以写为如下一个代数方程

$$\sum_{n=1}^{N} l_{mn}\alpha_n = g_m \tag{15.74}$$

式中

$$l_{mn} = \int_0^1 w_m L f_n \mathrm{d}x \tag{15.75}$$

$$g_m = \int_0^1 w_n g\,\mathrm{d}x \tag{15.76}$$

如果选择 N 个权函数 w_m，$m=1, 2, 3, \cdots, N$，由式(15.74)就可以得到求解 α_n 的 N

个代数方程。式(15.75)和式(15.76)给出了选择 w_m 与 f_n 的一些建议。对于手算来说，我们更希望积分尽可能地简单一些。只要 Lf_n 是一个有明确定义的可积函数，就可以完成积分。我们知道，当积分中有一个单位冲激函数时，积分是

$$\int_a^b \delta(x-x_j)f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}f(x_j)=f_j, & a<x_j<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{15.77}$$

那么，选择 f_n 使得 Lf_n 是多个单位冲激函数之和，我们就可以容易地进行积分。如果 $f_n = T(x-x_n)$ 且 L 是一个二阶导数，Lf_n 就是多个单位冲激函数之和。在图 15.9 中画出了 $\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2$。

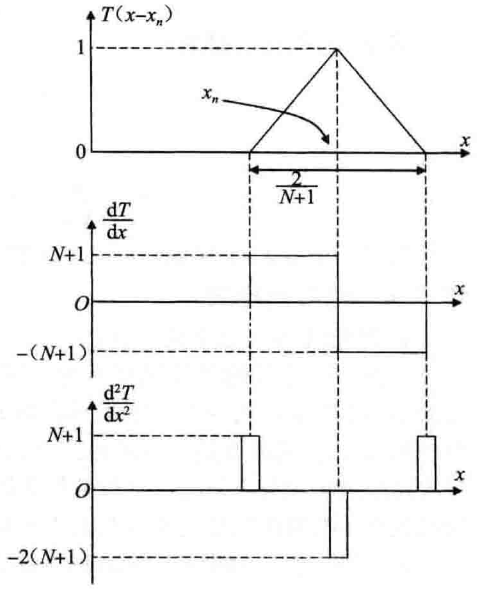


图 15.9　三角形函数的二阶导数

因为 Lf_n 是由多个单位冲激函数所构成，所以可以为 w_m 选择的最简单函数就是脉冲函数。让我们通过选择式(15.66)中的 $N=2$ 来说明这一计算过程。在图 15.10 中分别画出了权函数 w_1 和 w_2 以及基函数 T_1 与 T_2。

现在，我们可以得到关于 α_1 和 α_2 的两个代数方程。得到第一个方程的一些过程如下：

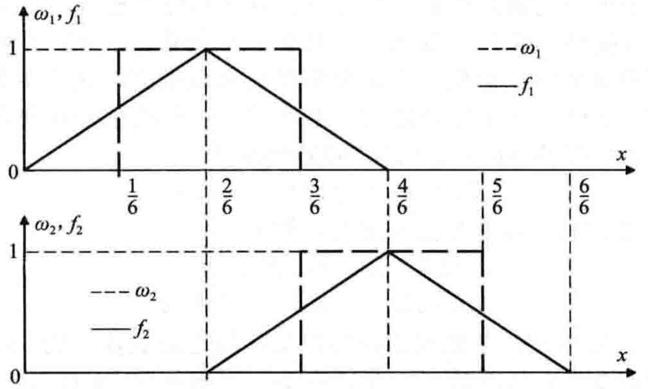


图 15.10　权函数和基函数

$$Lf_1=-\frac{\mathrm{d}^2f_1}{\mathrm{d}x^2}=-3\left[\delta(x)-2\delta\left(x-\frac{2}{6}\right)+\delta\left(x-\frac{4}{6}\right)\right]$$

$$l_{11}=\int_0^1 w_1Lf_1\mathrm{d}x=\int_{1/6}^{3/6}-3\left[\delta(x)-2\delta\left(x-\frac{2}{6}\right)+\delta\left(x-\frac{4}{6}\right)\right]\mathrm{d}x=6$$

$$l_{12}=\int_{1/6}^{3/6}-3\left[\delta\left(x-\frac{2}{6}\right)-2\delta\left(x-\frac{4}{6}\right)+\delta\left(x-\frac{6}{6}\right)\right]\mathrm{d}x=-3$$

$$g_1=\int_0^1 w_1g\mathrm{d}x=\int_{1/6}^{3/6}(1+4x^2)\mathrm{d}x=\frac{40}{81}$$

第一个方程是

$$\begin{aligned}l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2&=g_1\\ 6\alpha_1-3\alpha_2&=\frac{40}{81}\end{aligned} \tag{15.78}$$

类似地，可以得到第二个方程：

$$l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2=g_2$$

$$-3\alpha_1+6\alpha_2=\frac{76}{81} \tag{15.79}$$

求解 α_1 和 α_2，得到

$$\alpha_1=\frac{52}{243},\quad \alpha_2=\frac{64}{243} \tag{15.80}$$

和

$$f\approx\frac{52}{243}T_1\left(x-\frac{2}{6}\right)+\frac{64}{243}T_2\left(x-\frac{4}{6}\right) \tag{15.81}$$

选择一个更大的 N 值可以进一步提高计算精度，但是代数方程的数目也会相应地增加。

15.3.4 有限元方法

有限元法涉及如下两个问题：

i. 把一个连续的计算域划分为有限数量个单元。如图 15.11 所示，把一个二维矩形区域划分为一组三角形单元(e)。离散点是三角形的三个顶点。该方法的目的是通过生成与未知电位点数量相等的代数方程组，来找到在这些有限数目的离散点上的未知电位值。

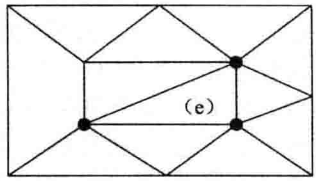


图 15.11 使用有限元法离散一个连续域

ii. 有限元法中的第二问题是生成代数方程组的方法。

15.3.5 变分原理

变分原理[5]用于生成代数方程组。我们不必直接求解方程式(15.65)，而是试图找到一个函数 f，它能够使得泛函 $I(f)$取极值。对于泛函来说，自变量本身就是一个函数。在满足边界条件的所有函数中，存在一个函数使得泛函取极值，这个函数就是式(15.65)给出的平衡问题的解。在使用这个原理之前，必须找出一种构造平衡问题(式(15.65))泛函的方法。众所周知，在线性空间中式(15.65)的泛函是：

$$I(f)=\langle Lf,f\rangle-2\langle f,g\rangle \tag{15.82}$$

假定算子 L 是正定的。算子 L 是正定的，如果

$$\langle LX_1,X_2\rangle=\langle X_1,LX_2\rangle$$
$$\langle LX,X\rangle\geqslant 0,\quad 对任意\ X \tag{15.83}$$

在上式中，X_1、X_2 和 X_3 是满足相同边界条件的任意函数。表 15.3 列出了在电磁场中常见的偏微分方程及它们的泛函[10]。借助一个一维例子(见图 15.12)，可以很好地解释式(15.82)的应用及其意义。

表 15.3 与电磁场中常见的偏微分方程相应的变分原理

方程名称	偏微分方程	变分原理
非齐次方程	$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=g$	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int_v(\lvert\nabla\Phi\rvert^2-k^2\Phi^2+2g\Phi)\mathrm{d}v$
齐次方程	$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=0$ 或	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int_v(\lvert\nabla\Phi\rvert^2-k^2\Phi^2)\mathrm{d}v$
	$\nabla^2\Phi-\frac{1}{u^2}\Phi_{u}=0$	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int^{t_0}\int_v(\lvert\nabla\Phi\rvert^2-\frac{1}{u^2}\Phi_t^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}t$
扩散方程	$\nabla^2\Phi-k\Phi_t=0$	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int^{t_0}\int_v(\lvert\widetilde{N}\Phi\rvert^2-k\Phi_t\Phi)\mathrm{d}v\mathrm{d}t$
泊松方程	$\nabla^2\Phi=g$	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int_v(\lvert\nabla\Phi\rvert^2+2g\Phi)\mathrm{d}v$
拉普拉斯方程	$\nabla^2\Phi=0$	$I(\Phi)=\frac{1}{2}\int_v(\lvert\nabla\Phi\rvert^2)\mathrm{d}v$

注意：$\Phi_t=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$；$\Phi_u=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$；$\Phi_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$；$\lvert\nabla\Phi\rvert^2=\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi=\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2$

在两个都接地并且相距 $d=1\text{m}$ 的平行理想导体(PEC)板之间，分布着体电荷密度为 $\rho_V(x)$ 的电荷云。电介质的介电常数为 ε。假定导体板的尺寸很大，那么泊松方程：

$$-\nabla^2\Phi=\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{15.84}$$

可以简化为一维方程

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{15.85}$$

边界条件是：

$$\Phi(0)=\Phi(1)=0 \tag{15.86}$$

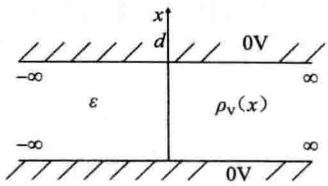


图 15.12　平行导体板之间的电荷云

将问题的内积定义为

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle=\int_0^1\psi_1\psi_2\,dx \tag{15.87}$$

由式(15.82)可知，与式(15.85)相应的泛函可写为

$$I(\Phi)=\int_0^1-\frac{d^2\Phi}{dx^2}\Phi dx-2\int_0^1\Phi(x)\frac{\rho_V(x)}{\varepsilon}dx \tag{15.88}$$

求式(15.88)中右端的第一个积分，并应用边界条件(式(15.86))，得到

$$I(\Phi)=\int_0^1\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2dx-2\int_0^1\Phi(x)\frac{\rho_V(x)}{\varepsilon}dx \tag{15.89}$$

使泛函(式(15.89))取极小值的函数 $\Phi(x)$ 就是方程式(15.85)在给定边界条件(式(15.86))下的解。如果把式(15.89)改写为如下形式

$$I_E(\Phi)=\frac{1}{2}\varepsilon I(\Phi)=\int_0^1\frac{1}{2}\varepsilon\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|^2dx-\int_0^1\Phi(x)\rho_V(x)dx \tag{15.90}$$

就可以给出式(15.89)的一个物理解释。

很容易看出，泛函(式(15.90))就是电位能，因为 $|d\Phi/dx|$ 是电场 $|\overline{E}|$ 的大小，而 $\int_0^1(1/2)\varepsilon E^2dx$ 是存储在电介质中的电能。使泛函 I_E 最小就相当于使得净电位最小。在力学中，一个类似的原理是：应用牛顿动力学方程或者使泛函(泛函是重力势能)最小，我们都可以求解一个引力问题。

最后一步是如何获得代数方程组。在每个单元中，电位函数 $\Phi(x)$ 可以用该单元两个顶点的电位值来表示(见图 15.13)。

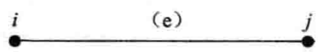


图 15.13　单元(e)和顶点 i 和 j

如果用线性插值(见图 15.14)，将有

$$\Phi(x)=\Phi_i+\frac{\Phi_j-\Phi_i}{x_j-x_i}(x-x_i) \tag{15.91}$$

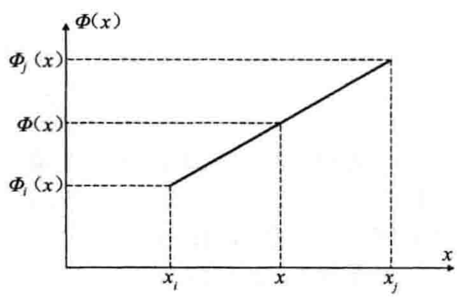


图 15.14　线性插值

式(15.91)也可以写成另一种形式

$$\Phi(x)=N_i(x)\Phi_i+N_j(x)\Phi_j \tag{15.92}$$

其中

$$N_i=\frac{x_j-x}{x_j-x_i} \tag{15.93a}$$

$$N_j=\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \tag{15.93b}$$

式中，$N_i(x)$ 和 $N_j(x)$ 都称为形状函数，如图 15.15 所示。

注意

$$N_i=\begin{cases}1, & x=x_i\\0, & x=x_j\end{cases}\quad N_j=\begin{cases}1, & x=x_j\\0, & x=x_i\end{cases}$$

把单元的顶点叫作节点，形状函数 N_i 在节点 i 的值是 1，而在其他节点的值则为 0。在两个节点之间，它是线性变化的。对于形状函数 N_j 也有类似的结论，在它自己的节点上为 1，在其他节点上则为 0。事实上，不用改写式(15.91)，也可以得到式(15.93a)和式(15.93b)。对于线性变化，可以写出

$$N_i(x) = a_i + b_i x \tag{15.94}$$

因为 $N_i(x_i)=1$，$N_i(x_j)=0$，所以有

$$1 = a_i + b_i x_i \tag{15.95}$$

$$0 = a_i + b_i x_j \tag{15.96}$$

$$\begin{bmatrix}1 & x_i\\1 & x_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_i\\b_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$a_i = \frac{\begin{bmatrix}1 & x_i\\0 & x_j\end{bmatrix}}{x_j - x_i} = \frac{x_j}{x_j - x_i}$$

$$b_i = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}}{x_j - x_i} = -\frac{1}{x_j - x_i} \tag{15.97}$$

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$$

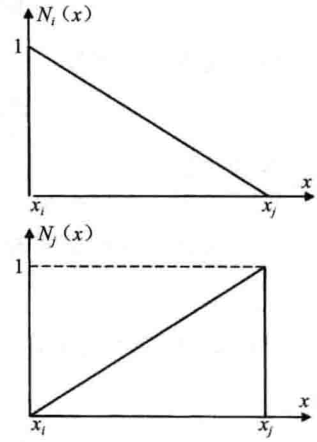


图 15.15 形状函数

类似地，可得式(15.93b)。由式(15.92)和式(15.93)，有

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{x_j - x_i}(-1)\Phi_i + \frac{1}{x_j - x_i}\cdot 1\cdot \Phi_j = \frac{1}{x_j - x_i}(\Phi_j - \Phi_i) \tag{15.98}$$

现在，单元(e)上的泛函 $I^{(e)}(\Phi)$ 可以用 Φ_i 和 Φ_j 计算出来。由式(15.90)，有

$$I^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{(x_j - x_i)^2}(\Phi_j - \Phi_i)^2 dx - \int_{x_i}^{x_j}[N_i(x)\Phi_i + N_j(x)\Phi_j]\rho_V(x) dx \tag{15.99}$$

式(15.99)可进一步简化：

$$I^{(e)} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{(\Phi_j - \Phi_i)^2}{(x_j - x_i)} - \Phi_i\int_{x_i}^{x_j} N_i(x)\rho_V(x) dx - \Phi_j\int_{x_i}^{x_j} N_j(x)\rho_V(x) dx \tag{15.100}$$

总泛函可以通过对所有单元上的泛函进行求和得到：

$$I_E(\Phi) = \sum_{\text{全部单元}} I^{(e)} \tag{15.101}$$

此时，式(15.101)对每一个未知电位值取最小值，就可以得到如下代数方程组：

$$\frac{\partial I_E}{\partial \Phi_k} = 0, \quad \Phi_k(\text{未知节点电位}) \tag{15.102}$$

让我们举一个简单的例子来说明有限元法的计算过程。在图 15.11 中，令 $d=1$，$\rho_V=1$，$\varepsilon=1$，并且把计算域划分为如图 15.16 所示的两个单元。

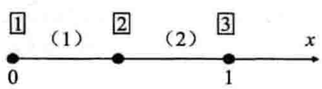


图 15.16 计算域划分成两个单元

对单元 1：$x_i=2$，$x_j=1/2$

$$N_i(x) = \frac{1/2 - x}{1/2 - 0} = 1 - 2x,\quad N_i(x) = \frac{x - 0}{1/2 - 0} = 2x$$

$$\Phi_i = \Phi_{\boxed{1}} = 0;\quad \Phi_j = \Phi_{\boxed{2}}$$

$$I^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\Phi_{\boxed{2}}^2}{1/2 - 0} - 0\int_0^{1/2}(1-2x)dx - \Phi_{\boxed{2}}\int_0^{1/2} 2x dx = \Phi_{\boxed{2}}^2 - 0 - \Phi_{\boxed{2}} 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2} = \Phi_{\boxed{2}}^2 - \frac{\Phi_{\boxed{2}}}{4}$$

对单元 2：$x_i=1/2$，$x_j=1$

$$N_i(x)=\frac{1-x}{1-1/2}=2(1-x),\quad N_j(x)=\frac{x-1/2}{1-1/2}=2x-1$$

$$\Phi_i=\Phi_{\boxed{2}};\quad \Phi_j=\Phi_{\boxed{3}}=0$$

$$I^{(2)}=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{(0-\Phi_{\boxed{2}})^2}{1-\frac{1}{2}}-\Phi_{\boxed{2}}\int_{1/2}^{1}2(1-x)\mathrm{d}x-0\int_{1/2}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\Phi_{\boxed{2}}^2-2\Phi_{\boxed{2}}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^{1}-0=\Phi_{\boxed{2}}^2-\frac{\Phi_{\boxed{2}}}{4}$$

$$I_{\mathrm{E}}=I^{(1)}+I^{(2)}=2\Phi_{\boxed{2}}^2-\frac{\Phi_{\boxed{2}}}{2}$$

为了使 I_{E} 最小化，应取 $\partial I_{\mathrm{E}}/\partial\Phi_{\boxed{2}}=0$，$4\Phi_{\boxed{2}}-1/2=0$，最后得到

$$\Phi_{\boxed{2}}=\frac{1}{8}\tag{15.103}$$

让我们把这个结果与这个简单问题的精确解作一个对比：

$$-\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}=1,\quad \begin{matrix}\Phi(0)=0\\ \Phi(1)=0\end{matrix}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}=x+c_1$$

$$-\Phi=\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2\tag{15.104}$$

由边界条件可得，

$$-0=0+0+c_2,\quad c_2=0$$

$$-0=\frac{1^2}{2}+c_1\cdot 1,\quad c_1=-\frac{1}{2}$$

$$-\Phi=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x-1)$$

$$\Phi=\frac{1}{2}x(1-x)\tag{15.105}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\tag{15.106}$$

可以看到，由式(15.105)给出的精确解与由式(15.103)给出的有限元法的近似解相同；然而，应该注意到在整个计算域内却不是这样的。例如，由精确解式(15.105)得到的 $\Phi(1/4)$ 是

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{32}\tag{15.107}$$

由有限元法，我们注意到 $x=1/4$ 不是一个单元的顶点，但是它在单元(1)中。在这个单元中，有

$$N_i(x)=1-2x,\quad N_j(x)=2x$$

$$\Phi(x)=N_i(x)\Phi_i+N_j(x)\Phi_j=(1-2x)\Phi_{\boxed{1}}+2x\Phi_{\boxed{2}}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1-\frac{2}{4}\right)\times 0+2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{2}{32}\tag{15.108}$$

引起误差的原因很清楚：精确解表明电位的变化是二次函数，而我们采用的有限元法却假定了线性插值。把基于式(15.94)所得到的形状函数称为一阶形状函数。我们可以基于二次插值来定义二阶形状函数。在结束这个专题的讨论之前，让我们看看如果用有限差分法解这个问题，会得到什么样的结果。应用中心差

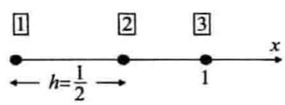


图 15.17　有限差分法解的网格

分(图 15.17)，有

$$-\left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{②}=-\frac{\Phi_{①}+\Phi_{③}-2\Phi_{②}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

由边界条件，可得 $\Phi_{①}=\Phi_{③}=0$，$8\Phi_{②}=1$ 和 $\Phi_{②}=1/8$。

在一维问题中，一阶有限元法与有限差分法相等价。

在结束本章之前，让我们来证明算子 $L=-d^2/dx^2$ 是正定的[5]。令 Φ_1 和 Φ_2 是两个函数，它们满足原来问题的边界条件，即

$$\Phi_1(0)=0,\quad \Phi_1(1)=0 \tag{15.109}$$

$$\Phi_2(0)=0,\quad \Phi_2(1)=0 \tag{15.110}$$

$$(LX_1,X_2)=\int_0^1-\frac{d^2\Phi_1}{dx^2}\Phi_2 dx=-\int_0^1\Phi_2 d\left(\frac{d\Phi_1}{dx}\right)=-\left(\Phi_2\frac{d\Phi_1}{dx}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{d\Phi_2}{dx}\frac{d\Phi_1}{dx}dx\right)$$

$$(LX_1,X_2)=\int_0^1\frac{d\Phi_1}{dx}\frac{d\Phi_2}{dx}dx \tag{15.111}$$

$$(X_1,LX_2)=\int_0^1\Phi_1\left(-\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\right)dx=-\left(\Phi_1\frac{d\Phi_2}{dx}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{d\Phi_1}{dx}\frac{d\Phi_2}{dx}dx\right)=\int_0^1\frac{d\Phi_1}{dx}\frac{d\Phi_2}{dx}dx$$

因此，有

$$(LX_1,X_2)=(X_1,LX_2)$$

而且

$$(L\Phi,\Phi)=\int_0^1-\frac{d^2\Phi}{dx^2}\Phi dx=-\left(\Phi\frac{d\Phi}{dx}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{d\Phi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}dx\right)$$

$$(L\Phi,\Phi)=\int_0^1\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|^2dx$$

显然，它是正的，这样我们证明了 $L=-d^2/dx^2$ 是正定的。

参考文献

1. Thom, A. and Apelt, C. J., *Field Computations in Engineering and Physics*, Van Nostr, Reinhold, London 1961.
2. Crandal, S. H., *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
3. Conte, S. D., *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
4. Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE Press, New York, 2001.
5. Van Bladel, J., *Electromagnetic Field* (2nd Edition), IEEE Press, New York, 2007.
6. Jin, J. M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 2002.
7. Volakis, J. L., Chatterjee, A., and Kempel, L., *Finite Element Method for Electromagnetics*, Wiley-Interscience, New York, 1998.
8. Pelosi, G., Selleri, S., and Coccioli, R., *Quick Finite Element Method for Electromagnetic Waves*, Artech House, Norwood, MA, 1998.
9. Silvester, P. P. and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers* (3rd Edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
10. Sadiku, N. O. M., *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

第16章
二维问题[⊖]

波导问题是一个经典的二维问题。15.1节已经讨论过有关波导的公式，这一节仍然从这个问题开始。为了方便起见，这里重新写出TM模式的方程式(15.6)：

$$-\nabla_t^2 F=\lambda F,\quad \text{在闭合边界上 } F=0 \tag{16.1}$$

其中，在横截面上的拉普拉斯算子是

$$-\nabla_t^2=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{16.2}$$

16.1 有限差分方法

可以用如下中心差分公式来近似二阶偏导数：

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{j,k}=\frac{F_{j+1,k}+F_{j-1,k}-2F_{j,k}}{h^2}+O(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{j,k}=\frac{F_{j,k+1}+F_{j,k-1}-2F_{j,k}}{h^2}+O(h^2)$$

现在，式(16.1)可以写为

$$\frac{1}{h^2}(4F_{j,k}-F_{j+1,k}-F_{j-1,k}-F_{j,k+1}-F_{j,k-1})=\lambda F_{j,k} \tag{16.3}$$

在矩形方格的每一个场点上应用这个“计算格式”将得到如下代数方程组

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{16.4}$$

求解方程式(16.4)，就可以得到特征值和相应的特征向量。下面通过一个矩形波导的例子来说明这个求解过程。我们希望应用FD方法计算截止波数和截止频率。

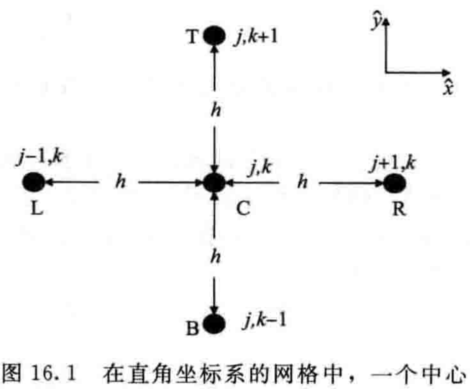


图16.1 在直角坐标系的网格中，一个中心节点和其周围相邻四个等距离节点

由于在PEC表面上 $F=0$，仅有 F_A、F_B 和 F_C 是未知量。分别选择图16.1中的 A、B 和 C 为中心节点，可以得到这三个未知量所满足的三个方程。

因为 $h=\dfrac{1}{4}$，所以有

$$16(4F_A-0-0-F_B-0)=\lambda F_A$$
$$16(4F_B-F_A-0-F_C-0)=\lambda F_B$$
$$16(4F_C-F_B-0-0-0)=\lambda F_C$$

将上面三个代数方程写成矩阵的形式，可得

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}64 & -16 & 0\\ -16 & 64 & -16\\ 0 & -16 & 64\end{bmatrix} \tag{16.5}$$

⊖ 第16章的附录参见附录16A～16E。

和

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}F_A\\F_B\\F_C\end{bmatrix} \tag{16.6}$$

现在，可以用任何一种标准的数学软件求出 λ 与相应的特征向量。表 16.1 比较了式(16.5)的特征值与由矩形波导(TM 模式)理论得到的精确解：

$$\lambda_{mn}=k_c^2=\left(\frac{m\pi}{1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{1/2}\right)^2,$$

$$m=1,2,\cdots,\infty,\quad n=1,2,\cdots,\infty \tag{16.7}$$

表 16.1 特征值：TM 模式

	有限差分	精确值
λ_1	41.3726	$5\pi^2=49.3(\text{TM}_{11})$
λ_2	64.00	$8\pi^2=78.9(\text{TM}_{21})$
λ_3	86.63	

如果减小 h，就可以得到更精确的解。然而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数会增大。如果我们想讨论 TE 模式，其纵向场为 $\widetilde{H}_z$，且有

$$\widetilde{H}_z=G(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{16.8}$$

$$-\nabla_t^2 G=\lambda G \tag{16.9}$$

上面的方程与方程式(16.1)相同，但在 PEC 表面上，边界条件是诺依曼(Neumann)型的：

$$\frac{\partial G}{\partial n}=0 \tag{16.10}$$

式中，$\hat{n}$是与导体表面相垂直的单位矢量。根据图 16.3，在任意点，例如，在 D 点，$G\neq0$，但在 D 点有 $\partial G/\partial x=0$。如果用后向差分公式来近似一阶导数，就可以实现这个边界条件，可写为

$$0=\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_D=\frac{G_D-G_C}{h},\quad G_D=G_C \tag{16.11}$$

然而，后向差分公式的精度只能达到 $O(h)$。那么，如果使用式(16.11)，即使采用精度为 $O(h^2)$的中心差分来近似代替拉普拉斯算子，其精度会被降低为 $O(h)$。如果采用中心差分公式代替偏导数 $\partial G/\partial x$，就需要考虑场域外的一个镜像点 E，有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_D=\frac{G_E-G_C}{2h}+O(h^2) \tag{16.12}$$

为了实现诺依曼边界条件，由上式得到：

$$G_E=G_C \tag{16.13}$$

其优点是边界条件和拉普拉斯方程的近似都是 h^2 阶的，只不过所付出的代价是增加了一个未知量，即是需要计算 G_D。在图 16.2 中的 D 点处，应用计算格式就可以得到所需的额外方程：

$$\nabla^2 G|_D=\frac{\Phi_C+\Phi_E+\cdots-4\Phi_D}{h^2} \tag{16.14}$$

$$\nabla^2 G|_D=\frac{2\Phi_C+\cdots-4\Phi_D}{h^2} \tag{16.15}$$

我们已经利用式(16.13)消去了 Φ_E。如果为了得到更高的精度而减小 h，方程的数量将会增加。然而，在任一个方程中，未知量的数目不会超过 5 个(见图 16.3)。

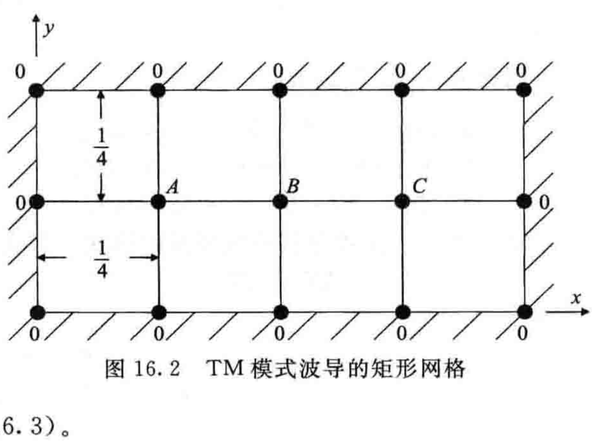


图 16.2 TM 模式波导的矩形网格

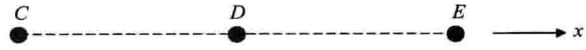


图 16.3 在区域外的一个镜像点 E

如果将这些方程写成矩阵形式，则在每一行中的非零元素将不会不超过 5 个。现在，在图 16.2 中取 $h=0.01$，让我们来求解 TE 模问题。未知量的数目是 $100\times50=5000$，矩阵 A 的大小是 5000×5000。矩阵 A 中的任何一行仅有 5 个非零元素。应用像高斯消去法这一类方法求解这些方程，效率会非常低，因为它们都没有利用矩阵 A 是稀疏矩阵这一特性。有关数值分析的书讨论了求稀疏矩阵的逆的一些特殊方法。像“高斯消去法”这类一味凭借蛮力的方法需要完成大量的算术运算，在这一过程中会引起“舍入误差”，舍入误差是由于浮点运算舍去有效数字而产生的。一种值得选择的方法是下一节将要介绍的迭代方法。

16.2 迭代解法

为了得到代数方程，我们必须对二维拉普拉斯算子进行差分离散(见图 16.4)

$$\nabla^2\Phi|_C=\frac{\Phi_L+\Phi_B+\Phi_R+\Phi_T+\cdots-4\Phi_C}{h^2} \tag{16.16}$$

如果我们求解拉普拉斯方程，则式(16.16)就可以写成

$$\Phi_C=\frac{1}{4}(\Phi_L+\Phi_B+\Phi_R+\Phi_T) \tag{16.17}$$

方程式(16.17)说明，在中心节点的电位可以近似地取为其周围相邻四个等距离节点的电位的平均值(左、右、上和下)。在迭代解法中，先给每一个未知量选取一个迭代初值，称为零次迭代值。然后，应用式(16.17)计算出新值，也即第一次的迭代值：

$$\Phi_C^{(1)}=\frac{1}{4}(\Phi_L^{(0)}+\Phi_B^{(0)}+\Phi_R^{(0)}+\Phi_T^{(0)}) \tag{16.18}$$

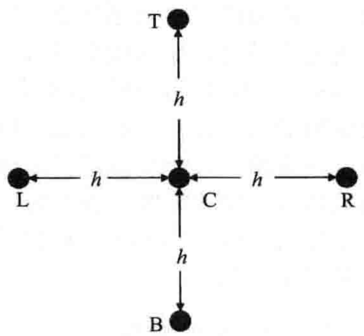


图 16.4 拉普拉斯算子的计算格式

当在一个网格节点上应用式(16.18)以后，我们再移到下一个网格节点按式(16.18)进行第一次运算，反复进行这个步骤，生成第一次的迭代值。如果在每一个电位是未知的网格节点上都按式(16.18)进行第一次运算，当完成第一次迭代循环过程后，就可以得到一组第一次迭代值。此后用得到的第一次迭代值作为迭代初值重复这一迭代过程，当完成第二次迭代循环过程后，就可以生成第二次迭代值。重复这一过程一直到这组方程的解达到期望的精度，然后终止这一过程，并将最后的一次迭代值看做问题的近似解：

$$\Phi_C^{(n+1)}=\frac{1}{4}(\Phi_L^{(n)}+\Phi_B^{(n)}+\Phi_R^{(n)}+\Phi_T^{(n)}) \tag{16.19}$$

设想规定迭代运算的顺序从左下角开始做起，即按先从左至右，再从下至上的顺序进行迭代，这时注意到在对节点 C 进行第 $n+1$ 次近似的迭代循环中，已经得到了节点 L 和 B 的第 $n+1$ 次迭代值与第 n 次迭代值。此时，就可以立即使用这个新值，而不必等到计算出全部节点上的新值才使用它。换句话说，按照规定的运算顺序，式(16.19)将修正为：

$$\Phi_C^{(n+1)}=\frac{1}{4}(\Phi_L^{(n+1)}+\Phi_B^{(n+1)}+\Phi_R^{(n)}+\Phi_T^{(n)}) \tag{16.20}$$

式(16.19)描述了一种瞬时替代方法，也被称为 Richardson 方法[1]，而式(16.20)则描述了一种逐次替代方法，也被称为 Liebman 方法[2]。从直关上看来，似乎 Liebman 方法比 Richardson 需要的迭代次数更少。对线性问题来说，这是正确的。

对椭圆形偏微分方程，例如，拉普拉斯和亥姆霍兹方程，用有限差分方法求出的解是收敛的，但困难是其解收敛得很缓慢。可以采用附加的加速技术来加速迭代收敛过程。其

中的一种方法叫做外推 Liebman 方法，这种方法很容易用于计算机编程：

$$\Phi_C^{(n+1)} = \Phi_C^{(n)} + \omega\left\{\left[\frac{\Phi_L^{(n+1)} + \Phi_B^{(n+1)} + \Phi_R^{(n)} + \Phi_T^{(n)}}{4}\right] - \Phi_C^{(n)}\right\} \tag{16.21}$$

注意，括号[]中的值是假如采用 Liebman 方法时所得到的值，即把由式(16.20)所算得的结果不作为第 $n+1$ 次迭代值，而把它视为一中间结果。系数 ω 称为松弛因子。如果记括号[]中的值为 $\Phi_C^{(L)}$，则式(16.21)可以写为：

$$\Phi_C^{(n+1)} = \Phi_C^{(n)} + \omega(\Phi_C^{(L)} - \Phi_C^{(n)}) \tag{16.22}$$

$$\Phi_C^{(n+1)} = \Phi_C^{(L)} + \alpha(\Phi_C^{(L)} - \Phi_C^{(n)}) \tag{16.23}$$

式中，

$$\alpha = \omega - 1 \tag{16.24}$$

这个公式的含义可以表述为：$\Phi_C^{(n)}$ 是由前一次迭代所得到的值。$\Phi_C^{(L)}$ 是采用 Liebman 方法得到的值。$\Phi_C^{(L)} - \Phi_C^{(n)}$ 是在不考虑松弛因子的情况下，两次连续迭代值之间的差值。将这个差值的一部分加到 $\Phi_C^{(L)}$ 上就得到了用于进行下一次迭代所需的初值，这意味着试图通过由前面的经验来预测下一次的值以减少至少一次迭代。因此，从理论上来说，引入这个松弛因子可以加速收敛速度。当 ω 取最优值时，收敛速度最快，同时它取值的范围是 $1<\omega<2$。而且，ω 的值取得大比取得小要好。这是一个非常有用的结果，因为虽然最优松弛因子的估计在一些情况中(比如矩形边界[1])是非常简单的，但在更一般的情况下却是非常困难的，只能凭借经验取值。例如，在实际中，可以对一个粗糙网格的 ω 与迭代次数的关系进行实验研究，在获得一个最优的 ω 值后，再对网格间距 h 更小的精细网格也使用这个最优 ω 值。Kalluri[3] 给出了有关这一专题更多的信息、例子和相关的参考文献，其要点见附录 16E。

16.3 有限元方法[4~6]

将通过应用使泛函取最小值的方法求解拉普拉斯方程，来介绍二维问题的有限元方法(FEM)。拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{16.25}$$

相应的泛函为：

$$I(\Phi) = \iint \frac{1}{2}\varepsilon|\overline{\nabla}\Phi|^2 \mathrm{d}S \tag{16.26}$$

如图 16.5 所示，用一个三角形作为有限元法中的一个单元。

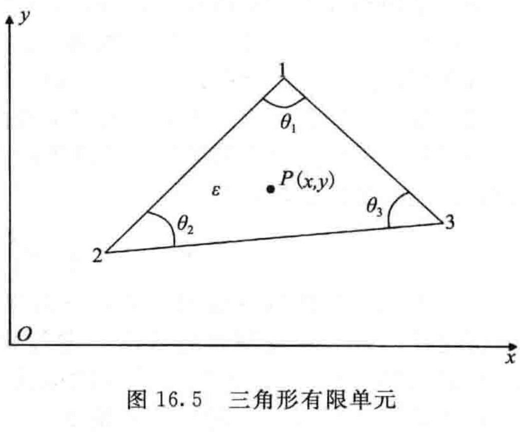


图 16.5 三角形有限单元

在三角形单元内，电位函数可以用该三角形单元的三个顶点 1、2、3 上的电位值来表示成：

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \zeta_k \Phi_k \tag{16.27}$$

式中，ζ_k 是二维一阶形状函数。这些函数与 15.3.5 节讨论过的一维一阶形状函数具有相同的特性。形状函数 ζ_k 的性质可用 x 和 y 表示为

$$\zeta_k(x,y) = a'_k + b'_k x + c'_k y \tag{16.28}$$

而且，有

$$\zeta_k = \begin{cases} 1 & 在节点\ k\ 上 \\ 0 & 在其他节点上 \end{cases} \tag{16.29}$$

ζ 也称为面积坐标，因为它们的物理意义是面积比，而且在由其顶点的直角坐标所确定的任意面积上，对一个任意函数 $f(x, y)$ 进行积分时是很有用的。图 16.6 解释了这些

坐标。

令

$$\zeta_k = \frac{h_k}{H_k} = \frac{A_k}{A} \tag{16.30}$$

图 16.6 表明，H_1 和 h_1 分别是节点 1 和三角形内任一点 P 相对于底边 $|\overrightarrow{23}|$ 的高度。因此，A_1 是子三角形 $P23$ 的面积，其值等于$(1/2)h_1|\overrightarrow{23}|$。三角形 123 的面积是$(1/2)H_1|\overrightarrow{23}|$。

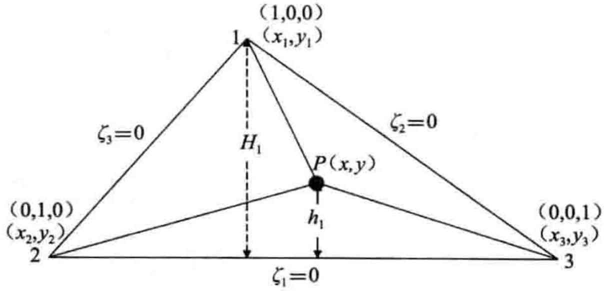


图 16.6　面积坐标

因此，ζ_1 是子三角形 $P23$ 与三角形 123 的面积之比。很显然，有

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1 \tag{16.31}$$

节点 1 的直角坐标是(x_1, y_1)，但是它的 ζ 坐标是(1，0，0)，因为节点 1 的 ζ_1 是 1(如果 P 点是节点 1，则 $h_1=H_1$)且 $\zeta_2=\zeta_3=0$。在图 16.6 中，把每一个节点的 ζ 坐标写为三个数$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$一组的形式。从那些数字中看出，显然由式(16.29)所要求的形状函数的条件得到了满足。确定形状函数的下一步骤是根据三角形的节点坐标来求出式(16.28)中的 a'_k。首先，使用面积坐标 ζ_1、ζ_2 和 ζ_3 来表示直角坐标 x：

$$x = d_1\zeta_1 + d_2\zeta_2 + d_3\zeta_3 \tag{16.32}$$

如果将 P 点取为节点 1，则 $x=x_1$，且 $\zeta_1=1$，$\zeta_2=0$，$\zeta_3=0$，因此，有

$$x_1 = d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 0 + d_3 \cdot 0$$

$$x_1 = d_1 \tag{16.33}$$

同理，可得 $x_2=d_2$，$x_3=d_3$。式(16.32)变为：

$$x = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 \tag{16.34}$$

同样，

$$y = y_1\zeta_1 + y_2\zeta_2 + y_3\zeta_3 \tag{16.35}$$

式(16.31)、式(16.34)和式(16.35)可以写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{16.36}$$

应用克莱默法求解式(16.36)，得到

$$\zeta_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \tag{16.37}$$

可以看到，行列式的分母是三角形面积 A 的两倍。

因此，得到

$$\zeta_1 = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \tag{16.38}$$

与式(16.28)对比，并且记 $a'_k=a_k/2A$，$b'_k=b_k/2A$，$c'_k=c_k/2A$，得到

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \tag{16.39a}$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \tag{16.39b}$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \tag{16.39c}$$

而且

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \tag{16.40}$$

同样地，得到

$$\zeta_2 = \frac{1}{2A}(a_2 + b_2 x + c_2 y) \tag{16.41}$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \tag{16.42a}$$

$$b_2 = y_3 - y_1 \tag{16.42b}$$

$$c_2 = x_1 - x_3 \tag{16.42c}$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2A}(a_3 + b_3 x + c_3 y) \tag{16.43}$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{16.44a}$$

$$b_3 = y_1 - y_2 \tag{16.44b}$$

$$c_3 = x_2 - x_1 \tag{16.44c}$$

可以证明，面积 A 也可以写为(参见附录 16B)：

$$A = \left| \frac{1}{2}(b_2 c_3 - b_3 c_2) \right| \tag{16.45}$$

既然已经求出了 ζ_k 关于节点坐标的表达式，我们就可以用 $\zeta_k(x, y)$的梯度来表示 $\overline{\nabla}\Phi(x, y)$。由式(16.27)可知

$$\overline{\nabla}\Phi(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \Phi_k \overline{\nabla}\zeta_k(x,y) \tag{16.46}$$

$$|\overline{\nabla}\Phi|^2 = \overline{\nabla}\Phi \cdot \overline{\nabla}\Phi = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Phi_j \Phi_k \overline{\nabla}\zeta_j(x,y) \cdot \overline{\nabla}\zeta_k(x,y) \tag{16.47}$$

由式(16.26)，单元(e)对泛函的贡献可以写为：

$$I^{(e)} = \iint_{(e)} \frac{\varepsilon}{2} |\overline{\nabla}\Phi|^2 \mathrm{d}S = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Phi_j \Phi_k \iint_{(e)} \overline{\nabla}\zeta_j \cdot \overline{\nabla}\zeta_k \mathrm{d}S \tag{16.48}$$

若记最后一个积分为 $S_{jk}^{(e)}$，它是刚度矩阵方阵中的一个普通元素，其表达式为

$$S_{jk}^{(e)} = \iint_{(e)} \overline{\nabla}\zeta_j \cdot \overline{\nabla}\zeta_k \mathrm{d}S \tag{16.49}$$

现在，单元(e)对泛函的贡献可以写为：

$$I^{(e)} = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{3} \Phi_j \sum_{k=1}^{3} \Phi_k S_{jk}^{(e)} \tag{16.50}$$

下面计算 $S_{jk}^{(e)}$ 以说明它是如何起作用的：

$$\overline{\nabla}\zeta_j = \hat{x}\frac{\partial \zeta_j}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \zeta_j}{\partial y} = \frac{1}{2A}(\hat{x} b_j + \hat{y} c_j)$$

$$\overline{\nabla}\zeta_k = \hat{x}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \zeta_k}{\partial y} = \frac{1}{2A}(\hat{x} b_k + \hat{y} c_k)$$

$$\overline{\nabla}\zeta_j \cdot \overline{\nabla}\zeta_k = \frac{1}{4A^2}(b_j b_k + c_j c_k) \tag{16.51}$$

$$\therefore S_{jk}^{(e)} = \frac{1}{4A^2}(b_j b_k + c_j c_k)\iint_{(e)} \mathrm{d}S$$

$$S_{jk}^{(e)}=\frac{1}{4A}(b_jb_k+c_jc_k) \tag{16.52}$$

如果假定三角形 b 的顶点的坐标和三角形 c 的坐标可以由式(16.39)~式(16.44)计算出来，$[S^{(e)}]$就可以由式(16.52)计算出来。

如图 16.5 所示，$[S^{(e)}]$也可以用三角形的三个顶角 θ_1、θ_2 和 θ_3 来表示(见附录 16B)：

$$[S^{(e)}]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\cot\theta_2+\cot\theta_3 & -\cot\theta_3 & -\cot\theta_2\\ -\cot\theta_3 & \cot\theta_1+\cot\theta_3 & -\cot\theta_1\\ -\cot\theta_2 & -\cot\theta_1 & \cot\theta_1+\cot\theta_2\end{bmatrix} \tag{16.53}$$

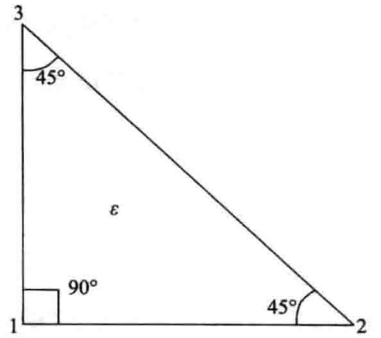


图 16.7 等腰直角三角形

下面通过一个简单的例子来说明这种方法。如图 16.7 所示，在等腰直角三角形中满足拉普拉斯方程，给定 $\Phi_1=10$，$\Phi_2=-5$，求 Φ_3。

应用式(16.53)，得到矩阵 S：

$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{16.54}$$

泛函 I 可以表示为：

$$\begin{aligned}I&=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Phi_j\Phi_kS_{jk}\\ &=\frac{\varepsilon}{2}[S_{11}\Phi_1^2+S_{12}\Phi_1\Phi_2+S_{13}\Phi_1\Phi_3+S_{21}\Phi_2\Phi_1+S_{22}\Phi_2^2+S_{23}\Phi_2\Phi_3+S_{31}\Phi_3\Phi_1+S_{32}\Phi_3\Phi_2+S_{33}\Phi_3^2]\end{aligned}$$

通过使泛函对于未知电位值最小化，就可以生成代数方程。在这个例子中，Φ_3 是未知量，所生成的代数方程是

$$\frac{\partial I}{\partial\Phi_3}=0=\frac{\varepsilon}{2}(S_{13}\Phi_1+S_{23}\Phi_2+S_{31}\Phi_1+S_{32}\Phi_2+2S_{33}\Phi_3) \tag{16.55}$$

注意

$$S_{jk}=S_{kj} \tag{16.56}$$

$$S_{31}\Phi_1+S_{32}\Phi_2+S_{33}\Phi_3=0 \tag{16.57}$$

对于手头的例子，因为 $S_{31}=-1/2$，$S_{32}=0$，$S_{33}=-1/2$，$\Phi_1=10$，$\Phi_2=-5$，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times 10+0\times(-5)+\frac{1}{2}\Phi_3=0$$

$$\Phi_3=10$$

在这个例子中，节点 1 和 2 具有给定的电位值，称为强加电位值的节点，或强加节点。称节点 3 为自由节点。如果所有节点都是自由节点，得到矩阵方程

$$\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{bmatrix}=0 \tag{16.58}$$

基于泛函最小化的有限元方法的一个重要优点是，诺依曼型边界条件能够被自然地得到满足(参见附录 16C)，称其为自然边界条件。因此，在这些边界上的节点都是自由节点。狄利赫里型(给定电位)边界条件是基本的边界条件，其边界上的节点是强加节点。

16.3.1 两个单元

为了推广上述过程，让我们来考虑把问题的区域划分为两个单元(见图 16.8)的情况。

令每一个单元的刚度矩阵分别记为$[S^{(1)}]$和$[S^{(2)}]$，则问题的泛函$I(\Phi)$为

$$
\begin{aligned}
I(\Phi) = I^{(1)} + I^{(2)} = \frac{\varepsilon_1}{2}[&S_{11}^{(1)}\Phi_1^2 + S_{12}^{(1)}\Phi_1\Phi_2 + S_{13}^{(1)}\Phi_1\Phi_3 + S_{21}^{(1)}\Phi_2\Phi_1 + S_{22}^{(1)}\Phi_2^2 \\
&+ S_{23}^{(1)}\Phi_2\Phi_3 + S_{31}^{(1)}\Phi_3\Phi_1 + S_{32}^{(1)}\Phi_3\Phi_2 + S_{33}^{(1)}\Phi_3^2] \\
&+ \frac{\varepsilon_2}{2}[S_{11}^{(2)}\Phi_1^2 + S_{13}^{(2)}\Phi_1\Phi_3 + S_{14}^{(2)}\Phi_1\Phi_4 + S_{31}^{(2)}\Phi_3\Phi_1 + S_{33}^{(2)}\Phi_3^2 \\
&+ S_{34}^{(2)}\Phi_3\Phi_4 + S_{41}^{(2)}\Phi_4\Phi_1 + S_{43}^{(2)}\Phi_4\Phi_3 + S_{44}^{(2)}\Phi_4^2]
\end{aligned} \tag{16.59}
$$

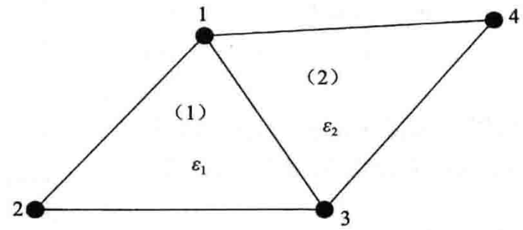


图 16.8 两个单元

求$I(\Phi)$关于Φ_j的偏导数，并令其等于零，得到代数方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \Phi_1} = 0 = &\frac{\varepsilon_1}{2}[2S_{11}^{(1)}\Phi_1 + S_{12}^{(1)}\Phi_2 + S_{13}^{(1)}\Phi_3 + S_{21}^{(1)}\Phi_2 + S_{31}^{(1)}\Phi_3] \\
&+ \frac{\varepsilon_2}{2}[2S_{11}^{(2)}\Phi_1 + S_{13}^{(2)}\Phi_3 + S_{14}^{(2)}\Phi_4 + S_{31}^{(2)}\Phi_3 + S_{41}^{(2)}\Phi_4]
\end{aligned} \tag{16.60}
$$

利用如下关系

$$S_{ij}^{(e)} = S_{ji}^{(e)} \tag{16.61}$$

上面的方程式可以写为

$$(\varepsilon_1 S_{11}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{11}^{(2)})\Phi_1 + \varepsilon_1 S_{12}^{(1)}\Phi_2 + (\varepsilon_1 \Phi_{13}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{13}^{(2)})\Phi_3 + \varepsilon_2 S_{14}^{(2)}\Phi_4 = 0 \tag{16.62}$$

写为矩阵的形式，有

$$
[\varepsilon_1 S_{11}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{11}^{(2)} \quad \varepsilon_1 S_{12}^{(1)} \quad \varepsilon_1 S_{13}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{13}^{(2)} \quad \varepsilon_2 S_{14}^{(2)}]\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{bmatrix} = 0 \tag{16.63}
$$

当考虑所有的方程时，并写成矩阵形式，得到

$$
\begin{bmatrix}
\varepsilon_1 S_{11}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{11}^{(2)} & \varepsilon_1 S_{12}^{(1)} & \varepsilon_1 S_{13}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{13}^{(2)} & \varepsilon_2 S_{14}^{(2)} \\
\varepsilon_1 S_{21}^{(2)} & \varepsilon_1 S_{22}^{(1)} & \varepsilon_1 S_{23}^{(1)} & 0 \\
\varepsilon_1 S_{31}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{31}^{(2)} & \varepsilon_1 S_{32}^{(1)} & \varepsilon_1 S_{33}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{33}^{(2)} & \varepsilon_2 S_{34}^{(2)} \\
\varepsilon_2 S_{41}^{(2)} & 0 & \varepsilon_2 S_{43}^{(2)} & \varepsilon_2 S_{44}^{(2)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{bmatrix} = 0 \tag{16.64}
$$

$$[S][\Phi] = 0 \tag{16.65}$$

让我们看一看，是否可以根据各个$S^{(e)}$矩阵来构造出“总体S矩阵”中各个元素的计算公式。让我们考虑节点 1。这个节点是两个单元所共有的节点。刚度系数$S_{11}^{(1)}$和$S_{11}^{(2)}$都将会有贡献。乘以单元中介质的介电常数，并将它们相加，得到

$$S_{11} = \varepsilon_1 S_{11}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{11}^{(2)} \tag{16.66}$$

让我们考虑总体$\boldsymbol{S}$矩阵中的元素S_{13}。线段$\overrightarrow{13}$是两个单元的共同边：

$$S_{13} = \varepsilon_1 S_{13}^{(1)} + \varepsilon_2 S_{13}^{(2)} \tag{16.67}$$

按照这一规则，有

$$S_{14} = \varepsilon_2 S_{14}^{(2)} \tag{16.68}$$

也注意

$$S_{24}=0 \tag{16.69}$$

这是因为在节点 2 和节点 4 之间没有直接的联系。

例 16.1 如图 16.9 所示，假设在场域中满足拉普拉斯方程，且给定边界条件，试求点 $P(1, 1/3)$ 的电位。由于对称性，可以只考虑二分之一场域，在二分之一场域中有 3 个单元和 5 个节点。节点 2、3、4 和 5 都是强加节点。

$$\Phi_2=\Phi_5=0;\quad \Phi_3=100 \tag{16.70}$$

因为存在一个无限小的间隙，所以节点 4 的电位是有一些不明确。出于计算的目的，假定节点 4 在 100V 的电极上：

$$\Phi_4=100 \tag{16.71}$$

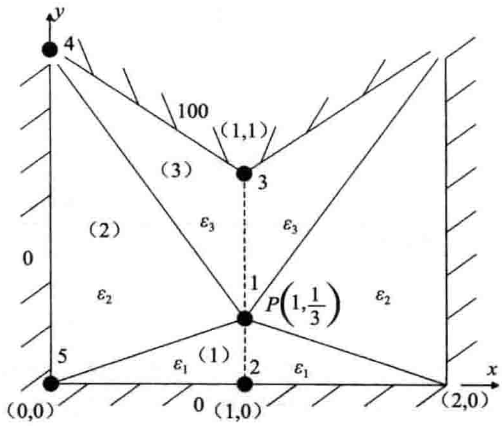


图 16.9 具有不同电介质的场域中拉普拉斯方程的 FEM 解的例子

假定已经根据给定节点的坐标计算出了总体 $\boldsymbol{S}$ 矩阵中的各个元素，有方程

$$S_{11}\Phi_1+S_{12}\Phi_2+S_{13}\Phi_3+S_{14}\Phi_4+S_{15}\Phi_5=0$$

代入强加节点的电位值，得到

$$S_{11}\Phi_1+S_{12}\cdot 0+S_{13}\cdot 100+S_{14}\cdot 100+S_{15}\cdot 0=0$$

$$\Phi_1=\frac{-100S_{13}-100S_{14}}{S_{11}} \tag{16.72}$$

注意，线段 213 是一条对称线，在这条线上的边界条件是

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=1}=0 \tag{16.73}$$

诺依曼型边界条件自然得到满足，且节点 1 是自由节点。参见附录 16C。因为在式(16.65)中 $\boldsymbol{\Phi}$ 是由自由节点电位和强加节点电位组成的一个列矩阵，所以将矩阵方程写成如下分块形式，可以得到方程式的一个通解：

$$\begin{bmatrix} S_{\mathrm{ff}} & S_{\mathrm{fp}} \\ S_{\mathrm{pf}} & S_{\mathrm{pp}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_{\mathrm{f}} \\ \Phi_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}=0 \tag{16.74}$$

所以 $[S_{\mathrm{ff}}][\Phi_{\mathrm{f}}]+[S_{\mathrm{fp}}][\Phi_{\mathrm{p}}]=0$

$$[\Phi_{\mathrm{f}}]=-[S_{\mathrm{ff}}]^{-1}[S_{\mathrm{fp}}][\Phi_{\mathrm{p}}] \tag{16.75}$$

◀

16.3.2 总体和局部节点

在前面通过直观地观察各个节点之间的连接情况，我们生成了总体 $\boldsymbol{S}$ 矩阵。在实际的问题中，可能会有数百上千个单元，有必要生成一个方案(一个计算机程序)用于根据输入数据来描述各个节点之间的互连关系，以及得到作为输出量的合成总体矩阵。通过考虑局部和总体节点的编号，就可以以一种精确的方式来完成这一任务。以图 16.8 中的单元(2)为例来说明这一方法。参见图 6.10。

将局部节点编号标记在三角形内部，而将总体节点编号标记在三角形外面并用一个方框□括起来。局部节点编号是任意的，只要节点编号的顺序指明前进方向，比如逆时针方向。然后建立一个表格，来描述每一个单元的局部节点编号与总体节点编号之间的对应关系。图 16.10和图 16.11 分别给出了图 16.8 中的两个单元。其中局部节点排列表如表 16.2所示。

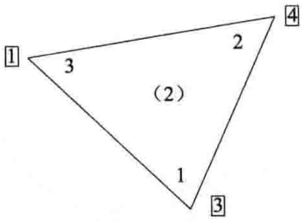


图 16.10 局部和总体节点编号

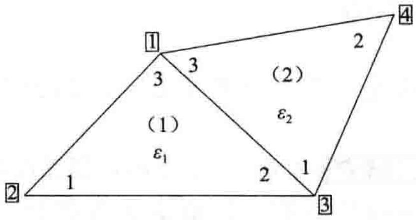


图 16.11 有两个单元时的局部和总体节点编号

表 16.2 局部节点序列表

单元#(e)	ε_e	n1L	n2L	n3L
(1)	ε_1	2	3	1
(2)	ε_2	3	4	1

然后，我们编写一个函数程序，将描述各个节点之间连接关系的相关数据作为输入，并将所得到的总体矩阵 S 作为输出量。函数语句可以是函数[S]=GLANT(Nn, Ne, n1L, n2L, n3L, X_n, Y_n)。以图 16.11 所示为例，其输入量的含义和它们的值是：

Nn：总体节点数：4。

Ne：单元数：2。

n1L：与局部节点编号 1 对应的总体节点编号序列：2，3。

n2L：与局部节点编号 2 对应的总体节点编号序列：3，4。

n3L：与局部节点编号 3 对应的总体节点编号序列：1，1。

我们将写出函数程序使得其输出为 S 矩阵。

一个主程序的例子

稍后将解释函数程序的细节，这里先以 16A.1 节中给出的例子来说明数据的输入，这个例子要求解图 16.12 所示的静电问题(拉普拉斯方程)。给定 $\Phi_2=V_2=10$，$\Phi_4=V_4=-10$，求 Φ_1 和 Φ_3。大部分的语句都是很明确的。在得到 S 矩阵后，着手描述自由节点和强加节点：

$$\text{frn} = [1,3]$$
$$\text{prn} = [2,4]$$

然后，给定强加节点的电位：

$$\text{Vprn} = [10, -10]$$

其他计算机输入数据将是总体节点的 x 和 y 坐标，其排列如表 16.3～表 16.5 所示。

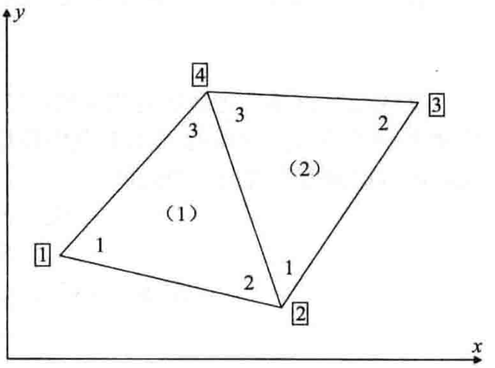


图 16.12 两个单元的例子

表 16.3 总体节点坐标的表格

总体节点	x	y	总体节点	x	y
1			3		
2			4		

表 16.4 图 16.12 中例子的节点位置

总体节点#	x	y	总体节点#	x	y
1	0.8	1.8	3	2.1	2.1
2	1.4	1.4	4	1.2	2.7

表 16.5 图 16.12 中例子的局部节点序列表格

单元#e	$n(1, e)$	$n(2, e)$	$n(3, e)$
	n1L	n2L	n3L
(1)	1	2	4
(2)	2	3	4

此时，得到矩阵$[\boldsymbol{S}]$的子矩阵$[S_{\text{ff}}]$和$[S_{\text{fp}}]$：

$$S_{\text{ff}} = S(\text{frn},\text{frn}), \quad S_{\text{fp}} = S(\text{frn},\text{prn})$$

由此计算出自由节点的电位：

$$V_{\text{f}} = -\operatorname{inv}(S_{\text{ff}}) * S_{\text{fp}} * (V\text{prn})' \tag{16.76}$$

得到的解为

$$\Phi_{\boxed{1}} = 2.6012$$

$$\Phi_{\boxed{3}} = -1.0983$$

利用 MATLAB 语句(式(16.76))可以实现式(16.75)的计算。注意，$(V\text{prn})'$中上标($'$)将行矩阵变成列矩阵。值得注意的是式(16.76)中矩阵的大小为：

$$S_{\text{ff}}:(f_{\text{rn}}, f_{\text{rn}}) \quad V_{\text{f}}:(f_{\text{rn}}, 1)$$

$$S_{\text{fp}}:(f_{\text{rn}}, p_{\text{rn}}) \quad (V_{\text{prn}})':(p_{\text{rn}}, 1)$$

合成总体 S 矩阵的一个函数程序(GLANT)的例子

GLANT 是函数程序的名字，它是 Global Assembly of Node-based Triangular elements 的一个缩写。其输出 S 是总体 S 矩阵。在写这个程序时假定所有单元中 $\varepsilon=1$。如果各个单元具有不同的介电常数或者用它求解泊松方程，就需要对程序稍微做一些修改。写这个程序的目的是得到另一个叫做 T 矩阵的总体矩阵作为其输出量。在研究波导问题时 T 矩阵是很有用的，稍后将解释它。其主要步骤如下：

1) 将矩阵$[S]$中的所有元素都初始化为零。

2) 对每一个单元，计算出局部$[S]$矩阵$=[S^{(e)}]$。

3) 对每一个元素，确定局部节点 1、2、3 的总体节点编号，然后根据总体节点下标将 $S^{(e)}$ 元素转化为相应的 S 元素。将这个值加到总体 S 矩阵中的对应元素上。为了说明起见，假设对于单元(2)，局部节点编号$\boxed{1}$对应于总体节点编号$\boxed{2}$，局部节点编号$\boxed{3}$对应于总体节点编号$\boxed{4}$。那么 $S_{13}^{(2)}$ 将被加到总体元素 $S_{\boxed{2}\boxed{4}}$ 上。

4) 当对于所有单元都执行完步骤 3)后，就得了到总体矩阵$[S]$。

各个单元的局部节点编号的对应表格存储在一个二维数组中，$n(1, \text{e})$，$n(2, \text{e})$和 $n(3, \text{e})$。在 MATLAB 中完成这一步骤的 for 循环语句是：

```
for e=1: Ne;
  n(1,e)=n1L(e);
  n(2,e)=n2L(e);
  n(3,e)=n3L(e);
end
```

对$[S]$矩阵进行初始化是很重要的。因为节点$\boxed{1}$和$\boxed{3}$之间没有直接连接(见图 16.12)，所以总体元素 $S_{13}=0$。利用步骤 3)永远不会得到 S_{13} 的值，而初始化会使这个值按要求保持为零。

$$S_{\boxed{2}\boxed{4}} = 0 + S_{23}^{(1)} + S_{13}^{(2)} \tag{16.77}$$

等式右端的第一个数值是因为初始化而得到的，第二个值来自单元(1)的贡献，第三个值来自单元(2)的贡献。16A.1 节给出了 GLANT 函数的主程序和 MATLAB 代码。

16.3.3 标准面积积分

我们暂时不讨论二维 FEM，而是讨论一个标准的积分，它在完成一个如图 16.6 所示的任意三角形区域上的积分时是非常有用的。利用分步积分(参见附录 16D)得到的标准面积积分是：

$$\iint_{\Delta^{(e)}} (\zeta_1)^l (\zeta_2)^m (\zeta_3)^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} 2A^{(e)} \tag{16.78}$$

式中，ζ_1、ζ_2 和 ζ_3 分别是面积坐标，而 l、m 和 n 分别是这些坐标的幂次。如果 $f(x, y)$ 是定义在一个任意三角形区域上关于 x 和 y 的多项式函数，我们将要说明式(16.78)在对函数 $f(x, y)$进行积分时是多么有用。令

$$f(x,y) = x^2 \tag{16.79}$$

由于

$$x^2 = (x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3)^2 = x_1^2\zeta_1^2 + x_2^2\zeta_2^2 + x_3^2\zeta_3^2 + 2x_1x_2\zeta_1\zeta_2 + 2x_2x_3\zeta_2\zeta_3 + 2x_3x_1\zeta_1\zeta_3$$

首先，必须研究如下形式的积分

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.80}$$

和

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1\zeta_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.81}$$

利用标准积分式(16.78)并注意到 $l=2$，$m=0$，$n=0$，就可以通过观察直接写出式(16.80)的积分结果。因此，得到

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2A^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{6} \tag{16.82}$$

为了计算式(16.81)，注意，在标准积分中 $l=1$，$m=1$，$n=0$，可以写出

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1\zeta_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{12} \tag{16.83}$$

当然，可以做进一步的推广，并写出：

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_k^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{6} \tag{16.84}$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_j\zeta_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{12}, \quad j \neq k \tag{16.85}$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{A^{(e)}}{6} + (2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1)\frac{A^{(e)}}{12} \tag{16.86}$$

16.4 二维泊松方程的有限元方法

对于泊松方程

$$\nabla_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{16.87}$$

来说，其相应的泛函为

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}\iint \varepsilon |\overline{\nabla}_t \Phi|^2 \mathrm{d}S - \iint \Phi\rho \mathrm{d}S \tag{16.88}$$

对一个给定的单元，有

$$I^{(e)}(\Phi) = \frac{1}{2}\iint_{\Delta^{(e)}} \varepsilon^{(e)} |\overline{\nabla}_t \Phi|^2 \mathrm{d}S - \iint_{\Delta^{(e)}} \Phi\rho \mathrm{d}S \tag{16.89}$$

我们已经看到了式(16.89)右端第一项对代数方程的贡献。第二项是

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \Phi\rho \mathrm{d}S \approx \iint_{\Delta^{(e)}} \sum_{k=1}^{3} \zeta_k \Phi_k \rho \mathrm{d}S \tag{16.90}$$

如果假定在一个单元中，$\rho^{(e)}$ 为常数，那么

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \Phi\rho \mathrm{d}S \approx \sum_{k=1}^{3} \rho^{(e)} \Phi_k \iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_k \mathrm{d}S \tag{16.91}$$

由式(16.78)可知，

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{3} \tag{16.92}$$

因此，有

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \Phi\rho \mathrm{d}S = \frac{A^{(e)}}{3} \rho^{(e)} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \tag{16.93}$$

取式(16.93)右端关于 Φ_1 的极小值，得到

$$\frac{A^{(e)}}{3} \rho^{(e)} (1)$$

对泛函式(16.89)求极小值，得到的代数方程是

$$\varepsilon^{(e)} [S^{(e)}] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ g \\ g \end{bmatrix} \tag{16.94}$$

式中，$g = (A^{(e)}/3)\rho^{(e)}$。

例 16.2 这个例子是在石油工业中感兴趣的一个问题。考虑一个典型的容器，其中部分填充了带电液体，其介电常数为 $\varepsilon = 2.5\varepsilon_0$，密度为 $\rho = 10^{-5}\ \mathrm{c/m^3}$。求点 $P(0.5, 1)$处的电位。

将这一区域分成 6 个子区域，其局部和总体节点标记在图 16.13 与图 16.14 中。

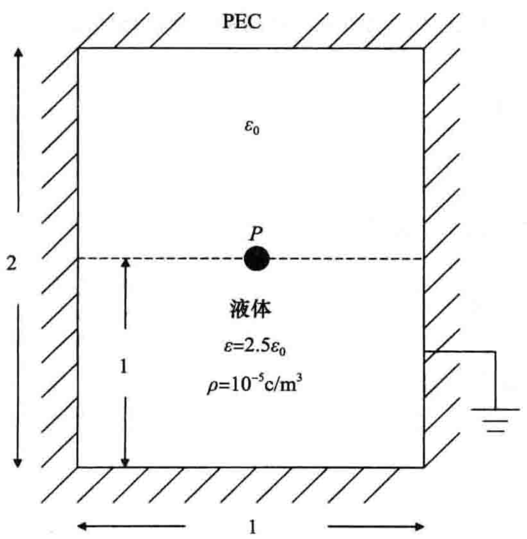


图 16.13　部分填充带电液体的容器

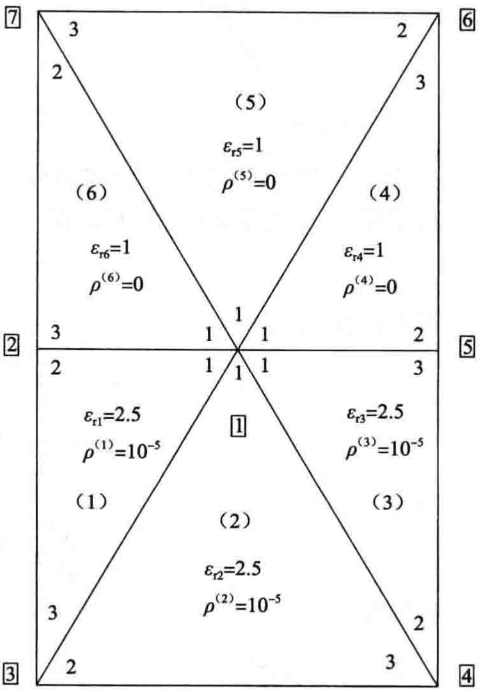


图 16.14　有 6 个单元时的局部和总体节点

由于该容器是一个理想电导体(接地的)容器，除了节点[1]外，所有其他节点都是电压为零的强加节点。因此，将要求解的方程是 $S_{11}\Phi_1=g_1$，其中 S_{11} 和 g 都是总体值。需要计算出如图 16.15 所示各单元的 $S_{11}^{(e)}$；以第一个单元为例：

$$S_{11}^{(1)}=\frac{1}{4A^{(1)}}(b_1^2+c_1^2)$$

$$A^{(1)}=\frac{1}{2}\times 0.5\times 1=\frac{1}{4}$$

$$b_1=y_2-y_3=1-0=1$$

$$c_1=x_3-x_2=0-0=0$$

$$S_{11}^{(1)}=\frac{1}{4\times\frac{1}{4}}(1^2+0^2)=1$$

注意，单元(3)、(4)和(6)都是相似的。因此，有

$$S_{11}^{(1)}=S_{11}^{(3)}=S_{11}^{(4)}=S_{11}^{(6)}$$

对于单元(2)(见图 16.16)，有

$$b_1=y_2-y_3=0$$

$$c_1=x_3-x_2=1-0=1$$

$$A^{(2)}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

$$S_{11}^{(2)}=\frac{1}{4A^{(2)}}(b_1^2+c_1^2)=\frac{1}{4\times\frac{1}{2}}(0^2+1^2)=\frac{1}{2}$$

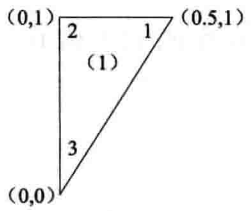


图 16.15 图 16.14 中的一个典型单元

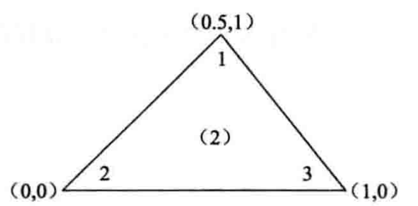


图 16.16 图 16.14 中的第二种典型单元

由于单元(5)与单元(2)相似，有

$$S_{11}^{(5)}=\frac{1}{2}$$

下面计算 $g_1^{(1)}$：

$$g_1^{(1)}=\rho^{(1)}\frac{A^{(1)}}{3}=\frac{10^{-5}}{12}=g_1^{(3)}$$

$$g_1^{(2)}=\rho^{(2)}\frac{A^{(2)}}{3}=\frac{10^{-5}}{6}$$

因为

$$\rho^{(4)}=\rho^{(5)}=\rho^{(6)}=0$$

$$g_1^{(4)}=g_1^{(5)}=g_1^{(6)}=0$$

总体变量

$$S_{11}=\sum_{k=1}^{6}\varepsilon_k S_{11}^{(k)}$$

$$S_{11}=\varepsilon_0\left(2.5\times 1+2.5\times\frac{1}{2}+2.5\times 1+1\times 1+1\times\frac{1}{2}+1\times 1\right)=8.75\varepsilon_0$$

$$g_1 = \left[\sum_{k=1}^{6} g_1^{(k)} \right] = \frac{2 \times 10^{-5}}{12} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{10^{-5}}{3}$$

所以 $\Phi_1 = \frac{10^{-5}}{3} \times \frac{1}{8.75 \times 8.752 \times 10^{-12}} = 4.3026 \times 10^4 \mathrm{V} = 43.026\mathrm{kV}$

为了求解泊松方程，函数 GLANT 需要修改为 PGLANT2。

function[S,T,g] = PGLANT2(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,Rho,Epr,xn,yn) (16.95)

这个函数需要额外输入电荷密度 ρ(Rho)和相对介电常数 ε_r(Epr)数组。令 Rho 数组中的输入值为零，但在 Epr 数组中输入值为给定值，这个函数子程序也可以用于求解场域中含有多种不同电介质的拉普拉斯方程问题。上述例子是用这个函数程序来求解的。

本章给出了预备的工作(见表 16.6a 和表 16.6b)，然而，主程序和函数 PGLANT2 的程序请参见 16A.2 节。

表 16.6A 图 16.14 中例子的坐标表

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.5	1	5	1	1
2	0	1	6	1	2
3	0	0	7	0	2
4	1	0			

表 16.6B 图 16.14 中例子的单元参数和关联表

单元#	n1L	n2L	n3L	ρ	ε_{PR}
(1)	1	2	3	10^{-5}	2.5
(2)	1	3	4	10^{-5}	2.5
(3)	1	4	5	10^{-5}	2.5
(4)	1	5	6	0	1
(5)	1	6	7	0	1
(6)	1	7	2	0	1

◀

16.5 均匀波导问题的有限元方法

波导问题是一个由微分方程式(16.1)所描述的特征值问题，为方便起见，在这里重新写出来，有

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \tag{16.96}$$

式中，$k_t^2 = \lambda$ 是特征值。k_t 是截止波数

$$k_t^2 = k^2 - \beta^2 \tag{16.97}$$

式中，β^2 是 z 方向的传播常数。该问题的泛函是

$$I(\Phi) = \frac{1}{2} \iint_S |\overline{\nabla}_t \Phi|^2 \mathrm{d}S - \iint_S k_t^2 \Phi^2 \mathrm{d}S \tag{16.98}$$

对于一个给定的单元，在前面我们已经看到了式(16.98)右端第一项对代数方程的贡献。因此，现在讨论第二项：

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \Phi\Phi \mathrm{d}S = \iint_{\Delta^{(e)}} \sum_{i=1}^{3} \zeta_i \Phi_i \sum_{j=1}^{3} \zeta_j \Phi_j \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \Phi_i \Phi_j \iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_i \zeta_j \mathrm{d}S \tag{16.99}$$

应用标准积分，已经证明

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1 \zeta_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{12} \tag{16.100}$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{6} \tag{16.101}$$

求泛函的最小值，所得到的代数方程的形式是

$$[S^{(e)}]\begin{bmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{bmatrix} - k_t^2[T^{(e)}]\begin{bmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{bmatrix} = 0 \tag{16.102}$$

其中，在前面已经讨论过了 $S^{(e)}$，$T^{(e)}$ 为

$$[T^{(e)}] = \frac{A^{(e)}}{12}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} \tag{16.103}$$

当考虑所有单元的贡献时，得到总体方程

$$[\boldsymbol{S}][\boldsymbol{\Phi}] - k_t^2[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{\Phi}] = 0 \tag{16.104}$$

特征值问题的标准形式是

$$[A][\boldsymbol{\Phi}] = k_t^2[\boldsymbol{\Phi}] \tag{16.105}$$

式中

$$[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{T}]^{-1}[\boldsymbol{S}] \tag{16.106}$$

例 16.3 求如图 16.17 所示正方形波导的截止波数。仅考虑 TM 模式。

解： 对于 TM 模式，在波导边界上 $E_z=0$ 的边界条件可以转化成 $\Phi=0$。节点 1 是唯一的自由节点。考虑单元(1)。局部节点的坐标是：

局部节点	坐标
1	$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$
2	(0, 0)
3	$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$

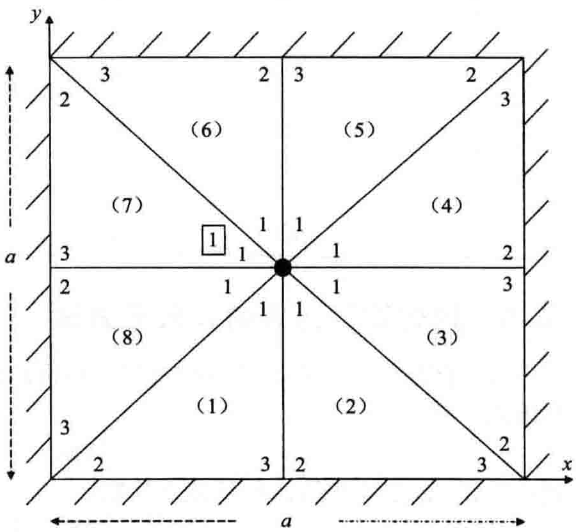


图 16.17 正方形波导

$$b_1 = y_2 - y_3 = 0$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = \frac{a}{2}$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$S_{11}^{(1)} = \frac{1}{\frac{4a^2}{8}}\left[0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}$$

$$T_{11}^{(1)} = \frac{A^{(1)}}{6} = \frac{a^2}{48}$$

注意，所有 $S_{11}^{(e)}$ 都是相同的，所有 $T_{11}^{(e)}$ 也是相同的：

$$S_{11} = \sum_{e=1}^{8} S_{11}^{(e)} = \frac{1}{2}\times 8 = 4$$

$$T_{11} = \sum_{e=1}^{8} T_{11}^{(e)} = \frac{a^2}{48}\times 8 = \frac{a^2}{6}$$

因此，一个特征值所满足的方程是

$$\left(4-k_{\mathrm{t}}^2\frac{a^2}{6}\right)\Phi_1=0$$

$$\lambda=k_{\mathrm{t}}^2=\frac{4\times6}{a^2}=\frac{24}{a^2}$$

截止波数是

$$k_{\mathrm{t}}=\frac{\sqrt{24}}{a}=\frac{4.899}{a}$$

准确答案是

$$(k_{\mathrm{c}})_{\mathrm{TM}_{11}}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}=\sqrt{2}\,\frac{\pi}{a}=\frac{4.443}{a}$$

误差大约是 10%。◀

我们实际写出了求解均匀波导问题的函数 GLANT，将要尝试计算一个脊形波导问题。在准备求解这个问题之前，首先求解 16A.3 节中的规则矩形波导问题。可以求得准确答案是

$$(k_{\mathrm{c}})_{\mathrm{TE}_{mn}}=\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2}\quad m,n=0,1,2,\cdots,\infty;\text{但 } m=n=0 \text{ 除外}$$

$$(k_{\mathrm{c}})_{\mathrm{TM}_{mn}}=\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2}\quad m,n=1,2,\cdots,\infty$$

主模是 TE_{10}，当 $a>b$ 时，

$$(k_{\mathrm{c}})_{\mathrm{TE}_{10}}=\left(\frac{\pi}{a}\right)=\pi,\quad \text{当 } a=1 \text{ 时}$$

让我们用 GLANT 来求解 TE 和 TM 模式。在图 16.18 中有 18 个单元和 16 个节点。表 16.7 列出了总体节点坐标，表 16.8 给出了连接矩阵。注意，对于 TE 模式，由于边界条件是诺伊曼型，因此所有节点都是自由节点；但是对于 TM 模式，边界条件是齐次狄利赫里型，因此边界上的节点都是具有零电位的强加节点。

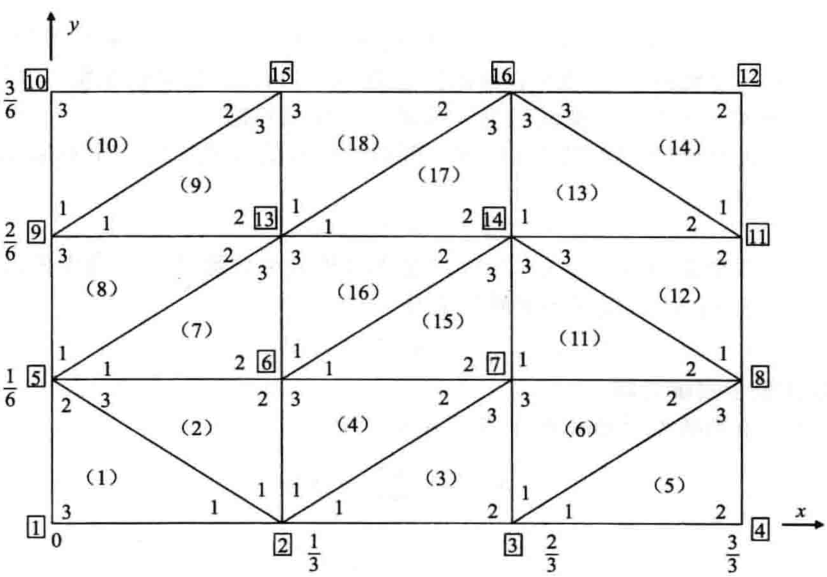


图 16.18　一个标准矩形波导的单元

表 16.7 矩形波导问题的坐标表

总体节点#	X	Y	总体节点#	X	Y
1	0	0	9	0	2/6
2	1/3	0	10	0	3/6
3	2/3	0	11	3/3	2/6
4	3/3	0	12	3/3	3/6
5	0	1/6	13	1/3	2/6
6	1/3	1/6	14	2/3	2/6
7	2/3	1/6	15	1/3	3/6
8	3/3	1/6	16	2/3	3/6

表 16.8 矩形波导的连接表

单元#	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
n1L	2	2	2	2	3	3	5	5	9
n2L	5	6	3	7	4	8	6	13	13
n3L	1	5	7	6	8	7	13	9	15
单元#	**(10)**	**(11)**	**(12)**	**(13)**	**(14)**	**(15)**	**(16)**	**(17)**	**(18)**
n1L	9	7	8	14	11	6	6	13	13
n2L	15	8	11	11	12	7	14	14	16
n3L	10	14	14	16	16	14	13	16	15

对于 TM 模式，有

$$\text{prn} = [1,2,3,4,5,8,9,10,11,12,15,16]$$
$$\text{frn} = [6,7,13,14]$$

对于 TE 模式，所有模式都是自由模式。

作为示例，这里给出了有助于计算 TE 模式的特征值和截止波数 k_c 的 MATTLAB 语句。在得到 S 矩阵和 T 矩阵以后，由于所有节点都是自由节点，因此可以在主程序中增加下面的语句：

```
ATE = inv(T) * S;
[EVTE,kcsqTE] = eig(ATE);
kc TE = sqrt(diag(kcsqTE));
kcTES = sort(kcTE);
```

第一条语句给出 A 矩阵。第二个语句使用 MATLAB 中自带的函数语句 eig，它的输入是方阵，而输出是特征向量(EVTE)和特征值(kcsqTE)。如果仅保留 A 矩阵中相应于自由节点的行和列，类似的步骤也可用于求解 TM 模式问题。

16A.4 节详细地给出 MATLAB 程序，可以看到我们所使用的一阶有限元方法给出了最小的截止波数值

$$(k_c)_{TE} = 3.2795$$

然而，准确答案是 $(k_c)_{TE10} = \pi = 3.14$。在 TM 模式中，涉及 4 个自由模式的最低截止波数是 8.2014，然而 TM_{11} 模式的准确答案是

$$(k_c)_{TM_{11}} = \pi\sqrt{5} = 7.0248$$

用 Q 矩阵表示刚度矩阵

另一种用顶角角度表示刚度矩阵 $[\boldsymbol{S}^{(e)}]$ 的公式是[4]

$$[\boldsymbol{S}^{(e)}] = \sum_{i=1}^{3} \cot\theta_i \boldsymbol{Q}_i \tag{16.107}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.108}$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{16.109}$$

$$\boldsymbol{Q}_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix} \tag{16.110}$$

16.5.1 基于节点的二阶单元方法

到目前为止，使用的是一阶三角形单元，其形状函数为

$$\alpha(x,y)=\zeta(x,y)=a+bx+cy \tag{16.111}$$

在二维坐标中，这是一种线性插值。图 16.19 给出了使用一阶三角形单元的一个典型解。从图 16.19 中可以清楚地看出等位线的分段线性行为。如果使用二次插值，就会得到更好的近似结果。将形状函数写为

$$\alpha(x,y)=a+bx+cy+\mathrm{d}x^2+exy+fy^2 \tag{16.112}$$

注意，我们使用了从一阶到二阶的所有项。因为有 6 个未知数，所以需要 6 个节点(它们的坐标均已知)来用于求出这 6 个常数 a、b、c、d、e 和 f。

除了三角形单元三个顶点上的节点 1、4 和 6 之外，下面引入另外 3 个中间节点 2、3 和 5，如图 16.20c 所示。可以证明，二阶形状函数可以用一阶形状函数 $\zeta_{①}$、$\zeta_{②}$ 和 $\zeta_{③}$ 来表示；如图 16.20a 所示，以带圈的数字来标记用于确定一阶形状函数(面积坐标)的顶角上的节点：

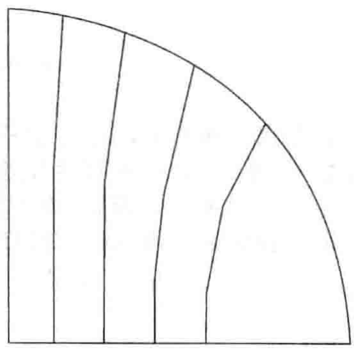


图 16.19 二维空间中线性插值的解

$$\alpha_1=(2\zeta_{①}-1)\zeta_{①} \tag{16.113}$$

$$\alpha_2=4\zeta_{①}\zeta_{②} \tag{16.114}$$

$$\alpha_3=4\zeta_{③}\zeta_{①} \tag{16.115}$$

$$\alpha_4=(2\zeta_{②}-1)\zeta_{②} \tag{16.116}$$

$$\alpha_5=4\zeta_{③}\zeta_{②} \tag{16.117}$$

$$\alpha_6=(2\zeta_{③}-1)\zeta_{③} \tag{16.118}$$

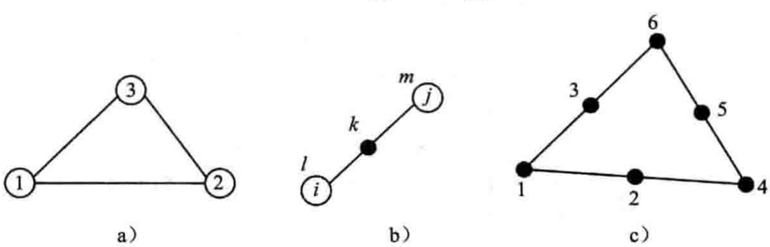


图 16.20 用一阶形状函数来表示二阶形状函数

注意，三角形单元三个顶点上的节点(α_1，α_4，α_6)的计算公式由如下的式(16.119)给出，而中间节点则由如下的式(16.120)给出(见图 16.20b)：

$$\alpha_l=(2\zeta_{ⓘ}-1)\zeta_{ⓘ} \tag{16.119}$$

$$\alpha_k=4\zeta_{ⓘ}\zeta_{ⓙ} \tag{16.120}$$

由于在一阶和二阶方法中使用了不同的数字来标记同一个节点，这种记法乍看起来似乎是不方便的。然而，在文献[4]中所导出的公式却采用了这种记法，我们将采用同样的

记法。值得注意的是，如果需要的话，ζ_1 可根据图 16.20a 中点①、②和③的坐标由式(16.38)～式(16.44)计算出来。二阶形状函数 α_i 必须满足如下一般要求：

$$\alpha_i = \begin{matrix} 1 & \text{在节点 } i \\ 0 & \text{在其他节点上} \end{matrix}$$

对于 α_1，让我们验证这一点：在节点 1 上，

$$\text{在节点 } 1, \zeta_{①} = 1$$
$$\alpha_1 = (2\zeta_{①} - 1)\zeta_{①}$$
$$= (2-1) \times 1 = 1$$

在节点 4 上，

$$\text{在节点 } 4, \zeta_{①} = 0$$
$$\alpha_1 \mid_{\text{节点}4} = (2\zeta_{①} - 1)\zeta_{①}$$
$$= (0-1) \times 0 = 0$$

在节点 2 上，

$$\text{在节点 } 2, \zeta_{①} = 0.5$$
$$\alpha_1 \mid_{\text{节点}2} = (2\zeta_{①} - 1)\zeta_{①}$$
$$= (2 \times 0.5 - 1) \times 0.5 = 0$$

在节点 5 和 6 上，α_1 等于零，这是因为在节点 5 和 6 上 $\zeta_{①}=0$。因此，在节点 1 上形状函数 α_1 等于 1，而在其他节点上它都为零。而且，形状函数 α_1 是二阶的，因为它是 $\zeta_{①}$ 和$(2\zeta_{①}-1)$的乘积，而 $\zeta_{①}$ 和$(2\zeta_{①}-1)$均是一阶的。

下面验证 α_2：由式(16.114)，有

$$\alpha_2 = 4\zeta_{①}\zeta_{②}, \quad \text{因为在节点 2} \quad \zeta_{①} = 0.5, \quad \zeta_{②} = 0.5$$

所以 $$\alpha_2 = 4 \times 0.5 \times 0.5 = 1$$

为了更好地理解在各个节点上 $\zeta_{①}$ 的值，请看图 16.21。在与线段 BC 相平行的虚线上，$\zeta_{①}$=常数。如果这条虚线穿过线段 AB 的中点，那么在中点处 $\zeta_{①}$ 将等于 0.5。在图 16.22 中画出了 α_1 和 α_3 随(x, y)变化而变化的草图。可以证明，$\boldsymbol{S}^{(e)}$ 矩阵由式(16.107)给出，但在这种情况下的 $\boldsymbol{Q}_i$ 矩阵是 6×6 矩阵，并且它由式(16.121)至式(16.123)给出。$\boldsymbol{T}^{(e)}$ 矩阵由式(16.124)给出：

$$\boldsymbol{Q}_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \tag{16.121}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{16.122}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16.123}$$

$$
\boldsymbol{T}^{(e)}=\frac{\boldsymbol{A}^{(e)}}{180}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 32 & 16 & 0 & 16 & -4 \\ 0 & 16 & 32 & -4 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 6 & 0 & -1 \\ -4 & 16 & 16 & 0 & 32 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{16.124}
$$

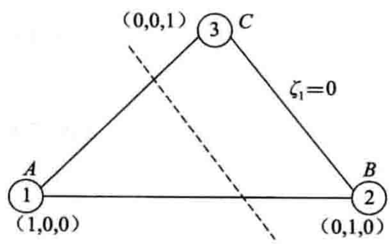


图 16.21 在各个节点上 $\zeta_{①}$ 的值

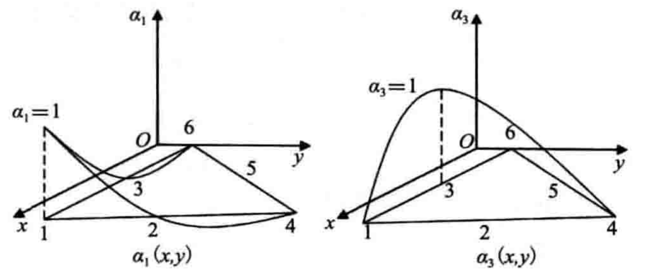


图 16.22 二阶形状函数的草图

根据定义进行计算，可以证明由式(16.107)和式(16.121)～式(16.124)给出的 $\boldsymbol{S}^{(e)}$ 和 $\boldsymbol{T}^{(e)}$ 是正确的。因为

$$
S_{ij}^{(e)}=\iint_{\Delta^{(e)}}(\overline{\nabla}\alpha_i\cdot\overline{\nabla}\alpha_j)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.125}
$$

$$
S_{ij}^{(e)}=\iint_{\Delta^{(e)}}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x}+\frac{\partial\alpha_i}{\partial y}\frac{\partial\alpha_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.126}
$$

计算 $S_{14}^{(e)}$：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}[(2\zeta_{①}-1)\zeta_{①}]\\
&=(2\zeta_{①}-1)\frac{\partial\zeta_{①}}{\partial x}+\zeta_{①}\frac{\partial}{\partial x}(2\zeta_{①}-1)\\
&=(2\zeta_{①}-1)\frac{\partial\zeta_{①}}{\partial x}+\zeta_{①}\frac{\partial}{\partial\zeta_{①}}(2\zeta_{①}-1)\frac{\partial\zeta_{①}}{\partial x}\\
&=\frac{\partial\zeta_{①}}{\partial x}(2\zeta_{①}-1+2\zeta_{①})\\
&=\frac{b_1}{2A^{(e)}}(4\zeta_{①}-1)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial\alpha_4}{\partial x}=\frac{b_2}{2A^{(e)}}(4\zeta_{②}-1)
$$

$$
\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}=\frac{c_1}{2A^{(e)}}(4\zeta_{①}-1)
$$

$$
\frac{\partial\alpha_4}{\partial y}=\frac{c_2}{2A^{(e)}}(4\zeta_{②}-1)
$$

$$
\begin{aligned}
S_{14}^{(e)}&=\iint_{\Delta^{(e)}}[(4\zeta_{①}-1)(4\zeta_{②}-1)]\frac{[b_1b_2+c_1c_2]}{4[A^{(e)}]^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{b_1b_2+c_1c_2}{4[A^{(e)}]^2}\iint_{\Delta^{(e)}}(16\zeta_{①}\zeta_{②}-4\zeta_{②}-4\zeta_{①}+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{b_1b_2+c_1c_2}{4A^{(e)}}\left(\frac{16}{12}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+1\right)
\end{aligned} \tag{16.127}
$$

$$
S_{14}^{(e)}=-\frac{1}{12A^{(e)}}(b_1b_2+c_1c_2) \tag{16.128}
$$

可以证明(参见附录 16B)，有下列结果

$$b_i b_j + c_i c_j = -2A^{(e)} \cot\theta_k, \quad i \neq j \tag{16.129}$$

$$b_i^2 + c_i^2 = 2A^{(e)}(\cot\theta_j + \cot\theta_k) \tag{16.130}$$

因此，由式(16.128)，得到

$$S_{14}^{(e)} = \frac{1}{6}\cot\theta_3 \tag{16.131}$$

根据式(16.107)及式(16.121)～式(16.123)，也能得到相同的 $S_{14}^{(e)}$ 值。通过计算 $\boldsymbol{T}$ 矩阵元素中的一个元素(比如 $T_{11}^{(e)}$)，来验证 T 矩阵元素：

$$T_{11}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.132}$$

$$\alpha_1^2 = [(2\zeta_{①} - 1)\zeta_{①}]^2 = \zeta_{①}^2(4\zeta_{①}^2 + 1 - 4\zeta_{①})$$

$$\alpha_1^2 = 4\zeta_{①}^4 + \zeta_{①}^2 - 4\zeta_{①}^3 \tag{16.133}$$

利用标准积分公式(16.78)，有

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_{①}^4 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{15}$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \zeta_{①}^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{10}$$

所以 $$T_{11}^{(e)} = A^{(e)}\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{6} - \frac{4}{10}\right) = \frac{A^{(e)}}{30} \tag{16.134}$$

16A.4 节包含一个利用基于节点的二阶方法的例子。这个例子的目的就是求出图16.23所示等腰直角三角形波导的最低截止波数。把这个波导分成两个单元，这会产生9个总体节点。

我们给出了函数程序 GLAN2T 及主程序。表16.9给出了局部节点数组 n1L 至 n6L。表16.10给出了两个单元的总体节点1、4、6和9(顶点上的节点)的坐标。计算得到的 k_c 的最小值是3.25，而准确答案是3.14。

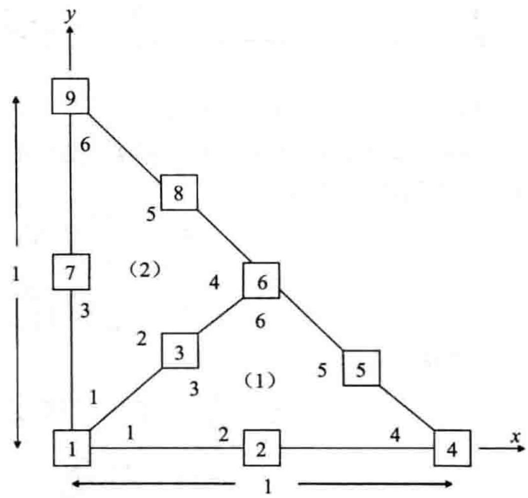


图 16.23 等腰直角三角形波导的横截面

表 16.9 两个单元的连接表

单元＃	n1L $n(1, e)$	n2L $n(2, e)$	n3L $n(3, e)$	n4L $n(4, e)$	n5L $n(5, e)$	n6L $n(6, e)$
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	7	6	8	9

表 16.10 两个单元的总体节点的坐标

$x([1, 4, 6, 9]) = [010.50]$
$y([1, 4, 6, 9]) = [000.51]$

16.5.2 矢量有限元

让我们简要地回顾在前面我们用有限元方法求解过的问题的类型。它们都是标量问题。

a. 拉普拉斯方程式(16.25)：

$$\nabla_t^2 \Phi = 0$$

对泛函(式(16.26))求极值，可以解出 Φ：

$$I(\Phi) = \iint \frac{1}{2}\varepsilon\,|\overline{\nabla}_t \Phi|^2 \mathrm{d}S$$

将有限元方法用于求式(16.26)的最小值就能够得到代数方程，代数方程的解是式(16.75)：

$$[\boldsymbol{\Phi}_{\rm f}] = -[\boldsymbol{S}_{\rm ff}]^{-1}[\boldsymbol{S}_{\rm fp}][\boldsymbol{\Phi}_{\rm p}]$$

在对$[\boldsymbol{S}^{(e)}]$单元矩阵进行合成后，就可以得到$[\boldsymbol{S}]$总体矩阵。$[\boldsymbol{S}^{(e)}]$单元矩阵由式(16.125)给出：

$$\boldsymbol{S}_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} (\overline{\nabla}\alpha_i \cdot \overline{\nabla}\alpha_j)\,{\rm d}S$$

式中，α_i 是形状函数。

b. 在均匀波导问题中，纵向电场(TM 模式)或纵向磁场(TE 模式)可以看做待求解的位函数，与之相关的问题是一个特征值问题。对于 TM 模式问题，式(15.3)可以写为

$$\widetilde{E}(x,y,z) = F(x,y){\rm e}^{-{\rm j}\beta z}$$

且 $F(x, y)=\Phi$ 满足方程式(16.96)和式(16.97)：

$$\nabla_{\rm t}^2\Phi + k_{\rm t}^2\Phi = 0$$

$$k_{\rm t}^2 = k^2 - \beta^2$$

与其相应的泛函是式(16.98)：

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}\iint_S |\overline{\nabla}_{\rm t}\Phi|^2{\rm d}S - \iint_S k_{\rm t}^2\Phi^2{\rm d}S$$

基于有限元方法进行离散得到代数方程式(16.102)：

$$[\boldsymbol{S}][\Phi] - k_{\rm t}^2[\boldsymbol{T}][\Phi] = 0$$

在对基本的$[\boldsymbol{T}^{(e)}]$进行合成后，就可以得到总体矩阵$[\boldsymbol{T}]$，其中 $\boldsymbol{T}_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i\alpha_j{\rm d}S$。

对于基于节点的一阶方法，形状函数 α_i 与面积坐标相同。对于二阶方法，可根据式(16.119)和式(16.120)用面积坐标来定义 α。在这两种方法中，标量位函数 Φ 的连续性在有限单元的公共节点及公共边(三角形单元的边)上都能够自然地得到满足。

对于波导问题，如果在波导内媒质是不均匀的，我们将会遇到一个困难。假设在波导中部分填充有电介质，那么模式不能完全地分为 $\rm TE^z$ 或 $\rm TM^z$ 模式。一些模式是混合的($\widetilde{E}_z\neq0$，$\widetilde{H}_z\neq0$)，因此我们找不到一个合适的标量位函数来描述这类问题。在这种情况下，最好的方法是直接求解矢量电场或矢量磁场。然而，出发点就是对于无源的非均匀媒质区域写出麦克斯韦方程，即：

$$\varepsilon_{\rm r} = \varepsilon_{\rm r}(\overline{r}) \tag{16.135}$$

$$\mu_{\rm r} = \mu_{\rm r}(\overline{r}) \tag{16.136}$$

$$\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{E}} = -{\rm j}\omega\mu_0\mu_{\rm r}(\overline{r})\widetilde{\overline{H}} \tag{16.137}$$

$$\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{H}} = {\rm j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\rm r}(\overline{r})\widetilde{\overline{E}} \tag{16.138}$$

消去 H，得到波动方程

$$\overline{\nabla}\times\left[\frac{\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{E}}}{\mu_{\rm r}(\overline{r})}\right] - k_0^2\varepsilon_{\rm r}(\overline{r})\,\widetilde{\overline{E}} = 0 \tag{16.139}$$

与式(16.139)相应的泛函为

$$I(\widetilde{\overline{E}}) = \frac{1}{2}\iint_S\left[\frac{\left|\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{E}}\right|^2}{\mu_{\rm r}} - k_0^2\varepsilon_{\rm r}\left|\widetilde{\overline{E}}\right|^2\right]{\rm d}S \tag{16.140}$$

在无源的场域中，散度方程是

$$\overline{\nabla}\cdot\left[\varepsilon_{\rm r}\,\widetilde{\overline{E}}\right] = 0 \tag{16.141}$$

$$\overline{\nabla}\cdot\left[\mu_{\rm r}\,\widetilde{\overline{H}}\right] = 0 \tag{16.142}$$

为了求解矢量方程，可以使用矢量形状函数 $\overline{\alpha}_i$ 和标量场分量：

$$\tilde{\bar{E}}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{3} \bar{\alpha}_i(\bar{r}) E_i \tag{16.143}$$

或者也可以使用标量形状函数和矢量场量：

$$\tilde{\bar{E}}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r}) E_i \tag{16.144}$$

在有限元单元相连接的地方，由于它要求矢量场量连续，因此式(16.144)不是解决问题的途径。当在问题的区域中材料性质不连续时，比如说，在两种介质分界面上 E 的法向分量是不连续的，应用式(16.144)这种表示方法是不合适的。如果 E_i 是切向分量，对于有限元方法的解来说，应用式(16.143)的表示方法是合适的。当有两个单元是通过一个公共边连接在一起时，切向分量 E 连续的边界条件自然地得到满足。

在任意一个给定的单元内，如果 ε_r 是常数，通过强加矢量形状函数 $\bar{\alpha}_i$ 的散度为零这一条件，它就可以满足方程式(16.141)：

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_i = 0 \tag{16.145}$$

注意，当使用基于变分原理的有限元方法时，边界条件

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{16.146}$$

也自然地得到了满足。此外，边界条件

$$\varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2} \tag{16.147}$$

变为一个自然边界条件，因此不需要专门强加这个边界条件。矢量形状泛函必须满足下列一般要求条件：

$$\bar{\alpha}_i \cdot \hat{e}_j \big|_{\text{棱边}j} = 0, \quad i \neq j \tag{16.148}$$

$$\bar{\alpha}_i \cdot \hat{e}_i \big|_{\text{棱边}i} = 1, \quad i = j \tag{16.149}$$

式中，$\hat{e}_j$ 是表示第 j 条边方向的一个单位矢量。这种矢量形状函数可以由标量形状函数 α_i 来构造。对于一阶形状函数，有

$$\bar{\alpha}_1 = l_1 (\alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_2 - \alpha_2 \bar{\nabla}\alpha_1) \tag{16.150}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}(a_1 + b_1 x + c_1 y) \tag{16.151}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}(a_2 + b_2 x + c_2 y) \tag{16.152}$$

以及 l_1 是边 1 的长度。图 16.24 表明一个三角形单元的节点和边。边 j 记为 $\#j$。边1(#1)的起始节点是节点 1，#1 的终止节点是节点 2。

我们推导出了矢量形状函数的几个性质，有一些性质仅仅是做了一点介绍，留做作业。

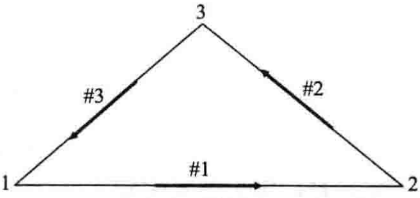


图 16.24 一个三角形单元的节点和棱边

性质 1

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_1 = 0 \tag{16.153}$$

根据式(16.150)，有

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_1 = l_1 \bar{\nabla} \cdot (\alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_2 - \alpha_2 \bar{\nabla}\alpha_1) \tag{16.154}$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_2) = \alpha_1 \nabla^2 \alpha_2 + \bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2$$

$$\nabla^2 \alpha_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{(a_2 + b_2 x + c_2 y)}{2A} = 0$$

所以

$$\bar{\nabla} \cdot (\alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_2) = \bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2 \tag{16.155}$$

同样地，

$$\bar{\nabla} \cdot (\alpha_2 \bar{\nabla}\alpha_1) = \bar{\nabla}\alpha_2 \cdot \bar{\nabla}\alpha_1 = \bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2$$

所以

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_1 = l_1 (\bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2 - \bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2) = 0 \tag{16.156}$$

性质 2

$$\bar{\nabla} \times \bar{\alpha}_1 = 2 l_1 \bar{\nabla}\alpha_1 \cdot \bar{\nabla}\alpha_2 \tag{16.157}$$

性质 3

$$\overline{\alpha}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 \tag{16.158}$$

性质 4

$$\overline{\alpha}_1 \cdot \hat{e}_2 = \overline{\alpha}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0 \tag{16.159}$$

可以将这些性质归纳为：

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\alpha}_i = 0 \tag{16.160}$$

$$\overline{\alpha}_i \cdot \hat{e}_j = 0,\quad i \neq j \tag{16.161}$$

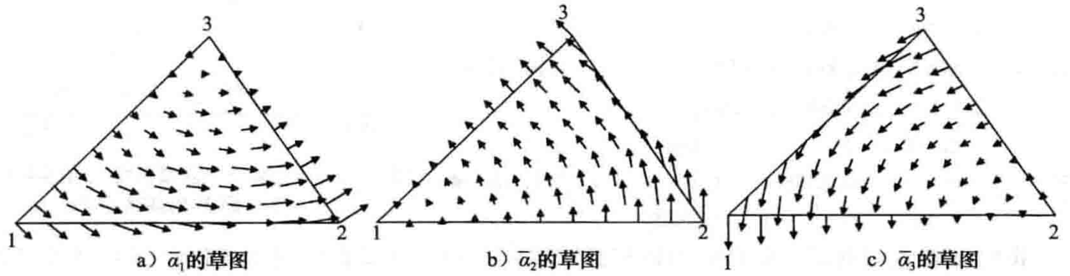
$$\overline{\alpha}_i \cdot \hat{e}_i = 1,\quad i = j \tag{16.162}$$

其中，$\hat{e}_j$ 是沿边 j 方向上的单位矢量。式(16.161)和式(16.162)可以解释为：在第 i 条边上形状函数的切向分量 $\overline{\alpha}_i=1$，而在所有其他边上则为零。除了第 i 条边之外，形状函数 $\overline{\alpha}_i$ 与其他边相垂直。在边 i 上，$\overline{\alpha}_i$ 既有切向分量又有法向分量，并且它的切向分量等于 1。

图 16.25a 中画出了在三角形内 $\overline{\alpha}_i$ 的草图[6]。取与 $\hat{e}_i$ 的点乘，可以证明式(16.143)中的标量电场 E_i 是电场沿边 i 方向的切向分量。例如，

$$\widetilde{\overline{E}} \cdot \hat{e}_1 = \sum_{i=\#1}^{\#3} [\overline{\alpha}_i(x,y) \cdot \hat{e}_1] E_i = [\overline{\alpha}_1(x,y) \cdot \hat{e}_1] E_i \big|_{i=\#1}$$

$$\widetilde{\overline{E}} \cdot \hat{e}_1 = E_{\#1} \tag{16.163}$$



a) $\overline{\alpha}_1$的草图　　b) $\overline{\alpha}_2$的草图　　c) $\overline{\alpha}_3$的草图

图 16.25　矢量形状函数的草图

如果边 i 是两个三角形单元的一个公共边，上述性质保证了 $E_{\tan}$沿这个公共边的连续性(见图 6.26)。

16.5.3　矢量有限元的基本矩阵

对于标量问题，根据式(16.125)得到了刚度矩阵$[\boldsymbol{S}^{(e)}]$。对于矢量问题，对应的单元矩阵是$[\boldsymbol{E}^{(e)}]$，它的元素是

$$E_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} (\overline{\nabla} \times \overline{\alpha}_i) \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{\alpha}_j)\,\mathrm{d}S \tag{16.164}$$

将 $\overline{\alpha}_i$ 和 $\overline{\alpha}_j$ 代入上式并进行积分，得到

$$E_{ij}^{(e)} = \frac{l_i l_j}{A^{(e)}} \tag{16.165}$$

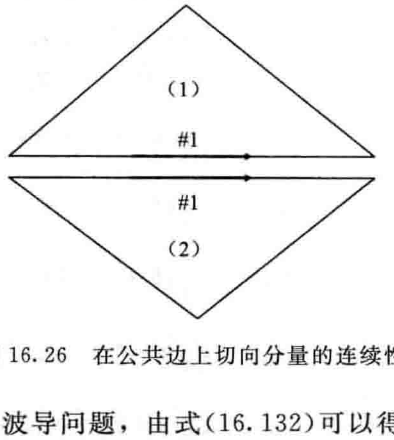


图 16.26　在公共边上切向分量的连续性

在式(16.164)中，l_i 是第 i 条边的长度。对于均匀波导问题，由式(16.132)可以得到$[\boldsymbol{T}^{(e)}]$。对于矢量问题，对应的单元矩阵，记作$[\boldsymbol{F}^{(e)}]$，可以由下式计算出它的 ij 元素

$$F_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \overline{\alpha}_i \cdot \overline{\alpha}_j\,\mathrm{d}S \tag{16.166}$$

为了编写计算机程序方便起见，将上式的计算结果写成如下形式[4]：

$$F_{ij}^{(e)} = \frac{l_i l_j}{48A^{(e)}} G_{ij} \tag{16.167}$$

式中，G 矩阵为

$$[G] = \begin{bmatrix} 2(f_{22}+f_{11}-f_{12}) & (f_{23}-f_{22}-2f_{13}+f_{12}) & (f_{21}-2f_{23}-f_{11}+f_{13}) \\ G_{12} & 2(f_{22}+f_{33}-f_{23}) & (f_{31}-f_{33}-2f_{21}+f_{23}) \\ G_{13} & G_{23} & 2(f_{33}+f_{11}-f_{13}) \end{bmatrix} \tag{16.168}$$

且

$$f_{ij} = b_i b_j + c_i c_j \tag{16.169}$$

例 16.4 如图 16.27 所示，对于等腰直角三角形单元，计算 E 和 F 矩阵。

由式(16.165)及式(16.167)～式(16.169)，得到下面的结果：

$$[f] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.8284 & 2.0000 \\ 2.8284 & 4.0000 & 2.8284 \\ 2.0000 & 2.8284 & 2.0000 \end{bmatrix} \tag{16.170a}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & -0.1667 \\ 0 & 0.3333 & 0 \\ -1.667 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \tag{16.170b}$$

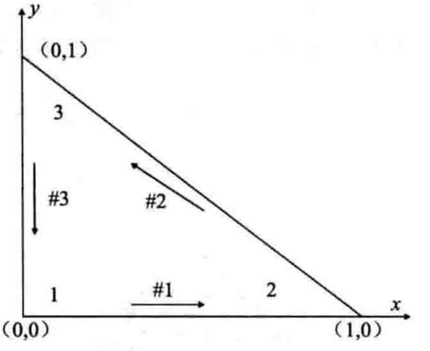


图 16.27 计算一个等腰直角三角形单元的 E 和 F 矩阵的草图

我们没有证明由式(16.166)可以得到式(16.167)，也没有证明由式(16.164)可以得到式(16.165)。我们将检验这些矩阵中某几个元素的计算结果，而其他的则留给读者自己去检验。计算 $F_{11}^{(e)}$ 和 $F_{12}^{(e)}$：

$$\bar{\alpha}_1 = l_1(\alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_2 - \alpha_2 \bar{\nabla}\alpha_1)$$

$$\bar{\alpha}_2 = l_2(\alpha_2 \bar{\nabla}\alpha_3 - \alpha_3 \bar{\nabla}\alpha_2)$$

$$\bar{\alpha}_3 = l_3(\alpha_3 \bar{\nabla}\alpha_1 - \alpha_1 \bar{\nabla}\alpha_3)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}(a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

$$\bar{\nabla}\alpha_1 = \frac{1}{2A}(b_1\hat{x} + c_1\hat{y})$$

$$\bar{\nabla}\alpha_2 = \frac{1}{2A}(b_2\hat{x} + c_2\hat{y})$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{l_1}{2A}[\alpha_1(b_2\hat{x} + c_2\hat{y}) - \alpha_2(b_1\hat{x} + c_1\hat{y})]$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{l_1}{2A}[(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)\hat{x} + (\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1)\hat{y}]$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{l_2}{2A}[(\alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2)\hat{x} + (\alpha_2 c_3 - \alpha_3 c_2)\hat{y}]$$

$$F_{11}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_1 \, dS = \frac{l_1^2}{4A^2} \iint_{\Delta^{(e)}} [(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)^2 + (\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1)^2] dS$$

被积函数是$(b_2^2+c_2^2)\alpha_1^2+(b_2^2+c_2^2)\alpha_2^2-2(b_1b_2+c_1c_2)\alpha_1\alpha_2$。

由标准积分(对于一阶形状函数，有 $\alpha_1=\zeta_1$，$\alpha_2=\zeta_2$，等等)，得到

$$\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_1^2\mathrm{d}S=\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_2^2\mathrm{d}S=\frac{A}{6},\quad \iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_1\alpha_2\mathrm{d}S=\frac{A}{12}$$

$$\text{所以 } F_{11}^{(e)}=\frac{l_1^2}{4A^2}\left[(b_2^2+c_2^2)\frac{A}{6}+(b_1^2+c_1^2)\frac{A}{6}-2(b_1b_2+c_1c_2)\frac{A}{12}\right]$$

$$=\frac{l_1^2}{48A}[2(b_2^2+c_2^2)+2(b_1^2+c_1^2)-2(b_1b_2+c_1c_2)]$$

记 $f_{ij}=b_ib_j+c_ic_j$，上式可以写为

$$F_{11}^{(e)}=\frac{l_1^2}{48A}(2f_{11}+2f_{22}-2f_{12})=\frac{l_1^2}{48A}G_{11}$$

$$F_{12}^{(e)}=\iint_{\Delta^{(e)}}\bar{\alpha}_1\times\bar{\alpha}_2\mathrm{d}S$$

$$=\frac{l_1l_2}{4A^2}\iint_{\Delta^{(e)}}[(\alpha_1b_2-\alpha_2b_1)(\alpha_2b_3-\alpha_3b_2)+(\alpha_1c_2-\alpha_2c_1)(\alpha_2c_3-\alpha_3c_2)]\mathrm{d}S$$

被积函数是$(b_2b_3+c_2c_3)\alpha_1\alpha_2+(b_1b_2+c_1c_2)\alpha_2\alpha_3-(b_2^2+c_2^2)\alpha_1\alpha_3-(b_1b_3+c_1c_3)\alpha_2^2$。

由标准积分，可得

$$\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_1\alpha_2\mathrm{d}S=\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_2\alpha_3\mathrm{d}S=\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_1\alpha_3\mathrm{d}S=\frac{A}{12}$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}}\alpha_2^2\mathrm{d}S=\frac{A}{6}$$

因此，

$$F_{12}^{(e)}=\frac{l_1l_2}{4A^2}\left[(b_2b_3+c_2c_3)\frac{A}{12}+(b_1b_2+c_1c_2)\frac{A}{12}-(b_2^2+c_2^2)\frac{A}{12}-(b_1b_3+c_1c_3)\frac{A}{6}\right]$$

$$=\frac{l_1l_2}{48A}(f_{23}+f_{12}-f_{22}-2f_{13})=\frac{l_1l_2}{48A}G_{12}$$

现在计算 $E_{11}^{(e)}=\iint_{\Delta^{(e)}}|\overline{\nabla}\times\bar{\alpha}_1|^2\mathrm{d}S$。

由式(16.157)的性质 2，可得

$$\overline{\nabla}\times\bar{\alpha}_1=2l_1\,\overline{\nabla}\alpha_1\times\overline{\nabla}\alpha_2=2l_1\frac{1}{2A}(b_1\hat{x}+c_1\hat{y})\times\frac{1}{2A}(b_2\hat{x}+c_2\hat{y})=\frac{2l_1}{4A^2}[(b_1c_2-b_2c_1)\hat{z}]$$

$$|\overline{\nabla}\times\bar{\alpha}_1|^2=\left(\frac{2l_1}{4A^2}\right)^2(b_1c_2-b_2c_1)^2$$

$$E_{11}^{(e)}=\left(\frac{2l_1}{4A^2}\right)^2(b_1c_2-b_2c_1)^2\iint_{\Delta^{(e)}}\mathrm{d}S$$

因为 $b_1c_2-b_2c_1=2A$(参见附录 16B)，所以有

$$E_{11}^{(e)}=\frac{4l_1^2}{16A^4}4A^2A=\frac{l_1^2}{A}$$

16.5.4　矢量有限元应用于解均匀波导问题

现在，让我们考虑棱单元在均匀波导问题中的应用。令 $\varepsilon_r=\mu_r=1$。对于横电场模式，由于纵向分量$\widetilde{E}_z=0$，那么根据定义，方程式(16.139)变为

$$\overline{\nabla}\times\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{E}}_t-k_0^2\,\widetilde{\overline{E}}_t=0 \tag{16.171}$$

式中，$\widetilde{\overline{E}}_t$ 是横向电磁场。

令

$$\overline{\nabla}=\overline{\nabla}_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{16.172}$$

$$\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\widetilde{\overline{E}}_t)=\left(\overline{\nabla}_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left[\left(\overline{\nabla}_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\widetilde{\overline{E}}_t\right]$$

$$=\left(\overline{\nabla}_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\overline{\nabla}_t\times\widetilde{\overline{E}}_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\times\widetilde{\overline{E}}_t\right)\tag{16.173}$$

令

$$\widetilde{\overline{E}}_t(x,y,z)=\overline{E}_t(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\tag{16.174}$$

将式(16.174)代入式(16.173)中，得到

$$\overline{\nabla}_t\times[\overline{\nabla}_t\times\overline{E}_t(x,y)]-k_c^2\overline{E}_t=0\tag{16.175}$$

式中，

$$k_c^2=k_0^2-\beta^2$$

$$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{\omega}{c}\tag{16.176}$$

现在，泛函就是式(16.140)，其中□被$□_t$替换。对于每一个单元，可以写出

$$\overline{E}_t^{(e)}(\overline{r})=\sum_{i=1}^{3}\overline{\alpha}_i(\overline{r})E_{\tan i}^{(e)}\tag{16.177}$$

式中，$E_{\tan i}$是沿边 i 方向的切向分量 $\overline{E}_t$，当将所有单元进行总体合成后，得到

$$[E_{ij}][E_{\tan}]=k_c^2[F_{ij}][E_{\tan}]\tag{16.178}$$

式中，$E_{\tan}$是由沿所有边的切向分量构成的一个列向量。对于 TE 模式，在 PEC 边界上，有 $E_{\tan}=0$，所以波导的理想导体边界面上的所有边都满足齐次狄利赫里边界条件，这样它们都是给定零值的强加棱边。其他边(不在理想导体边界面上)都是自由棱边。类似地，对于 TM 模式，可以得到下面的方程：

$$\overline{\nabla}_t\times[\overline{\nabla}_t\times\overline{H}_t(x,y)]-k_c^2\overline{H}_t=0\tag{16.179}$$

$$\overline{H}_t^{(e)}(\overline{r})=\sum_{i=1}^{3}\overline{\alpha}_i(\overline{r})H_{\tan i}^{(e)}\tag{16.180}$$

$$[E_{ij}][H_{\tan}]=k_c^2[F_{ij}][H_{\tan}]\tag{16.181}$$

在理想导体边界面上，$E_{\tan}$的边界条件是诺伊曼型的，$\partial H_{\tan}/\partial n=0$，在有限元方法中，这个边界条件是一种自然边界条件，因此理想导体边界面上的边都是自由棱边。通过下面两个例子来加以说明。

例 16.5 如图 16.27 所示，计算理想导体波导中 TM 主模的截止波数。将整个三角形看做一个单元。

对于这个波导，我们已经得到由式(16.170)和式(16.171)分别给出的[$\boldsymbol{E}$]与[$\boldsymbol{F}$]矩阵。对于 TM 模式，三条边均是自由棱边。因此，有

$$[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{H}_{\tan}]=k_c^2[\boldsymbol{F}][\boldsymbol{H}_{\tan}]$$

$$[\boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{H}_{\tan}]=k_c^2[\boldsymbol{H}_{\tan}]$$

所以，$k_c^2=\lambda$ 是下列矩阵的特征值：

$$[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{E}]$$

对于这个问题，有

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}12.0000 & 16.9706 & 12.0000\\ 8.4853 & 12.0000 & 8.4853\\ 12.0000 & 16.9706 & 12.0000\end{bmatrix}$$

非零特征值 $k_c^2=36$，所以 $k_c=6$。最小 k_c 的准确值是 TM_{21} 模式的 k_c 值，它等于$\sqrt{5}\pi=7.02$。对于 TE 模式，我们不能够找到任何有意义的答案，因为所有棱边都是强加棱边。◀

例 16.6 现在，考虑将例16.5中的波导分成两个单元(见图16.28)。

此时，总共有5个总体棱边，4个总体节点，以及两个单元。对于TM模式，5个总体棱边都是自由边，所以得到5个特征值。对于TE模式，总体棱边3是唯一一条自由棱边。因此我们仅能得到一个特征值。在单元内部是局部编号，使用了没有方框包围的数字。总体编号是任意的。除了在编号时需要保持逆时针方向增加以外，局部节点编号也是任意的。一旦局部节点的编号1、2、3确定以后，边1(#1)的起始节点就是1，终止节点是2，这条边的方向用由1到2的箭头来表示。总体棱边的方向也是任意指定的。对于每一个单元，局部棱边编号与总体棱边编号之间的对应关系是需要指定的。因为局部棱边与相对应的总体棱边的方向很可能具有相反的意义。当它们意义相反时，我们将会给总体棱边的编号添加一个负号。这些想法可以通过一段MATLAB代码完成一个例子很好地得到说明。这个函数叫做GLAET(基于棱边的二维三角形单元的总体合成)。主程序以及函数程序包含很多解释代码的注释语句，请参见附录16.5。

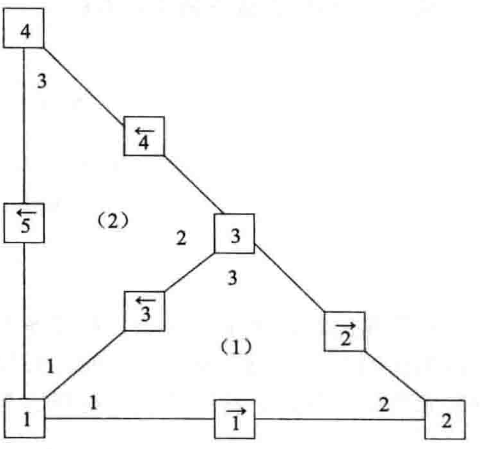


图16.28 图16.27中的两个单元

注释语句会帮助读者将算法与MATLAB代码联系起来。

表16.11是基于图16.29所示的两个单元所生成的。

边数：$N_{eg}=5$；

节点数：$N_n=4$；

单元数：$N_e=2$；

$x_n=[0,\ 1,\ 0.5,\ 0]$；

$y_n=[0,\ 0,\ 0.5,\ 1]$。

表16.11 图16.29所示节点和棱边的连接表

单元#	局部节点数组1		
	$n(1,e)$	$n(2,e)$	$n(3,e)$
①	1	2	3
②	1	3	4
单元#	局部棱边数组		
	$ne(1,e)$	$ne(2,e)$	$ne(3,e)$
①	1	2	3
②	−3	4	5

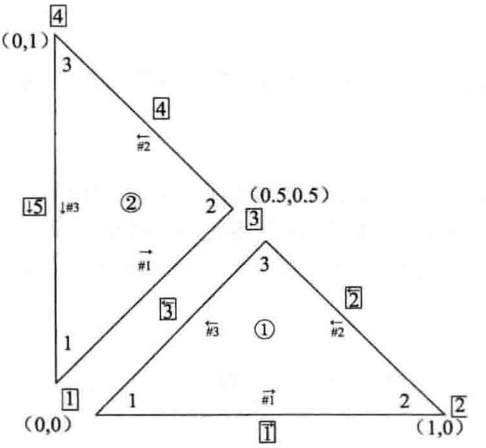


图16.29 两个单元的细节

16.6 传输线的特性阻抗：有限元方法

传输线是一个由两个导体所组成的波导系统，在传输线上电磁波是以TEM波形式传播的。TEM波既没有纵向电场也没有纵向磁场($\widetilde{E}_z=\widetilde{H}_z=0$)。传输线模式是波导模式在

零截止波数($k_c=0$)时的一个特例。因此

$$k=\beta \tag{16.182}$$

横向分量$\widetilde{E}_x$满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\widetilde{E}_x+k^2\widetilde{E}_x=0$$

$$\nabla_t^2\widetilde{E}_x+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widetilde{E}_x+k^2\widetilde{E}_x=0$$

$$\nabla_t^2\widetilde{E}_x+(-\mathrm{j}\beta)^2\widetilde{E}_x+k^2\widetilde{E}_x=0$$

$$\nabla_t^2\widetilde{E}_x+(k^2-\beta^2)\widetilde{E}_x=0$$

$$\nabla_t^2\widetilde{E}_x=0 \tag{16.183}$$

$$\nabla_t^2\Phi=0 \tag{16.184}$$

尽管场随时间做正弦变化，但是场量和位函数都满足二维拉普拉斯方程。因此，可以将传输线问题定义为求横截面上的拉普拉斯方程问题。可以用有限元方法通过使泛函取极值来求解这个问题，泛函 I 就是电场能量：

$$I=W_e=\iint_S\frac{1}{2}\varepsilon\left|\overline{\nabla}\Phi\right|^2\mathrm{d}S \tag{16.185}$$

在前面我们已经求解了拉普拉斯方程，现在我们知道如何求解它(通过刚度矩阵的概念)及如何得到电位。在得到节点的电位后，通过计算每一个单元对泛函的贡献，可以得到电场能量。之前已经证明过，每一个单元中的电场能量为

$$W_e^{(e)}=\frac{1}{2}\varepsilon^{(e)}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}S_{jk}\Phi_j\Phi_k \tag{16.186}$$

而总能量为

$$W_e=\sum_{(e)=1}^{Ne}W_e^{(e)} \tag{16.187}$$

式(16.187)给出了一种计算电容 C 的方法，因为

$$\frac{1}{2}CV^2=W_e \tag{16.188a}$$

$$C=\frac{2W_e}{V^2} \tag{16.188b}$$

式中，V 是两个导体之间的电位差。无损耗传输线的特性阻抗是

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{16.189}$$

式中，L 是单位长度的电感，C 是单位长度的电容。电感与媒质的介电常数无关。因此，如果媒质(即使是非均匀的)被空气替代，电感却是不变的。对于一个媒质为空气的传输线，波传播速度是 $c=3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，而传播速度由下式给出

$$c=\frac{1}{\sqrt{LC^{\mathrm{air}}}}. \tag{16.190}$$

根据式(16.189)和式(16.190)，消去式(16.189)中的电感：

$$Z_0=\frac{1}{c\sqrt{C^{\mathrm{air}}C}} \tag{16.191}$$

通过计算 C^{air} 和 C，就可以计算出填充多种媒质传输线的特性阻抗。根据式(16.188b)，有限元方法可用于计算 C^{air} 和 C。由式(16.192)可计算出波数 $\beta=k$：

$$\beta=\omega\sqrt{LC}=\frac{\omega}{c}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C^{\mathrm{air}}}} \tag{16.192}$$

16.7 矩量法：二维问题[7]

第1章应用矩量法求解过一个常微分方程。这一节将说明矩量法在二维问题中的应用[7]，第一个问题是考虑边缘效应时平行板电容器电容的计算。首先考虑一个尺寸为$(2a\times 2a)$的平板。假设这个平板是一个电压为V_0的理想导体，我们已经证明了，静电场问题可以表示成式(15.12)所给出的积分方程问题。图15.3给出了在式(15.12)中各项的定义。这里重新给出了图形和方程，分别如图16.30和式(16.193)所示：

$$V_{\mathrm{p}}=V_0=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\rho_{\mathrm{s}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}}\quad(\text{板上的 }P\text{ 点})\tag{16.193}$$

在方程式(16.193)中，未知量是ρ_{s}，电压V_0是一个已知的常数，这是因为平板是一个理想导体板。用15.3.1节($Lf=g$)中所建立的矩量法的语言来说，算子L是一个积分算子：

$$L=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x'\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}}\tag{16.194}$$

并且

$$f(x,y)=\rho_{\mathrm{s}}(x,y)\tag{16.195}$$

$$g(x,y)=V_0\tag{16.196}$$

对于这个问题，必须定义一个内积：

$$\langle\psi_m,\psi_n\rangle=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\psi_m\psi_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{16.197}$$

令未知函数表示为

$$\rho_{\mathrm{s}}(x,y)=\sum_n\alpha_n f_n\tag{16.198}$$

其中，基函数f_n可以选成一个二维脉冲函数

$$f_n=\begin{cases}1 & \text{在 }\Delta S_n\text{ 上}\\ 0 & \text{在所有其他 }\Delta S_m\text{ 上}\end{cases}\tag{16.199}$$

在上式中，ΔS_n和ΔS_m是平板中的两个子域。如图16.31所示，让这些子域都是尺寸为$(2b\times 2b)$的正方形。

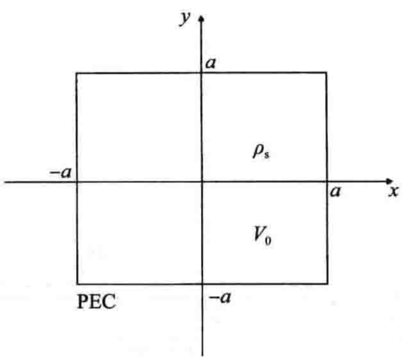


图16.30 一个正方形理想导体平板

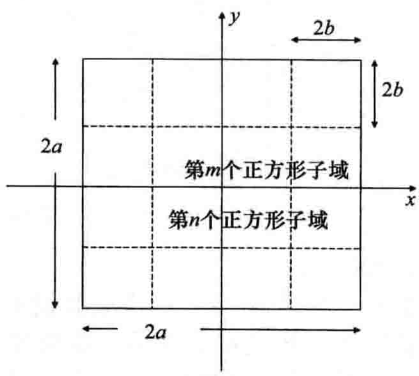


图16.31 正方形平板中的正方形子域

选择权函数ω_m是二维冲击函数：

$$\omega_m=\delta(x-x_m)\delta(y-y_m)\tag{16.200}$$

由式(15.75)可得，

$$g_m=\langle\omega_m,g\rangle=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}V_0\delta(x-x_m)\delta(y-y_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V_0\tag{16.201}$$

注意

$$Lf_n = \int_{-a}^{a} dx' \int_{-a}^{a} \frac{f_n dy'}{4\pi\varepsilon[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}} \tag{16.202}$$

根据式(15.74)，有

$$l_{mn} = \langle \omega_m, Lf_n \rangle$$
$$= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \delta(x-x_m)\delta(y-y_m) \int_{-a}^{a} dx'dy' \int_{-a}^{a} \frac{f_n dy'}{4\pi\varepsilon[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}} dxdy \tag{16.203}$$

利用冲击函数的采样性质，有

$$l_{mn} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{f_n}{4\pi\varepsilon[(x_m-x')^2+(y_m-y')^2]^{1/2}} dx'dy' \tag{16.204}$$

像每个式(16.204)一样，把积分都扩展至整个平板上。然而，除了在 ΔS_n 上之外，因为 f_n 在所有其他子域上都为零，所以它在 ΔS_n 上是一个脉冲函数($f_n=1$)，这样式(16.204)简化为

$$l_{mn} = \iint_{\Delta S_n} \frac{dx'dy'}{4\pi\varepsilon[(x_m-x')^2+(y_m-y')^2]^{1/2}} \tag{16.205}$$

让我们来解释一下式(16.205)。

根据式(16.205)和图16.32，可以给出下面有关 l_{mn} 的物理解释。l_{mn} 是由第 n 个子域上的单位面电荷激励在第 m 个子域中心所产生的电压。在式(16.205)中，被积函数分母中方括号内一项的平方根是 R_{SP}，它是源点与场点之间的距离。对于 $m\neq n$，这个距离可以近似为两个子域中心的距离，可以看做一个常数，从而提到积分之外。这样就有

$$R_{SP} = [(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2]^{1/2}, \quad m\neq n \tag{16.206}$$

$$l_{mn} \approx \frac{\Delta S_n}{4\pi\varepsilon R_{SP}}, \quad m\neq n \tag{16.207}$$

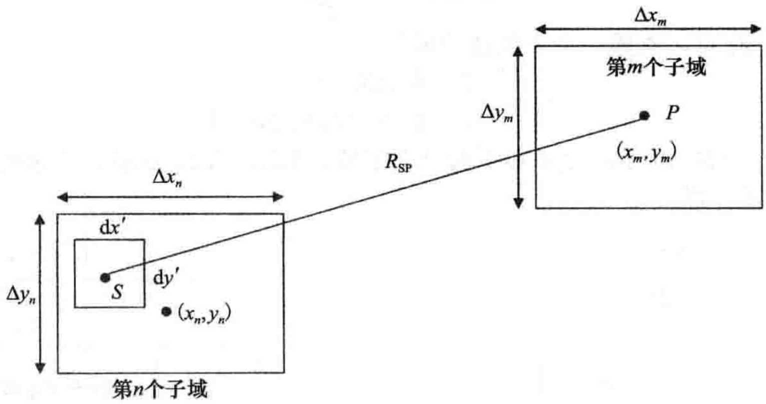


图 16.32 子域 m 和子域 n

式中，$\Delta S_n = 4b^2$。

然而，如果 $m=n$，这个近似就不再成立了。在这种情况下，P 点在具有单位电荷密度的同一个子域上，且是该子域的中心。现在，图16.32将变为图16.33，式(16.205)简化为

$$l_{mn} = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \frac{dx'dy'}{4\pi\varepsilon[x'^2+y'^2]^{1/2}} \tag{16.208}$$

式(16.208)中的积分有一个可积的奇点(当 S 与 P 重合时，因为 $x'=0$，$y'=0$，所以分母无穷大)。但是，利用下面的已知积分，就可以完成上式中的积分：

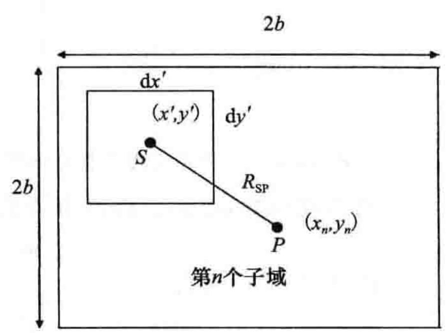


图 16.33 计算 l_{mn} 的示意图

$$\int_{-b}^{b}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{1/2}}=2\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big|_0^b=2\mathrm{arcsinh}\frac{b}{|x|} \tag{16.209}$$

因此，得到

$$l_{mn}=\frac{2}{4\pi\varepsilon}\int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\left[\mathrm{arcsinh}\frac{b}{|x|}\right]=\frac{2b}{\pi\varepsilon}\ln(1+\sqrt{2})=\frac{2b}{\pi\varepsilon}0.8814 \tag{16.210}$$

因为 $2b=\sqrt{A_n}$，所以可以将 l_{m} 用子域面积的平方根表示成：

$$l_{m}=\frac{\sqrt{A_n}}{\pi\varepsilon}0.8814=0.2806\frac{\sqrt{A_n}}{\varepsilon} \tag{16.211}$$

因此，可以通过计算得到[l]的元素。求解代数方程

$$[l_{mn}][\alpha_n]=[g_m] \tag{16.212}$$

就可以得到每一个子域上的面电荷密度 α_n。N 个子域上的总电荷 Q 为

$$Q=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\Delta S_n \tag{16.213}$$

相对于一个电压为零半径为无穷大的球，这个理想导体的电容 C 为

$$C=\frac{Q}{V_0} \tag{16.214}$$

式中，Q 由式(16.213)给出。

我们已经利用正方形子域和正方形理想导体平板说明了矩量方法的应用。一个实际问题可能具有复杂形状的平板，并且一些子域可能不是正方形。如果是这样，就需要修改式(16.207)和式(16.211)吗？由式(16.207)知道，因为 l_{mn} 取决于两个子域中心之间的距离以及子域的面积 ΔS_n，所以子域 ΔS_n 的形状是无关紧要的。因为式(16.211)是通过对 x 和 y 进行积分得到的，它对子域 ΔS_n 的形状的依赖程度不明显。为了回答这个问题，计算如图16.34所示圆形子域的 l_{m}。

l_{m} 是由圆形区域上的单位面电荷密度激励在 P 点产生的电位：

$$l_{m}=\Phi_{\mathrm{P}}=\int_{j'=0}^{2\pi}\int_{\rho'=0}^{c}\frac{\rho_s\mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon R_{\mathrm{SP}}}$$

且 $\rho_s=1$，$R_{\mathrm{SP}}=\rho'$，$\mathrm{d}S'=d\rho'\rho'\mathrm{d}\phi'$：

$$l_{m}=\Phi_{\mathrm{P}}=\int_{j'=0}^{2\pi}\int_{\rho'=0}^{c}\frac{\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\rho'}{4\pi\varepsilon\rho'}=\frac{2\pi}{4\pi\varepsilon}\rho'\Big|_0^c=\frac{c}{2\varepsilon}$$

因为 $\pi c^2=A_n$，所以可以用 A_n 将 l_{m} 表示为：

$$l_{m}=\frac{c}{2\varepsilon}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{\pi}}=0.2821\frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{\varepsilon}}\quad(\text{对一个圆形子域}) \tag{16.215}$$

式(16.215)与式(16.211)几乎是相同的，由此我们断定 l_{m} 对子域形状的依赖程度不大。只要子域不是长方形或椭圆形状，就可以用式(16.215)来计算 l_{m}。出现这种现象的原因是因为 R_{SP} 出现在分母中，所以对 l_{m} 的贡献大部分来自点 P 邻近的电荷。另一种说法是贡献大部分来自在原点处的可积奇点。

现在，将这一方法推广到如图16.35所示的平板电容器中。

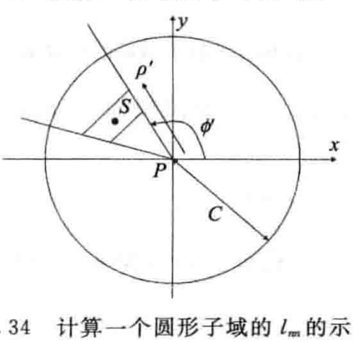


图16.34 计算一个圆形子域的 l_{m} 的示意图

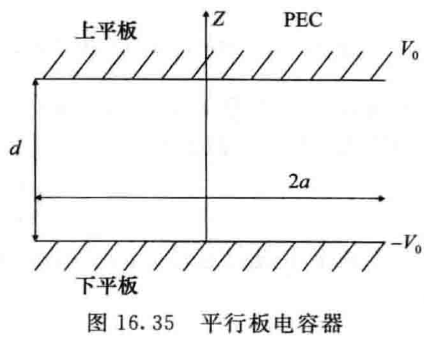


图16.35 平行板电容器

令

$$\rho_s^t(x,y)=\sum_n \alpha_n^t f_n \quad (\text{对于上平板}) \tag{16.216}$$

$$\rho_s^b(x,y)=\sum_n \alpha_n^b f_n \quad (\text{对于下平板}) \tag{16.217}$$

将代数方程可以写成分块矩阵的形式，其矩阵元素是

$$\begin{bmatrix}[l^{tt}] & [l^{tb}]\\ [l^{bt}] & [l^{bb}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_n^t\\ \alpha_n^b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_m^t\\ g_m^b\end{bmatrix} \tag{16.218}$$

$[l^{tt}]$和$[l^{bb}]$中的元素可以用前面的方法计算得到。l_{mn}^{tb}是由上平板中一个单元上的单位面电荷密度激励在下平板中一个单元的中心处所产生的电位。相似的解释也适用于$[l^{bt}]$的元素。图 16.36 描述了几何形状。

即使 $m=n$，在被积函数中也没有奇点问题。如果 $m=n$，两个单元相互对齐，它们的中心距离是 d。因此，可以写出

$$l_{mn}^{tb}=\frac{A_n}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2+d^2}} \tag{16.219}$$

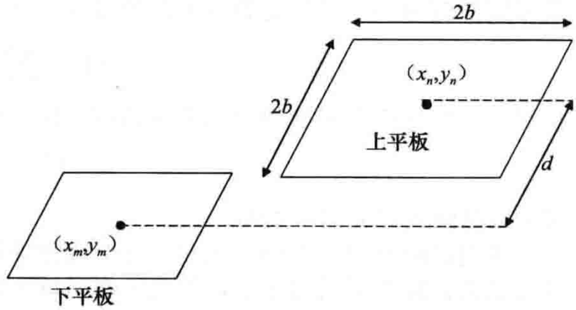


图 16.36 下平板和上平板中的子域

然而，可以对 l_{mn}^{tb} 的公式做一些改进。如果 d 很小，这样做就是很有必要的。考虑如图 16.37 所示的几何形状：

$$\Phi_P(0,0,d)=\int_{\phi'=0}^{2\pi}\int_{\rho'=0}^{c}\frac{\rho'\,d\rho'\,d\phi'}{4\pi\varepsilon(\rho'^2+d^2)^{1/2}}=\frac{2\pi}{4\pi\varepsilon}\int_0^c\frac{\rho'\,d\rho'}{(\rho'^2+d^2)^{1/2}} \tag{16.220}$$

$$l_{mn}^{tb}=\Phi_P(0,0,d)=\frac{0.282\times 2c}{\varepsilon}\left[\sqrt{1+\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{c}\right)^2}-\frac{\sqrt{\pi}d}{2c}\right]$$

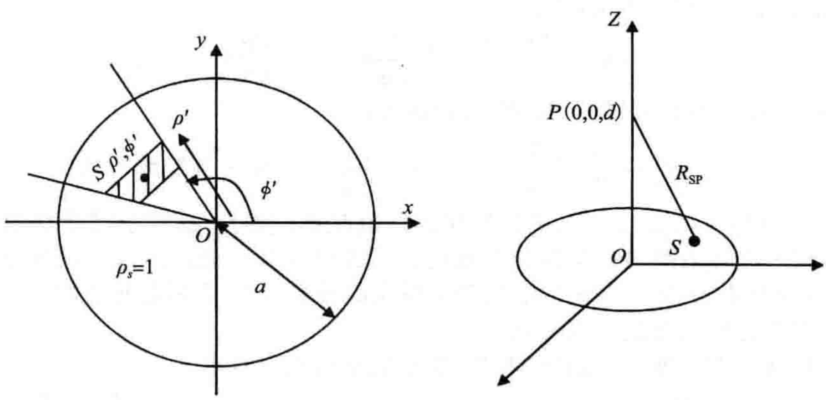


图 16.37 当平板间距离很小时，对于相互对齐的下平板和上平板子域的改进计算

如果再一次注意到 $c=\sqrt{A_n/\pi}$，上面的公式可转化为只涉及面积而不涉及半径。因此，得到 l_{mn}^{tb} 的一个改进公式：

$$l_{mn}^{tb}=\frac{0.3182}{\varepsilon}\left(\sqrt{A_n+\frac{\pi^2d^2}{4}}-\frac{\pi d}{2}\right) \tag{16.221}$$

对于两个平板相互对齐的平行板电容器，可以利用对称性，以减少联立方程的数目。注意

$$[l^{tt}] = [l^{bb}] \tag{16.222}$$

$$[l^{tb}] = [l^{bt}] \tag{16.223}$$

如果上平板的电压是 V_0，下平板的电压是 $-V_0$，那么，

$$g_m^t = -g_m^b \tag{16.224}$$

根据式(16.218)，有

$$[l^{tt}][\alpha_n^t] + [l^{tb}][\alpha_n^b] = g_m^t \tag{16.225}$$

$$[l^{bt}][\alpha_n^t] + [l^{bb}][\alpha_n^b] = -g_m^t \tag{16.226}$$

根据式(16.222)～式(16.226)，显然可以得到

$$[\alpha_n^t] = -[\alpha_n^b] \tag{16.227}$$

将式(16.227)代入式(16.225)中，并求出$[\alpha_n^t]$，得到

$$[\alpha_n^t] = \{[l^{tt}] - [l^{tb}]\}^{-1}[g_m^t] \tag{16.228}$$

上平板上的总电荷为

$$Q = \sum_n \alpha_n \Delta S_n$$

而两个平板之间的电位差为 $2V_0$。因此，

$$C = \frac{Q}{2V_0} \tag{16.229}$$

16.8　矩量法：散射问题[7]

16.8.1　公式

7.6 节研究了导电目标对电磁波的散射问题。特别地，我们考虑了沿 x 方向传播的入射平面波，它的电场为

$$\tilde{\overline{E}}^i = \hat{z} E_0 e^{-j\beta x} \tag{16.230}$$

一半径为 a，轴线沿 z 轴的无限长导电圆柱体会对入射平面波产生一个散射波。利用求解边值问题的方法，我们已经解析地证明了在 x 轴上总电场的 z 分量为

$$\begin{aligned} E_z^t &= E_z^i + E_z^{sc} \\ &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (j^{-n})\left[J_n(\beta x) - \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta x)\right], \quad -\infty < x < -a \\ & \qquad a < x < \infty \end{aligned} \tag{16.231}$$

如果 βa 的值较大，这个级数收敛得十分缓慢[8]。另一种可供选择的分析方法是基于矩量法[7]的数值方法。本节将介绍这种方法在散射问题中的应用。

在 2.15 节中已经证明了，自由空间中沿 z 轴的无限长细线正弦电流 $I_0 e^{j\omega t}$ 所产生的矢量位$\tilde{\overline{A}} = \hat{z} A(\rho)$为

$$A(\rho) = -j\frac{\mu_0}{4\pi} I_0 H_0^{(2)}(\beta\rho) \tag{16.232}$$

且

$$\tilde{E}_z = -\frac{\beta\eta_0}{4} I_0 H_0^{(2)}(\beta\rho) \tag{16.233}$$

假设细线与 z 轴不重合，而是与 z 轴平行，且通过(x', y')点，或者通过圆柱坐标系中的(ρ', ϕ')点。

将式(16.233)中的 ρ 用$|\overline{\rho} - \overline{\rho}'|$来替换，就可以得到在这种情况下的电场：

$$\tilde{E}_z(\rho, \phi) = -\frac{\beta\eta_0}{4} I_0 H_0^{(2)}(\beta|\overline{\rho} - \overline{\rho}'|) \tag{16.234}$$

$$|\bar{\rho}-\bar{\rho}'| = [\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]^{1/2} \tag{16.235}$$

如果导体是理想导体，那么电流只能存在于导体表面上，如图 16.38 所示。

让面电流密度为$\widetilde{K}_z$(A/m)。由于曲线 c 上微元 dl' 的电流为 $\widetilde{I}_0=\widetilde{K}_z dl'$，因此由式(16.234)可给出总电场$\widetilde{E}_z$ 为

$$\widetilde{E}_z(\rho,\phi) = -\frac{\beta\eta_0}{4}\oint \widetilde{K}_z(\bar{\rho}')H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|)dl' \tag{16.236}$$

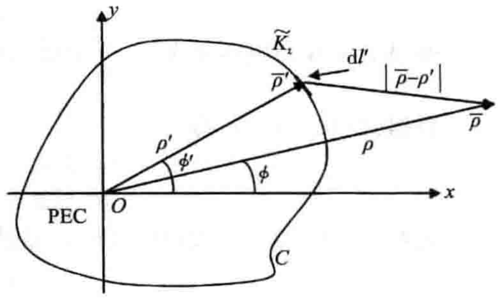


图 16.38 理想导体圆柱表面上的面电流

在式(16.236)中，$\widetilde{K}_z$ 是入射平面波电场$\widetilde{E}_z^i$ 在导体表面上所感应出的电流面密度。由于$\widetilde{K}_z$ 是未知的，因此式(16.236)称为积分方程。我们知道$\widetilde{E}_z$ 是总电场$\widetilde{E}_z^t$，它是入射波电场与散射波电场之和，我们也知道边界条件是

$$\widetilde{E}_z(\rho,\phi) = 0 \quad (\text{对于点 } C) \tag{16.237}$$

因此，对于点 C，得到如下形式的积分方程

$$\frac{\beta\eta_0}{4}\oint_C \widetilde{K}_z(\bar{\rho}')H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|)dl' = E_z^i \quad (\text{对于 } C \text{ 上的一点}) \tag{16.238}$$

求解这个积分方程，就可以得到$\widetilde{K}_z$。由$\widetilde{K}_z$ 所产生的场又可以得到散射场$\widetilde{E}_z^{sc}$。因此，散射场可由下式来计算

$$\widetilde{E}_z^{sc}(\rho) = -\frac{\beta\eta_0}{4}\oint_C \widetilde{K}_z(\bar{\rho}')H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|)dl' \quad (\text{对任何点 } \bar{\rho}) \tag{16.239}$$

因此，用矩量法求解散射问题包含两个步骤。第一步是给定$\widetilde{E}_z^i$，用矩量法求解积分方程式(16.238)，得到$\widetilde{K}_z(\bar{\rho}')$。第二步是求积分(式(16.239))，得到$\widetilde{E}_z^{sc}$。方程式(16.238)称为电场积分方程(Electric Field Integral Equation，EFIE)。

16.8.2 解

参考图 16.38。将曲线 C 分成 N 个直线段 Δc_n。令

$$\widetilde{K}_z(\bar{\rho}) = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n \tag{16.240}$$

令

$$f_n(\bar{\rho}) = \begin{cases} 1 & \text{在 } \Delta c_n \text{ 上} \\ 0 & \text{在所有其他 } \Delta c_n \text{ 上} \end{cases} \tag{16.241}$$

也就是说，利用脉冲函数进行展开。

选择冲击函数作为测试函数(点匹配)

$$\omega_m = \delta(\bar{\rho}-\bar{\rho}_m) \tag{16.242}$$

定义如下内积

$$\langle f,g\rangle = \int_C fg\,dl \tag{16.243}$$

注意，这个问题的算子 L 是下式的积分算子

$$L = \frac{\beta\eta_0}{4}\int_C H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|)dl' \tag{16.244}$$

未知函数是 $f=\widetilde{K}_z$，激励函数是 $g=E_z^i$。

得到方程

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \tag{16.245}$$

式中

$$l_{mn}=\int_C\delta(\bar{\rho}-\bar{\rho}_m)[\int_C\frac{\beta\eta_0}{4}H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|f_n)\mathrm{d}l']\mathrm{d}l$$

$$l_{mn}=\frac{\beta\eta_0}{4}\int_C H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}_m-\bar{\rho}'|)f_n\mathrm{d}l' \tag{16.246}$$

$$l_{mn}=\frac{\beta\eta_0}{4}\int_{\Delta c_n}H_0^{(2)}(\beta|\bar{\rho}_m-\bar{\rho}'|)\mathrm{d}l' \tag{16.247}$$

$$l_{mn}=\frac{\beta\eta_0}{4}\int_{\Delta c_n}H_0^{(2)}\{[\beta(x'-x_m)^2+(y'-y_m)^2]^{1/2}\}\mathrm{d}l' \tag{16.248}$$

很显然，l_{mn}是由 Δc_n 上的单位面电流密度在(x_m, y_m)点所产生的散射场的负值(见图 16.39)。

如果 $m\neq n$，可将式(16.248)近似为：

$$l_{mn}\approx\frac{\beta\eta_0}{4}\Delta c_n H_0^{(2)}\{[\beta(x_n'-x_m)^2+(y_n'-y_m)^2]^{1/2}\},\quad m\neq n \tag{16.249}$$

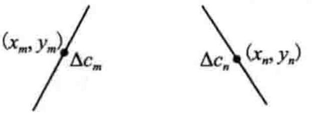


图 16.39　式(16.248)的解释

当 $m=n$ 时，在式(16.248)的被积函数中有一个奇点。利用 $H_0^{(2)}$ 的如下小宗量近似公式，可以计算出这个积分：

$$H_0^{(2)}(z)=1-\mathrm{j}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \tag{16.250}$$

其中$|z|\ll1$，而

$$\gamma=1.781 \tag{16.251}$$

叫做欧拉常数。

因此

$$l_{mn}=\frac{\beta\eta_0}{4}\int_{\Delta c_n}\left[1-\mathrm{j}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right)\right]\mathrm{d}l',\quad m=n \tag{16.252a}$$

式中

$$Z=\beta\{(x'-x_n)^2+(y'-y_n)^2\}^{1/2} \tag{16.252b}$$

计算得到[7]

$$l_{mn}=\frac{\eta_0}{4}\beta\Delta c_n\left[1-\mathrm{j}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma\beta\Delta c_n}{4\mathrm{e}}\right)\right] \tag{16.253a}$$

式中

$$\mathrm{e}=2.718 \tag{16.253b}$$

由于

$$g_m=\langle\omega_m,g\rangle=\int\delta(\bar{\rho}-\rho_m)E_z^{\mathrm{i}}=E_z^{\mathrm{i}}(\bar{\rho}_m) \tag{16.254}$$

解方程式(16.245)，得到 α_n，因此已经用数值方法求出了 K_z。应用数值方法计算式(16.239)，可以很容易得到散射场：

$$\begin{aligned}I&=\int_C\widetilde{K}_z(\bar{\rho}')H_0^{(2)}[\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|]\mathrm{d}l'\\&=\int_C\sum\alpha_m f_m H_0^{(2)}[\beta|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|]\mathrm{d}l'\\&=\int_{\Delta c_1}()\mathrm{d}l'+\int_{\Delta c_2}()\mathrm{d}l'+\cdots+\int_{\Delta c_N}()\mathrm{d}l'\\&=\int_{\Delta c_1}\alpha_1 H_0^{(2)}(\cdot)\mathrm{d}l'+\int_{\Delta c_2}\alpha_2 H_0^{(2)}(\cdot)\mathrm{d}l'+\cdots+\int_{\Delta c_N}\alpha_N H_0^{(2)}(\cdot)\mathrm{d}l'\end{aligned}$$

对于轴线上的场，(・)可以看做常数：

$$(\cdot)=\beta[(x_m-x)^2+y_m^2]^{1/2}$$

$$I=\sum_{m=1}^{N}\Delta c_m\alpha_m H_0^{(2)}\{\beta[(x_m-x)^2+y_m^2]^{1/2}\}$$

因此，

$$E_z^{sc}(x)=-\frac{\beta\eta_0}{4}\sum_{m=1}^{N}\Delta c_m\alpha_m H_0^{(2)}\{\beta[(x_m-x)^2+y_m^2]^{1/2}\} \tag{16.255}$$

如图 16.40 所示，将圆周分为 4 条线段来说明这一算法。

这 4 条线段的中心的坐标分别为

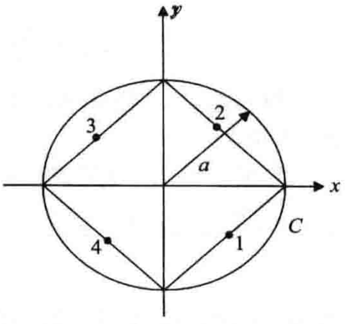


图 16.40 用 4 条线段来近似半径为 a 的圆

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$$

$$(x_2,y_2)=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

$$(x_3,y_3)=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

$$(x_4,y_4)=\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right),$$

$$g_m=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x_m}$$

$$g_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a/2},\quad g_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a/2},\quad g_3=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta a/2},\quad g_4=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta a/2}$$

$$\Delta c_n=\sqrt{2}a,\quad n=1,2,3,4$$

$$l_{mn}=\frac{\eta_0}{4}\beta\sqrt{2}a\left[1-\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma\beta\sqrt{2}a}{4\mathrm{e}}\right)\right],\quad n=1,2,3,4$$

$$l_{mn}=\frac{\eta_0}{4}\beta\sqrt{2}aH_0^{(2)}\{[\beta(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2]^{1/2}\},\quad m\neq n$$

利用

$$[l_{mn}][\alpha_n]=[g_m]$$

现在就可以求出 α_1、α_2、α_3 和 α_4。

在 x 轴上，散射场为

$$E_z^{sc}(x)\big|_{y=0}=-\frac{\beta\eta_0}{4}\left[\sum_{m=1}^{4}\alpha_m\Delta c_m H_0^{(2)}\{\beta[(x_m-x)^2+y_m^2]^{1/2}\}\right]$$

习题 16.15 要求画出 $|(E_z^{i}(x)+E_z^{sc}(x))/E_z^{i}|$ 随 x 变化的曲线。在区间 $-20<\beta x<60$ 内，取 $a=1$，$\beta=3.1$。在(a)部分中，选取 $N=4$，在(b)部分中选取 $N=72$。

参考文献

1. Young, D., Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type, *Trans. Am. Math. Soc.*, 76, 92–111, 1954.
2. Frankel, S. P., Convergence rates of iterative treatments, *Math. Tables Other Aids Comput.*, 4, 65–75, 1950.
3. Kalluri, D., *Potential gradients near rounded corners*, M.S. Thesis, University of Wisconsin, 1959.
4. Pelosi, G., Selleri, S., and Coccioli, R., *Quick Finite Element Method for Electromagnetic Waves*, Artech House, Norwood, MA, 1998.
5. Volakis, J. L., Chafterjee, A. and Kempel, L., *Finite Element Method for Electromagnetics*, Wiley-Interscience, New York, NY, 1998.
6. Jin, J. M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 2002.
7. Harrington, R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan., New York, NY, 1968.
8. R. W. P. King and Wu, T. T., *The Scattering and Diffraction of Waves*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1959.

第17章

有限元方法的高级专题[⊖]

17.1 基于节点和棱边的有限元方法

我们考虑一个脊形波导的例子。A 点在内角为 90°的导体角的顶点上。波导中的任意一个场点都可以应用圆柱坐标系来描述，如图 17.1 所示。

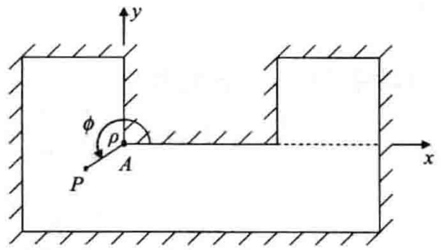


图 17.1 一个尖锐的导体角

在一个点如 A 点的邻近区域内，可以证明纵向分量 E_z 和 H_z 随 $\rho^{1/3}$ 变化，而横向分量 E_ρ、E_ϕ、H_ρ 和 H_ϕ 在 A 点有奇异性(参见附录 17A)，且随 $\rho^{-2/3}$ 变化。如果点 A 在某一条棱边上，在 A 点处 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的横向分量将变为无穷大。如果用标量形状函数对纵向分量进行展开，并用矢量形状函数展开横向分量，伪模问题和奇异性问题就可以得到避免。对于矢量问题来说，有限元方法的出发点是微分方程式(16.139)及其相应的泛函(式(16.140))。

对于波导问题，假设

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z)=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}=[\boldsymbol{E}_t(x,y)+\hat{z}E_z]\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{17.1}$$

三维(3D)算子∇^2可以表示为

$$\nabla=\nabla_t-\gamma\hat{z} \tag{17.2}$$

式中，∇_t是横向算子，如下式所示

$$\nabla_t=\left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{17.3}$$

那么

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=[\nabla_t-\gamma\hat{z}\times[\boldsymbol{E}_t+\hat{z}E_z]\mathrm{e}^{-\gamma z}=[\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t-\gamma\hat{z}\times\boldsymbol{E}_t+\nabla_t\times\hat{z}E_z]\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{17.4}$$

注意

$$\nabla_t\times\hat{z}E_z=\nabla_t E_z\times\hat{z}+E_z\nabla_t\times\hat{z}=\nabla_t E_z\times\hat{z} \tag{17.5}$$

由于$\nabla_t\times\hat{z}=[\hat{x}(\partial/\partial x)+\hat{y}(\partial/\partial y)]\times 1\,\hat{z}$，$\partial(1)/\partial x=0$，且 $\partial(1)/\partial y=0$

因此，有

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=[\underbrace{\nabla_t\times\boldsymbol{E}}_{\text{第一项}}+\underbrace{(\nabla_t E_z+\gamma\boldsymbol{E}_t)}_{\text{第二项}}\times\hat{z}]\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{17.6}$$

注意，第一项仅有 z 分量，第二项位于横截面上。因此，对于一个无损耗系统，可以写出

$$|\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}|^2=|\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t|^2+|\nabla_t E_z+\gamma\boldsymbol{E}_t|^2$$

或者可以写出另一种形式

$$|\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}|^2=(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)\cdot(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)^*+(\nabla_t E_z+\gamma\boldsymbol{E}_t)\cdot(\nabla_t E_z+\gamma\boldsymbol{E}_t)^* \tag{17.7}$$

将式(17.7)代入式(16.140)中，得到

⊖ 第 17 章的附录参见附录 17A。

$$I(\widetilde{\boldsymbol{E}}) = \frac{1}{2}\iint\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)\cdot(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)^* - k_0^2\varepsilon_r\,\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}^* + \frac{1}{\mu_r}(\nabla_t E_z+\gamma\boldsymbol{E}_t)\cdot(\nabla_t\boldsymbol{E}_z+\gamma\boldsymbol{E}_t)^*\right]\mathrm{d}S \tag{17.8}$$

将泛函(式(17.8))离散并使其最小化，将得到一个形式为特征值问题的方程[1]。如果γ是给定的，可以计算出特征值$\lambda=k_0^2$。不过，通常我们希望反过来计算，即已知工作频率，相当于在给定k_0^2条件下，希望求出传播常数。截止频率等于使$\gamma=0$的频率，在截止频率处γ从α变为$\mathrm{j}\beta$。

应用如下变换

$$\boldsymbol{e}_t = \gamma\boldsymbol{E}_t$$

和

$$e_z = E_z$$

可以将式(17.8)转化为

$$\gamma^2 I(e) = \frac{1}{2}\iint\left\{\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t\times\bar{e}_t)\cdot(\nabla_t\times e_t)^* - k_0^2\varepsilon_r e_t\cdot\boldsymbol{e}_t^* + \gamma^2\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t e_z+\boldsymbol{e}_t)\cdot(\nabla_t e_z+\boldsymbol{e}_t)^* - k_0^2\varepsilon_r e_z e_t^*\right]\right\}\mathrm{d}S \tag{17.9}$$

对每一个单元采用如下展开形式，就可以将式(17.9)进行离散化

$$\boldsymbol{e}_t^{(e)} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_{\tan i}^{(e)} \tag{17.10}$$

$$e_z^{(e)} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_{zi}^{(e)} \tag{17.11}$$

将上面两式代入式(17.9)中，对每个单元来说，等式右端的泛函可以写为如下形式

$$\frac{1}{2}\iint_{\Delta^{(e)}}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t\times\boldsymbol{e}_t)\cdot(\nabla_t\times\boldsymbol{e}_t)^* - k_0^2\varepsilon_r^{(e)}\boldsymbol{e}_t\cdot e_t^*\right]\mathrm{d}S = [e_{\tan}^{(e)}]^{\mathrm{T}}[A_{tt}^{(e)}][e_{\tan}^{(e)}]^* \tag{17.12}$$

式中

$$[A_{tt}^{(e)}] = \iint_{\Delta^{(e)}}\left\{\frac{1}{\mu_r^{(e)}}[\nabla_t\times\alpha_i^{(e)}]\cdot[\nabla_t\times\alpha_j^{(e)}]^{\mathrm{T}} - k_0^2\varepsilon_r^{(e)}\alpha_i^{(e)}\cdot(\alpha_j^{(e)})^{\mathrm{T}}\right\}\mathrm{d}S = \frac{1}{\mu_r^{(e)}}[E^{(e)}] - k_0^2\varepsilon_r^{(e)}[F^{(e)}] \tag{17.13}$$

式(17.9)右端第二项需要更加仔细地处理。注意

$$(\nabla_t e_z\times e_t)\cdot(\nabla_t e_z\times e_t)^* = e_t\cdot e_t^* + e_t^*\cdot(\nabla_t e_z) + (\nabla_t e_z)^*\cdot e_t + (\nabla_t e_z)\cdot(\nabla_t e_z)^* \tag{17.14}$$

因此，

$$\frac{1}{2}\gamma^2\iint_{\Delta^{(e)}}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t e_z\times e_t)\cdot(\nabla_t e_z\times e_t)^* - k_0^2\varepsilon_r\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z^*\right]\mathrm{d}S$$

可以写为

$$\gamma^2\begin{Bmatrix}\mathrm{e}_{\tan}^{(e)}\\ \mathrm{e}_z^{(e)}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}[B_{tt}^{(e)}]\\ [B_{zt}^{(e)}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{zt}^{(e)}\\ B_{zz}^{(e)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\tan}^{(e)}\\ e_z^{(e)}\end{bmatrix}^* \tag{17.15}$$

式中

$$B_{tt}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}}\left[\frac{1}{\mu_r^{(e)}}\{\alpha_i^{(e)}\}\cdot\{\alpha_j^{(e)}\}^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}S = \frac{1}{\mu_r^{(e)}}F^{(e)} \tag{17.16}$$

$$B_{tz}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}}\left[\frac{1}{\mu_r^{(e)}}\{\alpha_i^{(e)}\}\cdot\{\nabla_t\alpha_j^{(e)}\}\right]\mathrm{d}S \tag{17.17}$$

$$B_{zt}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}}\left[\frac{1}{\mu_r^{(e)}}\{\nabla_t\alpha_i^{(e)}\}\cdot\{\alpha_j^{(e)}\}\right]\mathrm{d}S \tag{17.18}$$

$$B_{zz}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \left[\frac{1}{\mu_r^{(e)}} \{\nabla_t \alpha_i^{(e)}\} \cdot \{\nabla_t \alpha_j^{(e)}\}^T - k_0^2 \varepsilon_r^{(e)} \{\alpha_i^{(e)}\}\{\alpha_j^{(e)}\}^T \right] dS$$
$$= \frac{1}{\mu_r^{(e)}} [S^{(e)}] - k_0^2 \varepsilon_r^{(e)} [T^{(e)}] \tag{17.19}$$

由式(17.13)给出的 $A_{tt}^{(e)}$ 矩阵元素很容易计算出来，因为$[E^{(e)}]$与$[F^{(e)}]$分别由式(16.165)和式(16.167)给出。同样地，由式(17.19)给出的 $B_{zz}^{(e)}$ 矩阵元素也很容易计算，因为$[S^{(e)}]$与$[T^{(e)}]$分别由式(16.52)和式(16.103)给出。可以证明，有

$$[B_{tz}^{(e)}] = [B_{zt}^{(e)}]^T = \frac{1}{\mu_r^{(e)}} [H_{tz}^{(e)}] \tag{17.20}$$

式中

$$H_{11}^{(e)} = -K_1 [b_1(b_1 - b_2) + c_1(c_1 - c_2)] \tag{17.21a}$$
$$H_{12}^{(e)} = K_1 [b_2(b_2 - b_1) + c_2(c_2 - c_1)] \tag{17.21b}$$
$$H_{13}^{(e)} = -K_1 [-y_1 b_2 - y_2 b_1 - y_3 b_3 + x_1 c_2 + x_2 c_1 + x_3 c_3] \tag{17.21c}$$
$$H_{21}^{(e)} = -K_2 [-y_1 b_1 - y_2 b_3 - y_3 b_2 + x_1 c_1 + x_2 c_3 + x_3 c_2] \tag{17.21d}$$
$$H_{22}^{(e)} = -K_2 [b_2(b_2 - b_3) + c_2(c_2 - c_3)] \tag{17.21e}$$
$$H_{23}^{(e)} = K_2 [b_3(b_3 - b_2) + c_3(c_3 - c_2)] \tag{17.21f}$$
$$H_{31}^{(e)} = K_3 [b_1(b_1 - b_3) + c_1(c_1 - c_3)] \tag{17.21g}$$
$$H_{32}^{(e)} = -K_3 [-y_1 b_3 - y_2 b_2 - y_3 b_1 + x_1 c_3 + x_2 c_2 + x_3 c_1] \tag{17.21h}$$
$$H_{33}^{(e)} = -K_3 [b_3(b_3 - b_1) + c_3(c_3 - c_1)] \tag{17.21i}$$

且

$$K_j = \frac{l_j}{12A} \tag{17.22}$$

在对所有单元进行总体合成后，方程组可以写为[1]

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\tan\#} \\ e_z \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt} & B_{tz} \\ (B_{tz})^T & B_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\tan\#} \\ e_z \end{bmatrix} \tag{17.23}$$

式(17.23)中的第二个方程是

$$[B_{tz}]^T [e_{\tan\#}] + [B_{zz}][e_z] = 0$$
$$[e_z] = -[B_{zz}]^{-1} [B_{tz}]^T [e_{\tan\#}] \tag{17.24}$$

式(17.23)中的第一个方程是

$$[A_{tt}][e_{\tan\#}] = \gamma^2 \{[B_{tt}][e_{\tan\#}] + [B_{tt}][e_z]\}$$

代入$[e_z]$，以及根据式(17.24)，可以将上式表示成如下的特征值问题

$$[C][e_{\tan\#}] = \gamma^2 [e_{\tan\#}] \tag{17.25}$$

式中

$$[C] = \{[B_{tt}] - [B_{tz}][B_{zz}]^{-1}[B_{tz}]^T\}^{-1} [A_{tt}]$$

在结束这一节之前，我们要说明的是式(17.21a)～式(17.21i)是通过使用式(17.18)得到的。这里只说明 $H^{(e)}$ 的两个元素：

$$H_{11}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_1^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_1^{(e)} dS$$

前面已经证明过，

$$\nabla_t \alpha_1^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} [b_1 \hat{x} + c_1 \hat{y}]$$

$$\alpha_1^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{2A^{(e)}} [\hat{x}(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1) + \hat{y}(\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1)]$$

$$\alpha_1^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_1^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{4[A^{(e)}]^2} [b_1(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1) + c_1(\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1)]$$

$$= \frac{l_1^{(e)}}{4(A^{(e)})^2}[\alpha_1(b_1b_2 + c_1c_2) + \alpha_2(-b_1^2 - c_1^2)]$$

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A^{(e)}}{3}$$

$$H_{11}^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{12(A^{(e)})^2}[b_1b_2 + c_1c_2 - b_1^2 - c_1^2] = -K_1[b_1(b_1 - b_2) + c_1(c_1 - c_2)]$$

$$H_{11}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_1^{(e)} \cdot \nabla\alpha_2^{(e)} \mathrm{d}S$$

$$\alpha_1^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{2A^{(e)}}[\hat{x}(\alpha_1b_2 - \alpha_2b_1) + \hat{y}(\alpha_1c_2 - \alpha_2c_1)]$$

$$\alpha_1^{(e)} \cdot \nabla\alpha_2^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{4(A^{(e)})^2}[b_2(\alpha_1b_2 - \alpha_2b_1) + c_2(\alpha_1c_2 - \alpha_2c_1)]$$

$$= \frac{l_1^{(e)}}{4(A^{(e)})^2}[\alpha_1(b_2^2 + c_2^2) + \alpha_2(-b_1b_2 - c_1c_2)]$$

$$H_{12}^{(e)} = \frac{l_1^{(e)}}{12(A^{(e)})}[b_2(b_2 - b_1) + c_2(c_2 - c_1)] = K_1[b_2(b_2 - b_1) + c_2(c_2 - c_1)]$$

17.2 弱形式和加权余量法

15.3.2 节已经讨论过加权余量法(Weighted Residual Method, WRM)。让我们通过求解一维亥姆霍兹方程来重新回顾这种方法，一维亥姆霍兹方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} + k^2V = f(z) \tag{17.26}$$

在加权余量方法中，定义余量函数 $R(z)$ 为

$$R(z) = \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} + k^2V - f(z) \tag{17.27}$$

将问题的求解域 Ω 划分为多个子域 $\Delta\Omega_m$，$m=1, 2, \cdots, N$，对每一个子域定义一个权函数 W_m，在每一个子域内强制加权后的余量是零：

$$\int_{\Delta\Omega_m} W_m(z)R(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{17.28}$$

将式(17.27)代入式(17.28)中，可以得到

$$\int_{\Delta\Omega_m} W_m(z)\left[\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} + k^2V - f(z)\right]\mathrm{d}z = 0 \tag{17.29}$$

在 15.3.2 节中，如果选择权函数 $W_m(z)=\delta(z-z_m)$，我们称这种方法为点匹配法，如果选择权函数 $W_m(z)$ 与基函数相同，就称这种方法为伽辽金方法。

17.2.1 微分方程的弱形式

利用分部积分方法，可以得到如下方程

$$\int W_m(z)\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = W_m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} - \int\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \tag{17.30}$$

将式(17.29)代入式(17.30)中，可得

$$\int_{\Delta\Omega_m}\left[W_m(z)k^2V - W_mf - \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right]\mathrm{d}z - W_m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\bigg|_{\text{边界点}} = 0 \tag{17.31}$$

方程式(17.31)称为微分方程的弱形式[1~3]，因为它是在平均意义下强制微分方程(由于积分的缘故)成立，而不是在每一个点都使微分方程成立。

17.2.2 加权余量法的伽辽金公式：均匀波导问题

在 14.4 节中，在给定边界条件下，利用有限元法求解了均匀波导问题中的位函数 Φ。

均匀波导问题的方程为

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \tag{17.32}$$

主要步骤就是使泛函取极值。对于含有有损耗和复杂材料的实际问题，推导出合适的泛函通常是很困难的。加权余量法中的伽辽金公式是一种更灵活的工具，它不需要推导所求解问题的泛函[2]。

我们在闭合曲线 C 所限定的二维区域 S 上用公式来表达这个问题。假定曲线 C 由 C_N 和 C_D 两段组成，在 C_N 上给定诺伊曼边界条件 $\partial\Phi/\partial n=0$，在 C_D 上给定狄利赫里边界条件 $\Phi=\Phi_0$（如图 17.2 所示）。

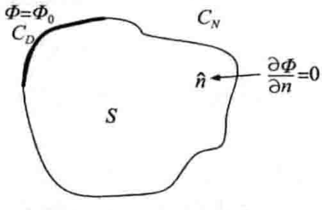


图 17.2　由闭合曲线 C 构成二维边界中的亥姆霍兹方程

令 W、W_D 和 W_N 分别为定义在 S、C_D 与 C_N 上的权函数。此时，可以写出

$$\iint_S W(\nabla_t^2\Phi + k_t^2\Phi)\mathrm{d}S + \int_{C_D} W_D(\Phi - \Phi_0)\mathrm{d}l + \int_{C_N} W_D(\nabla_t\Phi \cdot n)\mathrm{d}l = 0 \tag{17.33}$$

等式左端的最后两项都是零，因为在 C_D 上 $\Phi=\Phi_0$，在 C_N 上 $\partial\Phi/\partial n=0$。

注意，$\nabla_t\Phi \cdot n$ 是 Φ 沿 n 方向的方向导数，等于 $\partial\Phi/\partial n$。

对于一个曲面，格林第一定理（附录 16C. 5）为

$$\iint_S W\,\nabla_t^2\Phi\mathrm{d}S = \oint_C W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c - \iint_S \nabla_t W\cdot\nabla_t\Phi\mathrm{d}S \tag{17.34}$$

由式(17. 33)和式(17. 44)，得到

$$\iint_S \nabla_t W\cdot\nabla_t\Phi\mathrm{d}S - \iint_S k_t^2 W\Phi\mathrm{d}S - \oint_C W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c - \int_{C_D} W_D(\Phi-\Phi_0)\mathrm{d}l - \int_{C_N} W_N\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}l = 0 \tag{17.35}$$

可以将式(17. 35)化简为式(17. 36)

$$\iint_S \nabla_t W\cdot\nabla_t\Phi\mathrm{d}S - \iint_S k_t^2 W\Phi\mathrm{d}S = 0 \tag{17.36}$$

通过选择下列权函数：

1) 在 C_D 上选择权函数为 $\Phi=\Phi_0$。无论 W_D 取什么值，式(17. 35)左端的第四项都为零。

2) 式(17. 35)左端的第三项是

$$-\int_C W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c = -\left(\int_{C_D} W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c + \int_{C_N} W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c\right) \tag{17.37}$$

在 C_D 上选择权函数 $W=0$，则式(17. 37)变为

$$-\int_C W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c = -\int_{C_N} W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c \tag{17.38}$$

3) 式(17. 35)中的三个线积分之和为

$$-\int_{C_N} W\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c - \int_{C_N} W_N\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}c$$

如果选择在 C_N 上的权函数为 $W_N=-W$，则可使上式为零。

在 C_D 上，第一种选择 $\Phi=\Phi_0$ 事实上就是边界条件。

式(17. 36)是式(16. 96)的弱形式，它是基于泛函的变分公式的另一种形式。在加权余量法中，应用有限元法的步骤[2]如下：

步骤 1) 将 S 划分为多个不重叠的单元。

步骤 2) 根据选择 1)，对每个单元上的未知函数进行近似。

步骤3）根据选择2)和3)，在每个单元上定义权函数。求出每个单元中的余量。

步骤4）对所有单元的贡献求和得到在整个区域上的余量。

步骤5）求解所形成的广义特征值问题，以便消去余量。

在步骤2)中，可以表示

$$\Phi^{(e)}(x,y)=\sum_j \Phi_j^{(e)}\alpha_j^{(e)}(x,y) \tag{17.39}$$

其中 $\alpha_j^{(e)}$ 是形状基函数。

在步骤3)中，如果选择形状函数作为权函数(伽辽金公式)，那么式(17.36)将变为

$$\iint_{\Delta^{(e)}}\nabla_t\alpha_j^{(e)}\cdot\nabla_t\Phi^{(e)}\mathrm{d}S-\iint_{\Delta^{(e)}}k_t^2\alpha_j^{(e)}\Phi^{(e)}\mathrm{d}S=R_i^{(e)},\quad i=1,2,3\cdots \tag{17.40}$$

将式(17.39)代入式(17.40)中，使它转变为

$$[S^{(e)}][\Phi^{(e)}]-k_t^2[T^{(e)}][\Phi^{(e)}]=[R_i^{(e)}] \tag{17.41}$$

式中，$[S^{(e)}]$与$[T^{(e)}]$分别由式(16.125)和式(16.132)给出。$[R_i^{(e)}]$近似为零。

这些公式与用变分方法得到的结果是完全相同的。注意，如果单元(e)的顶点 j 位于 C_D 上，那么$[\Phi_t^{(e)}]$就等于给定的 Φ_0，且在 C_D 上 $W=0$。一旦得到特征值 k_t^2，就很容易计算出 β 和 α，因为

$$(\beta-\mathrm{j}\alpha)^2=k_z^2=k^2-k_t^2$$

对于有损耗媒质，$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，其中 μ 和 ε 可能是复数。对于有损煤质来说，很难得到一个准确的泛函，但是加权余量法克服了这个困难。

17.3 非均匀波导问题[2]

式(16.139)是非均匀波导中电场的矢量微分方程。如果电介质是有损耗的，相对介电常数是复数：

$$\widehat{\varepsilon}_r=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon+\frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega}\right) \tag{17.42}$$

以及电场方程为

$$\widetilde{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}\right)=k_0^2\ \widehat{\varepsilon}_r\ \widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{17.43}$$

为了求解这个波导问题，我们像以前一样假设

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z)=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}=[\boldsymbol{E}(x,y)+E_z(x,y)\hat{z}]\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{17.44}$$

将式(17.44)代入式(17.43)中，可以将式(17.43)分离为如下两个方程：

$$\widetilde{\nabla}_t\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_t\right)-\frac{\gamma}{\mu_r}(\nabla_t E_z+\gamma\widetilde{\boldsymbol{E}}_t)=k_0^2\ \widehat{\varepsilon}_r\ \widetilde{E}_t \tag{17.45}$$

$$\widetilde{\nabla}_t\times\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t E_z+\gamma\widetilde{E}_t)\times\hat{z}\right]=\hat{z}k_0^2\ \widehat{\varepsilon}_r E_z \tag{17.46}$$

式(17.45)中同时包含 γ 和 γ^2。

采用如下变换，可以方便地将式(17.45)和式(17.46)写成更简单的形式

$$\boldsymbol{e}_t=\gamma\boldsymbol{E}_t \tag{17.47}$$

$$e_z=E_z \tag{17.48}$$

其结果是

$$\nabla_t\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times\boldsymbol{e}_t\right)-\frac{\gamma^2}{\mu_r}(\nabla_t e_z+\boldsymbol{e}_t)=k_0^2\hat{\varepsilon}_r\boldsymbol{e}_t \tag{17.49}$$

$$\gamma^2\ \nabla_t\times\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t e_z+e_t)\times\hat{z}\right]=\gamma^2\hat{z}k_0^2\hat{\varepsilon}_r e_z \tag{17.50}$$

在理想导体壁上，边界条件是

$$\hat{n} \times \boldsymbol{e}_t = 0 \tag{17.51}$$

$$e_z = 0 \tag{17.52}$$

式中，$\hat{n}$是垂直于理想导体壁的单位矢量。

用棱边单元(矢量单元)近似 $e_t^{(e)}(x, y)$是有用的：

$$e_t^{(e)}(x,y) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e_{\tan j}^{(e)} \tag{17.53}$$

我们将用节点和标量形状函数来近似 $e_z^{(e)}(x, y)$：

$$e_z^{(e)}(x,y) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e_{zj}^{(e)} \tag{17.54}$$

使用伽辽金公式中的加权余量法，由式(17.49)和式(17.50)可以得到式(17.25)，求解式(17.25)给出传播常数 $\gamma=\alpha+j\beta$。

非均匀波导问题的例子

如图 17.3 所示，在一个由理想导体壁构成的正方形波导中，两个单元内的电介质不同。若给定 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=5$，试求 γ。

18C.4 节中的函数程序 INHWGD 实现了式(17.25)的算法。

我们鼓励学生基于图 17.4 中给出的局部和总体节点及棱边编号，写出主程序。γ 的期望答案是 0+j6.5192。主程序见附录 16A.6(参见图 17.4)。

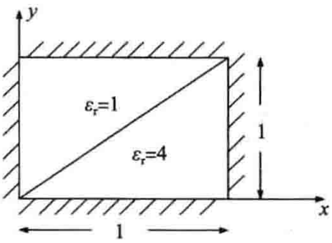


图 17.3 填充非均匀媒质的正方形波导的横截面。一个说明算法式(17.25)应用的简单例子

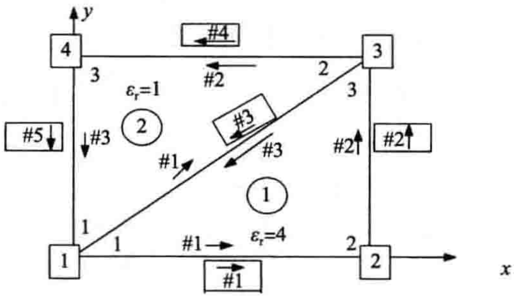


图 17.4 加载波导的两个单元的总体和局部节点以及棱边

第 18 章给出了使用大量单元的例子。

17.4 开放边界、吸收边界、条件和散射问题[1~3]

到目前为止，我们已经在狄利赫里或诺依曼边界条件下，讨论了拉普拉斯方程、泊松方程和亥姆霍兹方程的求解。更一般的边界条件称为位函数的混合边界条件，在一维情况中，它的一般形式是

$$\left(\alpha_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} + \gamma\Phi\right)_{z=L} = q \tag{17.55}$$

式中，α、γ 和 q 都是已知参数。如果 $\gamma=0$，那么式(17.55)化为诺依曼边界条件，如果 $\alpha_1=0$，则化为狄利赫里边界条件；式(17.55)给出的边界条件也称为第三类边界条件。而且，上面提到的方程(拉普拉斯方程、泊松方程及亥姆霍兹方程)的一般形式也可以统一写成一个方程。对于一维情况(称为斯特姆-刘维尔方程)，可以统一写为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right) + \beta\Phi = f(z), \quad 0 < z < L \tag{17.56}$$

$\Phi(0)$和 $\Phi(L)$是确定的第一类(狄利赫里)、第二类(诺依曼)或第三类(混合)边界条件。

式(17.56)将变为一维泊松方程，如果

$$\alpha = 1, \beta = 0, \text{且 } f(z) = \frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

$$-\frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{17.57}$$

式(17.56)将变为一维齐次亥姆霍兹方程(适用于传输线)，如果

$$\alpha = 1, \beta(z) = -k^2, \text{且 } f(z) = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + k^2\Phi = 0 \tag{17.58}$$

现在，让我们来推导方程式(17.56)的有限元解，在 $z=L$ 处给定边界条件(式(17.55))，在 $z=0$ 处为狄利赫里边界条件，

$$\Phi = p, \quad z = 0 \tag{17.59}$$

方程式(17.56)的泛函为

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\alpha\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2 + \beta\Phi^2\right]dz - \int_0^L f\Phi\,dz + \left[\frac{\gamma}{2}\Phi^2 - q\Phi\right]_{z=L} \tag{17.60}$$

请注意式(17.60)右端的最后一项。它仅由 $z=L$ 处的混合边界条件所产生。

利用式(15.92)和式(15.93)，可实现基于变分公式的有限元方法的离散：

$$N_i = \frac{z_j - z}{z_j - z_i}; \quad N_j = \frac{z - z_i}{z_j - z_i}$$

$$\Phi^{(e)}(z) = N_i(z)\Phi_i^{(e)} + N_j(z)\Phi_j^{(e)}$$

于是，$I^{(e)}$ 中的积分项是

$$I^{(e)}(\Phi^{(e)}) = \frac{1}{2}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}} \left[\alpha^{(e)}\left(\frac{d\Phi^{(e)}}{dz}\right)^2 + \beta^{(e)}[\Phi^{(e)}]^2\right]dz - \int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}} f^{(e)}\Phi^{(e)}\,dz \tag{17.61}$$

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \Phi_i^{(e)}} = \sum_{j=1}^{2}\Phi_j^{(e)}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}\left[\alpha^{(e)}\left(\frac{dN_i^{(e)}}{dz}\frac{dN_j^{(e)}}{dz}\right) + \beta^{(e)}N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]dz - \int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}} N_i^{(e)}f^{(e)}\,dz \tag{17.62}$$

将式(17.62)写为如下矩阵形式

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \Phi_i^{(e)}} = [K^{(e)}]\{\Phi^{(e)}\} - \{b^{(e)}\} \tag{17.63}$$

式中

$$\{\Phi^{(e)}\} = \begin{pmatrix}\Phi_i^{(e)} \\ \Phi_j^{(e)}\end{pmatrix} \tag{17.64}$$

且

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}\left[\underbrace{\alpha^{(e)}\left(\frac{dN_i^{(e)}}{dz}\frac{dN_j^{(e)}}{dz}\right)}_{\text{第一项}} + \underbrace{\beta^{(e)}N_i^{(e)}N_j^{(e)}}_{\text{第二项}}\right]dz$$

$$b_{ij}^{(e)} = \int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}} \underbrace{N_i^{(e)}f^{(e)}}_{\text{第三项}}\,dz$$

计算第一项、第二项和第三项。

$$\frac{dN_i^{(e)}}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z_j - z}{z_j - z_i}\right] = -\frac{1}{l^{(e)}}$$

式中

$$l^{(e)} = z_j - z_i$$

$$\frac{dN_j^{(e)}}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z - z_i}{z_j - z_i}\right] = \frac{1}{l^{(e)}}$$

因此，得到

$$S_{11}^{(e)}=\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right)\left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right)l^{(e)}=\frac{1}{l^{(e)}}$$

$$S_{12}^{(e)}=\left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right)\left(\frac{1}{l^{(e)}}\right)l^{(e)}=-\frac{1}{l^{(e)}}$$

第一项给出了我们在一维情况中已经熟悉的 S 矩阵

$$[S^{(e)}]_{1D}=\begin{bmatrix}\frac{1}{l^{(e)}} & -\frac{1}{l^{(e)}}\\ -\frac{1}{l^{(e)}} & \frac{1}{l^{(e)}}\end{bmatrix}\tag{17.65}$$

很明显，第二项给出了我们在一维情况中所熟悉的 T 矩阵：

$$T_{11}^{(e)}=\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}[N_i^{(e)}]^2\mathrm{d}z=\frac{1}{[l^{(e)}]^2}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}(z_j-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{[l^{(e)}]^2}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}(z_i^2+z^2-2z_jz)\mathrm{d}z$$

或者

$$\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}(z_j-z)^2\mathrm{d}z=\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}-(z_j-z)^2\mathrm{d}(z_j-z)=-\frac{(z_j-z)^3}{3}\bigg|_{z_i}^{z_j}=\frac{(z_j-z_i)^3}{3}=\frac{[l^{(e)}]^3}{3}$$

因此，有

$$T_{11}^{(e)}=\frac{l^{(e)}}{3}$$

类似地，可以证明 $T_{12}^{(e)}=l^{(e)}/6$。

因此，可以得到

$$[T^{(e)}]_{1D}=\begin{bmatrix}\frac{l^{(e)}}{3} & \frac{l^{(e)}}{6}\\ \frac{l^{(e)}}{6} & \frac{l^{(e)}}{3}\end{bmatrix}\tag{17.66}$$

现在，K 矩阵是$[S^{(e)}]_{1D}$和$[T^{(e)}]_{1D}$的线性组合，

$$[K^{(e)}]=\alpha^{(e)}[S^{(e)}]_{1D}+\beta^{(e)}[T^{(e)}]_{1D}\tag{17.67}$$

$$[K^{(e)}]_{1D}=\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}}+\frac{\beta^{(e)}l^{(e)}}{3} & -\frac{\alpha^{(e)}}{l^{(e)}}+\frac{\beta^{(e)}l^{(e)}}{3}\\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)}\end{bmatrix}$$

式中

$$K_{21}^{(e)}=K_{12}^{(e)},\quad K_{22}^{(e)}=K_{11}^{(e)}$$

因为

$$\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}N_i^{(e)}\mathrm{d}z=\frac{1}{l^{(e)}}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}(z_j-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{l^{(e)}}\int_{z_i^{(e)}}^{z_j^{(e)}}-(z_j-z)\mathrm{d}(z_j-z)=\frac{-(z_j-z_i)^2}{2l^{(e)}}$$

$$b_i^{(e)}=f^{(e)}\left[\frac{-(z_j-z)^2}{2l^{(e)}}\right]\bigg|_{z_i}^{z_j}=\frac{f^{(e)}l^{(e)}}{2}$$

当进行总体合成时，可以得到

$$[K][\Phi]=\{b\}\tag{17.68}$$

如果我们需要处理第一类和第二类边界条件，式(17.68)就足够了。第一类边界条件给出的是一个指定节点，第二类边界条件是一个自由节点。

17.4.1 第三类边界条件

现在讨论如何将第三类边界条件结合在有限元公式中。式(17.60)的泛函有额外的一项[1]

$$I_{额外项} = \left[\frac{\gamma}{2}\Phi^2 - q\Phi\right]_{x=L} \tag{17.69}$$

将 $x=L=x_j^{(M)}$ 处的节点记为 N，其中(M)是终端节点为 N 的单元的编号：

$$I_{额外项} = \frac{\gamma}{2}\Phi_N^2 - q\Phi_N$$

$$\frac{\partial I_{额外项}}{\partial \Phi_N} = \gamma\Phi_N - q \tag{17.70}$$

由于式(17.70)中的额外一项，需要加上 γ 来修正 K_{NN}。在得到式(17.68)中的矩阵 K 后，利用 MATLAB 语句

$$K_{NN} = K_{NN} + \gamma \tag{17.71}$$

$$b_N = b_N + q \tag{17.72}$$

将会把混合边界条件结合在有限元公式中。

从一个函数程序求得 K 和 b 后，可在主程序中完成式(17.71)和式(17.72)的计算步骤。18C.5 节给出了函数程序 GLANL，它与函数程序 GLANT 的行数相同。输出给出了[$\boldsymbol{K}$]和[$\boldsymbol{b}$]矩阵。通过修正[$\boldsymbol{K}$]和[$\boldsymbol{b}$]矩阵，可以完成第三类边界条件的实现。下面通过一个已知准确答案的简单问题来加以说明。

一个简单例子

求解

$$-\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = 1, \quad \Phi(0) = 0, \quad \left[\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\Phi\right]_{x=1} = -1$$

首先写出该微分方程的一般解，很容易地得到解析解：

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = x + c_1$$

$$-\Phi = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

由 $\Phi(0)=0$，得到 $c_2=0$；由在 $x=1$ 处的混合边界条件，可以得到

$$-x - c_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} - c_1 x\right)\bigg|_{x=1} = -1$$

$$-1 - c_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - c_1\right) = -1$$

$$-\frac{5}{4} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)c_1 = -1$$

$$-\frac{3}{2}c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$所以\ \Phi = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1-3x)$$

为了说明有限元解，将区域划分为 4 个单元($N_e=4$)，于是就有 5 个总体节点($N_n=4$)(见图 17.5)。

这样，我们建立了表 17.1 和表 17.2。

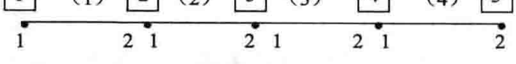


图 17.5 一维问题的 4 个单元和 5 个节点

将给定微分方程与一般形式相比较

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\alpha\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right] + \beta\Phi = f(z)$$

$$z = x, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad f(z) = 1$$

表 17.1 这个简单例子的全局坐标表和连接表

全局坐标		连接表单元#	n1L	n2L
$\boxed{n}$	x_n	(1)	1	2
1	0	(2)	2	3
2	0.25	(3)	3	4
3	0.50	(4)	4	5
4	0.75			
5	1.00			

表 17.2 这个简单例子中单元的 α、β、f

单元#	$\alpha^{(e)}$	$\beta^{(e)}$	$f^{(e)}$	单元#	$\alpha^{(e)}$	$\beta^{(e)}$	$f^{(e)}$
(1)	1	0	1	(3)	1	0	1
(2)	1	0	1	(4)	1	0	1

因此，得出单元参数(见表 17.2)。

在主程序中给出的这些数据可以传递到函数程序 GLANL 中，得到输出 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 矩阵。现在，我们不得不处理边界条件了。将满足狄利赫里条件的指定节点称为 Prn=[1]。

在 Prn 处的电位称为 V_{Prn}。自由节点 frn 为

$$f_{\mathrm{rn}} = [2,3,4,5]$$

在节点 5 处使用混合边界条件后，就可以求出自由节点的电位。

对于现在所考虑的问题，一般形式的混合边界条件

$$\alpha_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} + \gamma\Phi \Big|_{z=L} = q$$

可以翻译为

$$\alpha_1 = 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad q = -1, \quad L = 1$$

这个边界条件可以按如下方法来实现：

令满足混合边界条件的总体节点编号数组记为 mxn。在现在的问题中

$$\mathrm{mxn} = [5]$$

在 mxn 处的 α、γ 和 q 记为

$$\mathrm{al\ mxn} = [1]$$
$$\mathrm{ga\ mxn} = [0.5]$$
$$\mathrm{q\ mxn} = [-1]$$

将 $\boldsymbol{K}$ 矩阵中的元素修正为

$$\boldsymbol{K}(\mathrm{mxn},\mathrm{mxn}) = \boldsymbol{K}(\mathrm{mxn},\mathrm{mxn}) + g\ \mathrm{mxn}$$

将 $\boldsymbol{b}$ 数组元素修正为

$$\boldsymbol{b}(\mathrm{mxn}) = \boldsymbol{b}(\mathrm{mxn}) + \boldsymbol{q}\ \mathrm{mxn}$$

获得和求解系统方程的 MATLAB 语句是

```
Kff=K(frn,frn)
Kfp=K(frn,prn)
Vprn=[0]
bf=b(frn)
Vf=inv(Kff)+((bf)'—Kfp* (Vprn)')
```

这样，得到了各个自由节点的电位。我们鼓励学生自己写出主程序，并利用 18C.5 节给出的函数 GLANLN 来运行主程序。

17.4.2 具有混合边界条件的电磁问题的例子

例 17.1 反射问题

一维有限元方法的公式：从背衬理想导体的电介质的 p 波反射，我们就可以得到一个混合边值问题，这个边值问题可以用前面一节中给出的一维有限元方法的函数程序来求解(参见图 17.6)。

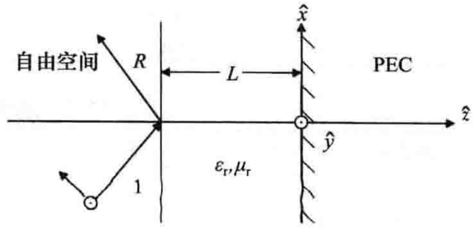


图 17.6 反射问题和第三类边界条件

入射波的磁场可以写为

$$\tilde{\tilde{H}}^I = \tilde{H}_y\,\hat{y} \tag{17.73}$$

式中

$$\tilde{H}_y = H_0 e^{-jk_0(Sx+Cz)}$$
$$S = \sin\theta$$
$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$
$$C = \cos\theta$$

令 ε_r 和 μ_r 是区域 $-L<z<0$ 中位置的函数。

由如下麦克斯韦方程，可以得到 $\tilde{H}_y$ 满足的微分方程

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r(z)\,\tilde{\boldsymbol{H}} \tag{17.74}$$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(z)\,\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{17.75}$$

在有损耗电介质中，$\varepsilon_r(z)$可以是复数。

根据式(17.74)和式(17.75)，有

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)}\overline{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right] = j\omega\varepsilon_0\times\tilde{\boldsymbol{E}} = j\omega\varepsilon_0(-j\omega\mu_0\mu_r(z))\,\tilde{\boldsymbol{H}} = \nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right] = k_0^2\mu_r\,\tilde{\boldsymbol{H}} \tag{17.76}$$

很明显，在区域 $-L<z<0$ 中，磁场具有如下形式

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \hat{y}\,e^{-jk_0Sx}H_y(z) \tag{17.77}$$

且

$$\overline{\nabla}\times\tilde{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -jk_0S & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & e^{-jk_0Sx}H_y & 0 \end{vmatrix} = -e^{-jk_0Sx}\frac{\partial H_y(z)}{\partial z}\hat{x} + (-jk_0S)e^{-jk_0Sx}H_y\,\hat{z}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla\times\tilde{H} = \underbrace{-e^{-jk_0Sx}\frac{1}{\varepsilon_r}}_{C_1}\left[\frac{\partial H_y}{\partial z}\hat{x} + jk_0SH_y\hat{z}\right]$$

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\overline{\nabla}\times\tilde{H}\right] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -jk_0S & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ C_1\dfrac{\partial H_y}{\partial z} & 0 & jk_0SC_1H_y \end{vmatrix} = (0-0)\,\hat{x} - (-jk_0Sjk_0SC_1H_y)\,\hat{y} + (0-0)\,\hat{z}$$

$$= -\left[k_0^2S^2C_1H_y - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_1\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right]\hat{y}$$

因而，式(17.76)变为

$$-\left[k_0^2S^2C_1H_y - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_1\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right]\hat{y} = k_0^2\mu_rH_ye^{-jk_0Sx}\hat{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-e^{-jk_0Sx}}{\varepsilon_r(z)}\frac{\partial H_y}{\partial z}\right] - k_0^2S^2\left[\frac{-e^{-jk_0Sx}}{\varepsilon_r(z)}\right]H_y - k_0^2\mu_rH_y = 0$$

消去 $e^{-jk_0 Sx}$，仅保留一个独立自变量 z，

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)}\frac{dH_y}{dz}\right]+k_0^2 S^2\left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)}\right]H_y-k_0^2\mu_r H_y=0$$

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)}\frac{dH_y}{dz}\right]-k_0^2\left[\mu_r-\frac{S^2}{\varepsilon_r(z)}\right]H_y=0$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)}\frac{dH_y}{dz}\right]+k_0^2\left[\mu_r-\frac{S^2}{\varepsilon_r(z)}\right]H_y=0 \quad -L<z<0 \tag{17.78}$$

在 $z=0$ 处，边界条件是一理想导体边界条件

$$\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \tag{17.79}$$

在 $z=-L$ 处，边界条件是

$$\widetilde{H}_y(z=-L^+)=\widetilde{H}_y(z=-L^-) \tag{17.80}$$

$$\widetilde{E}_x(z=-L^+)=\widetilde{E}_x(z=-L^-) \tag{17.81}$$

式(17.80)的右端是入射波与反射波的 $\widetilde{H}_y$ 在 $z=-L^-$ 处之和。假设将反射波的磁场写为

$$\widetilde{\widetilde{H}}^R=RH_0 e^{-jk_0(Sx-Cz)}\hat{y} \tag{17.82}$$

那么

$$\widetilde{H}_y(z<-L^-)=H_0 e^{-jk_0(Sx+Cz)}+RH_0 e^{-jk_0(Sx-Cz)} \tag{17.83}$$

$$\frac{d\widetilde{H}_y}{dz}=-jk_0 CH_0\left[e^{-jk_0(Sx+Cz)}-Re^{-jk_0(Sx-Cz)}\right] \tag{17.84}$$

用 $(-jk_0C)$ 乘以式(17.83)，再将其加到式(17.84)中，就可以消去反射系数 R：

$$\frac{d\widetilde{H}_y}{dz}-jk_0 C\widetilde{H}_y=-j2k_0 CH_0 e^{-jk_0(Sx+Cz)} \tag{17.85}$$

根据麦克斯韦方程，边界条件(式(17.81))可转换为关于 $\widetilde{H}_y$ 的导数的边界条件：

$$\overline{\nabla}\times\widetilde{\widetilde{H}}=j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(z)\widetilde{\widetilde{E}}$$

$$\text{所以}\ \widetilde{E}_x=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(z)}\left[-e^{-jk_0 Sx}\frac{\partial H_y(z)}{\partial z}\right]$$

因而，式(17.81)与下式相同

$$\left.\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dH_y}{dz}\right|_{z=-L^+}=\left.\frac{dH_y}{dz}\right|_{z=-L^-} \tag{17.86}$$

在 $z=-L^-$ 处，当对式(17.85)应用 H_y 和 E_x 的连续性条件时，其结果给出

$$\frac{d\widetilde{H}_y}{dz}-jk_0C\widetilde{H}_y\Big|_{z=-L^-}=-j2k_0CH_0e^{-jk_0[Sx+C(-L)]}=\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{d\widetilde{H}_y}{dz}-jk_0C\widetilde{H}_y\Big|_{z=-L^+}$$

上式可以重新写为在 $z=-L^+$ 处的混合边界条件：

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dH_y}{dz}-jk_0CH_y\Big|_{z=-L^+}=-j2k_0CH_0e^{jk_0CL} \tag{17.87}$$

现在，我们可以求解式(17.78)以便得到 H_y 在 $z=-L^+$ 的值，它在 $z=0$ 处满足边界条件(式 17.79)，在 $z=-L^+$ 处满足混合边界条件式(17.87)。根据所求得的值，可以利用式(17.80)和式(17.83)计算出反射系数 R：

$$R=\frac{H_y|_{z=L}-H_0e^{-jk_0CL}}{H_0e^{jk_0CL}} \tag{17.88}$$

17.4节建立的有限元公式可以应用于这个问题，注意，由式(17.56)和式(17.78)，有

$$\Phi=H_y,\quad \alpha=\frac{1}{\varepsilon_r}$$

$$\beta=-k_0^2\left(\mu_r-\frac{S^2}{\varepsilon_r}\right)$$

$$f=0 \tag{17.89}$$

类似地，比较式(17.55)和式(17.87)，得到

$$\alpha_1=1$$

$$\gamma=-jk_0C\varepsilon_{RL}$$

$$q=-2jk_0\varepsilon_{RL}CH_0e^{jk_0CL} \tag{17.90}$$

其中，$\varepsilon_{RL}=\varepsilon_R\big|_{-L^+}$。 ◀

例 17.2[1]

式(17.79)是适用于理想导体边界的第二类边界条件。如果我们希望考虑良导体情况，它不是理想导体，那么边界条件也称为阻抗边界条件[1~3]，也是由下式给出的第三类边界条件，

$$\frac{\partial H_y}{\partial z}=-jk_0\varepsilon_{r0}\eta H_y \tag{17.91a}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}} \tag{17.91b}$$

式中，ε_{r0}是电介质在 $z=0$ 处的相对介电常数，μ_{r2}和ε_{r2}是良导体的相对磁导率与相对介电常数。对于像铜这样的导体，$\mu_{r2}=1$ 和 $\varepsilon_{r2}=1-j\sigma/\omega\varepsilon_0$，$\sigma$ 是铜的导电率($\sigma\approx5.8\times10^7\,\text{s/m}$)。因此，必须用式(17.91)替换式(17.55)，式(17.91)是一种混合边界条件，并且有

$$\Phi=H_y \tag{17.92a}$$

$$\alpha=\frac{1}{\varepsilon_r} \tag{17.92b}$$

$$\gamma=jk_0\eta \tag{17.92c}$$

$$q=0 \tag{17.92d}$$

在得到式(17.92)时，将式(17.91)写为

$$\frac{1}{\varepsilon_{r0}}\frac{\partial H_y}{\partial z}=-jk_0\eta H_y \tag{17.93}$$

具有薄介质涂层的理想导体

假设 L 非常小。可以将电介质层看做一介质涂层来求解这个问题。那么，式(17.92c)中的 η 可以用一段短路传输线的输入阻抗来替换：

$$\eta=j\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}\tan(k_0\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}\Delta) \tag{17.94}$$

且用 1 替换式(17.92b)中的 ε_{r0}(见图 17.7)。 ◀

例 17.3 辐射边界条件

图 17.8 所示为一个虚拟边界，在边界外我们认为只存在外向行波。对于二维问题，索莫菲辐射条件可以写为[1]

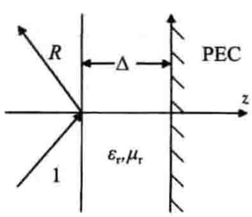


图 17.7 阻抗边界条件和第三类边界条件

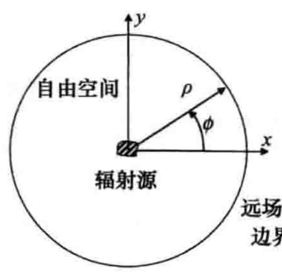


图 17.8 辐射边界条件

$$\lim_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}+\mathrm{j}k_0\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}\right]=0 \tag{17.95}$$

式中，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$是圆柱坐标系中的半径坐标。上式可以写为

$$B_{1/2}\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}=O(\rho^{-3/2}) \tag{17.96}$$

式中，$B_{1/2}$是由下式给出的算子

$$B_{1/2}=\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathrm{j}k_0 \tag{17.97}$$

等式右端的项表明了近似的阶数，也就是说，$\rho^{-3/2}$及更小项都被忽略了。对于这个近似阶数，ρ必须取得足够大(即问题的计算域必须取得足够大)。

提高近似的阶数，就可以减小计算域。相关文献讨论了更高阶的辐射条件。例如，有

$$B_1=\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathrm{j}k_0+\frac{1}{2\rho}+O(\rho^{-5/2}) \tag{17.98}$$

$$B_2=\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathrm{j}k_0+\frac{1}{2\rho}-\frac{1}{8\rho(1+\mathrm{j}k_0\rho)}-\frac{1}{2\rho(1+\mathrm{j}k_0\rho)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+O(\rho^{-9/2}) \tag{17.99}$$

这些方程都称为吸收边界条件，可以理解为只有一小部分入射能量被虚拟边界反射。这种边界条件是混合型边界条件，例如，边界条件($\partial E_z/\partial\rho+\mathrm{j}k_0E_z=0$)就是混合型(式(17.55))。

17.5　三维问题[1,3,4]

与在二维问题中使用三角形单元一样，在三维问题中使用四面体(四面单元)作为单元(见图 17.9)。令顶点 1、2、3 和 4 的直角坐标是 x_i、y_i、z_i，$i=1$，2，3，4。

四面体的三角形表面是

1	2	3
1	2	4
2	3	4
1	4	4

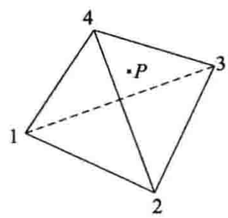


图 17.9　四面体单元

17.5.1　体积坐标

四面体内一点 P 的坐标是 x、y 和 z。定义体积坐标为：

$$\zeta_1=\frac{体积\ P234}{体积\ 1234} \tag{17.100}$$

$$\zeta_2=\frac{体积\ P341}{体积\ 1234} \tag{17.101}$$

$$\zeta_3=\frac{体积\ P412}{体积\ 1234} \tag{17.102}$$

$$\zeta_4=\frac{体积\ P123}{体积\ 1234} \tag{17.103}$$

体积坐标与(x，y，z)坐标之间的关系为

$$\begin{bmatrix}1\\x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\\\zeta_4\end{bmatrix} \tag{17.104}$$

P 点的位函数值可以用体积坐标和顶点的位函数值来表示：

$$\Phi^e(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\zeta_i\Phi_i \tag{17.105}$$

同样，在三维空间中，一阶(线性)近似的形式为 $\Phi^e(x, y, z)=a+bx+cy+dz$。在各个顶点上应用这一方程，得到式(17.106a)～式(17.106d)：

$$\Phi_1^e(x,y,z) = a + bx_1 + cy_1 + dz_1 \tag{17.106a}$$

$$\Phi_2^e(x,y,z) = a + bx_2 + cy_2 + dz_2 \tag{17.106b}$$

$$\Phi_3^e(x,y,z) = a + bx_3 + cy_3 + dz_3 \tag{17.106c}$$

$$\Phi_4^e(x,y,z) = a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \tag{17.106d}$$

求解系数 a、b、c 和 d，可以得到

$$a = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} \Phi_1^e & \Phi_2^e & \Phi_3^e & \Phi_4^e \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \tag{17.107}$$

$$b = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Phi_1^e & \Phi_2^e & \Phi_3^e & \Phi_4^e \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \tag{17.108}$$

$$c = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \Phi_1^e & \Phi_2^e & \Phi_3^e & \Phi_4^e \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \tag{17.109}$$

$$d = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \Phi_1^e & \Phi_2^e & \Phi_3^e & \Phi_4^e \end{bmatrix} \tag{17.110}$$

其中，行列式

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} = 6V \tag{17.111}$$

根据式(17.104)，可以证明

$$\zeta_j = \frac{1}{6V}(a_j + b_jx + c_jy + d_jz) \tag{17.112}$$

系数 a_j、b_j、c_j 和 d_j 可通过如下方式得到。

将式(17.107)展开，可以得到

$$a = \frac{1}{6V}(a_1\Phi_1^e + a_2\Phi_2^e + a_3\Phi_3^e + a_4\Phi_4^e) \tag{17.113}$$

因此，可以看到，当将式(17.107)的矩阵的行列式展开时，a_1、a_2、a_3 和 a_4 就是电位在相应顶点处的系数。

同样地，由式(17.108)至式(17.110)，分别得到

$$b_j,\ j = 1,\cdots,4 \tag{17.114}$$

$$c_j,\ j = 1,\cdots,4 \tag{17.115}$$

$$d_j,\ j = 1,\cdots,4 \tag{17.116}$$

注意，体积坐标满足形状函数的要求：

$$\zeta_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{17.117}$$

因此，$\alpha_j = \zeta_j$，我们求出了四面体的一阶形状函数。

17.5.2 泛函

在体积 V 中，标量波动方程的最普遍的形式可以写为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = - f \tag{17.118}$$

在一般情况下，边界条件可能会包含在 S_1 上 $\Phi = p$(狄利赫里边界条件)，而在 S_2 上

$$\left(\hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cdot \hat{n} + \nu \Phi = q$$

(混合边界条件，这也包括诺依曼边界条件)，其中 $S_1 + S_2$ 是包围体积 V 的闭合表面。

在这种情况下，泛函是

$$F(\Phi) = \frac{1}{2}\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - k^2 \Phi \right] \mathrm{d}V + \iint_{S_2} \left(\frac{\nu}{2}\Phi^2 - q\Phi\right) \mathrm{d}S - \iiint_V f\Phi \,\mathrm{d}V \tag{17.119}$$

与二维情况相类似，通过使用下式的三维标准积分，可以得到相关矩阵

$$\iiint_{V^e} (\zeta_1)^k (\zeta_2)^l (\zeta_3)^m (\zeta_4)^n \,\mathrm{d}V = \frac{k!\,l!\,m!\,n!}{(k+l+m+n+3)!} 6V \tag{17.120}$$

其中，V 是单元的体积。

17.5.3 S、T 和 g 矩阵

单元矩阵

$$S_{ij}^e = \iiint_{V^e} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}\frac{\partial \zeta_j}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial y}\frac{\partial \zeta_j}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial x}\frac{\partial \zeta_j}{\partial x} \right) \mathrm{d}V \tag{17.121}$$

$$T_{ij}^e = \iiint_{V^e} \zeta_i \zeta_j \,\mathrm{d}V \tag{17.122}$$

$$g_{ij}^e = \iiint_{V^e} f \zeta_j \,\mathrm{d}V \tag{17.123}$$

经过计算，得到

$$S_{ij}^e = \frac{1}{36V}(b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) \tag{17.124}$$

$$T_{ij}^e = \frac{V}{20}(1 + \zeta_{ij}) \tag{17.125}$$

$$g_i^e = \frac{V}{4} f^e \tag{17.126}$$

为了考虑第三类边界条件，我们不得不处理泛函(式(17.119))中的额外一项。

$$F_b(\Phi) = \iint_{S_2} \left(\frac{\nu}{2}\Phi^2 - q\Phi\right) \mathrm{d}S \tag{17.127}$$

$$F_b(\Phi) = \sum_{S=1}^{M_S} F_b^S(\Phi^S)$$

$$\Phi^S = \sum_{j=1}^{3} (\zeta_j^S \Phi_j^S)$$

$$\frac{\partial F_b^S}{\partial \Phi_i^S}=\sum_{j=1}^{3}\Phi_i^S\iint_{S^S}\nu\zeta_i\zeta_j\,\mathrm{d}S-\iint_{S^S}q\zeta_i\,\mathrm{d}S$$

其中，S^S 表示第 S 个三角形的表面。

因而，我们得到

$$\frac{\partial F_b^S}{\partial \Phi^3}=[S^S]\{\Phi^2\}-k^2[T^S]-\{g^2\} \tag{17.128}$$

式中

$$T_{ij}^S=\iint_{S^S}\nu\zeta_i\zeta_j\,\mathrm{d}S \tag{17.129}$$

$$g_{ij}^S=\iint_{S^S}q\zeta_i\,\mathrm{d}S \tag{17.130}$$

如果 ν 和 q 是常数，有

$$T_{ij}^S=\nu^S\frac{\Delta^S}{12}(1+\zeta_{ij}) \tag{17.131}$$

$$g_i^S=q^S\frac{\Delta^S}{3} \tag{17.132}$$

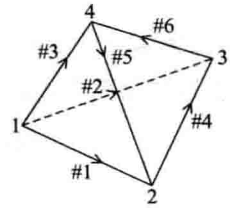


图 17.10 四面体单元的棱边

为了考虑混合边界条件的影响，应该适当地把 T_{ij}^S 和 g_i^S 加进合成的全局矩阵中。因而，得到如下方程

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{\Phi}]=[\boldsymbol{g}] \tag{17.133}$$

17.5.4 三维棱边单元[1,3]

如图 17.10 所示，在三维情况中，有 6 条棱边。

如表 17.3 所示，一条棱边 i 始于节点 i_1，而止于节点 i_2。

我们以如下方式定义矢量形状函数：

$$\alpha_i=(\alpha_{i_1}\nabla\alpha_{i_2}-\alpha_{i_2}\nabla\alpha_{i_i})l_i$$

17.5.5 高阶棱边单元

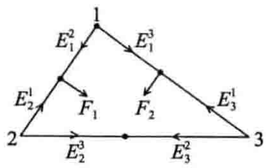


图 17.11 高阶棱边单元

在二维情况中，已经得到了更高阶的棱边单元，如图 17.11 所示。

为了对沿三条棱边中的两条棱边的垂直分量做出二次近似，矢量场沿棱边(i，j)的切向投影由两个未知量 E_i^j 和 E_j^i 以及两个面未知量 F_1 与 F_2 所决定。仅需要两个面单元就可以使现在的旋度算子的距离空间完整到一阶。这些变量有 8 个自由度。矢量场 $\boldsymbol{E}^e$ 可以展开为

$$E^e=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_i^j\alpha_i\nabla\alpha_j+F_1\alpha_i(\alpha_j\nabla\alpha_k-\alpha_k\nabla\alpha_j)+F_2\alpha_j(\alpha_k\nabla\alpha_i-\alpha_i\nabla\alpha_k),\ i\neq j \tag{17.134}$$

表 17.3 四面体单元的棱边定义

棱边 # i	节点 i_1	节点 i_2	棱边 # i	节点 i_1	节点 i_2
1	1	2	4	2	3
2	1	3	5	4	2
3	1	4	6	3	4

对于三维情况，更高阶的棱边单元有

$$E^e=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}E_i^j\alpha_i\nabla\alpha_j+\sum_{i=1}^{4}F_1^i\alpha_i(\alpha_j\nabla\alpha_k-\alpha_k\nabla\alpha_j)+F_2^i\alpha_j(\alpha_k\nabla\alpha_i-\alpha_i\nabla\alpha_k) \tag{17.135}$$

其中，F_1^i 和 F_2^i 是面变量。总的来说，在总共 20 个自由度中，第一项中有 16 个自由度，第二项中有 8 个自由度。

参考文献

1. Jin, J., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, (2nd edition), Wiley, New York, NY, 2002.
2. Pelosi, G., Coccioli, G., and Selleri, S., *Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves*, Artech House, Norwood, MA, 1989.
3. Volakis, J. L., Chatterjee, A., and Kempel, L. C., *Finite Element Method for Electromagnetics*, IEEE Press, New York, NY, 1998.
4. Silvester, P. P. and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers*, (3rd Edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
5. Ansoft Publication, *Ansoft HFSS-Technical Notes*, Pittsburgh, 2011.

第18章

利用多个单元分析脊形波导[⊖]

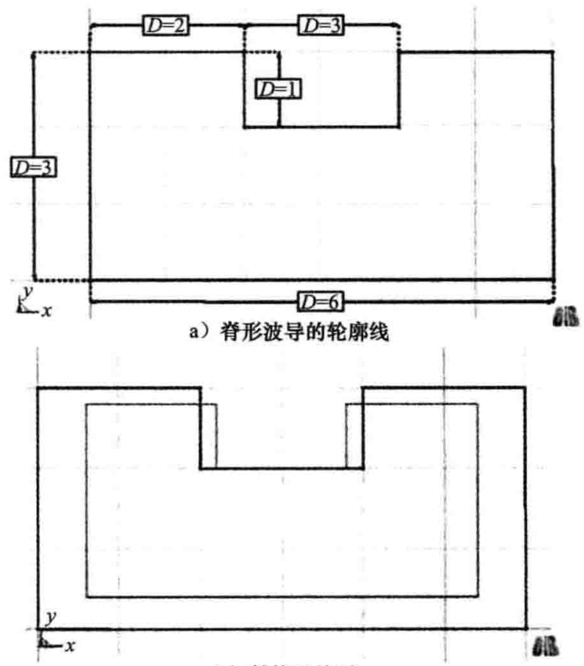
第 16 章和第 17 章已经建立了有限元方法的基本理论。为了使算法易于理解，并给进行手算或练习运行程序提供机会，我们使用了尽可能少的单元来获得算法并对其进行示例说明。显然，使用这么少的单元，我们并不期望所获得的答案是精确的。

这一章将阐述为得到准确答案所需要的另外的一些措施。对于第 16 章和第 17 章中用到的各种函数程序来说，更大量的单元需要利用计算机来生成输入数据。用手算方法生成节点的坐标、连接表、节点和棱边编号等是非常冗长乏味的。网上有可供免费下载的软件，通过均匀和介质加载脊形波导例子说明了利用这个软件由计算机生成输入数据的详细过程。

18.1 均匀脊形波导

我们的目的是求出脊形波导的 TM 模式和 TE 模式的截止频率。网格生成是由 GID 软件来完成的，这个软件可以从网址 http://www.gidhome.com/download/上下载。GID 的计算版完全是函数型的，但是几何形状不超过 25 个面，网格不超过 1000 个节点。这个软件可免费下载。

通过在 Creat 子菜单下的 Geometry 菜单中选择 Straight Line 工具，可以建立所要分析的结构，用直线画出尺寸如图 18.1a 所示的结构，然后在同一 Creat 子菜单中使用 contour 工具中的 NURBS surface 使轮廓转化为面。图 18.1 描绘了这一过程。



a）脊形波导的轮廓线

b）转换后的面

图 18.1 脊形波导

⊖ 第 18 章的附录参见附录 18A～18C。

在 Mesh 菜单下选择 Generate Mesh 命令可以完成网格生成过程。为了生成脊，只需要删除占据这一区域中的单元（12×4＝48 个单元）；GID 会自动地对节点和单元重新编号。在这种情况下，有 384 个单元和 227 个节点。网格、单元编号和节点编号分别如图 18.2和图 18.3 所示。

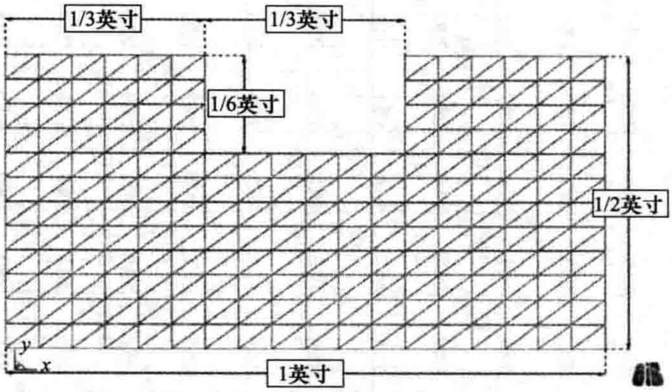
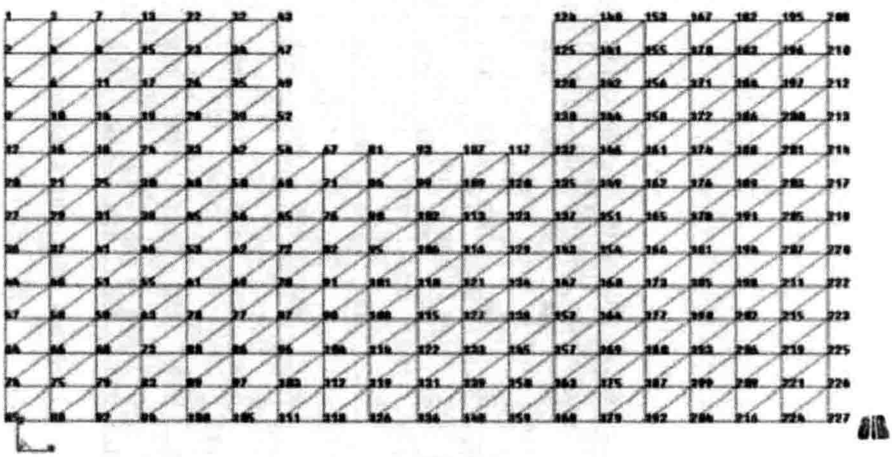
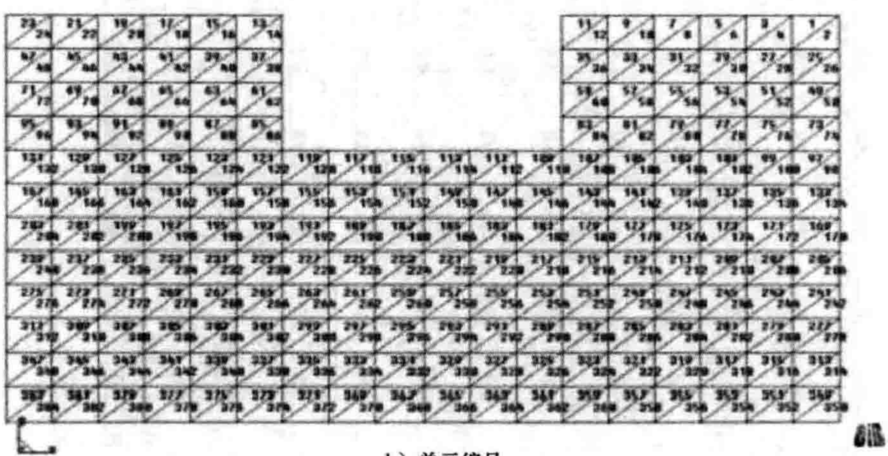


图 18.2　网孔的几何图形，单位为英寸

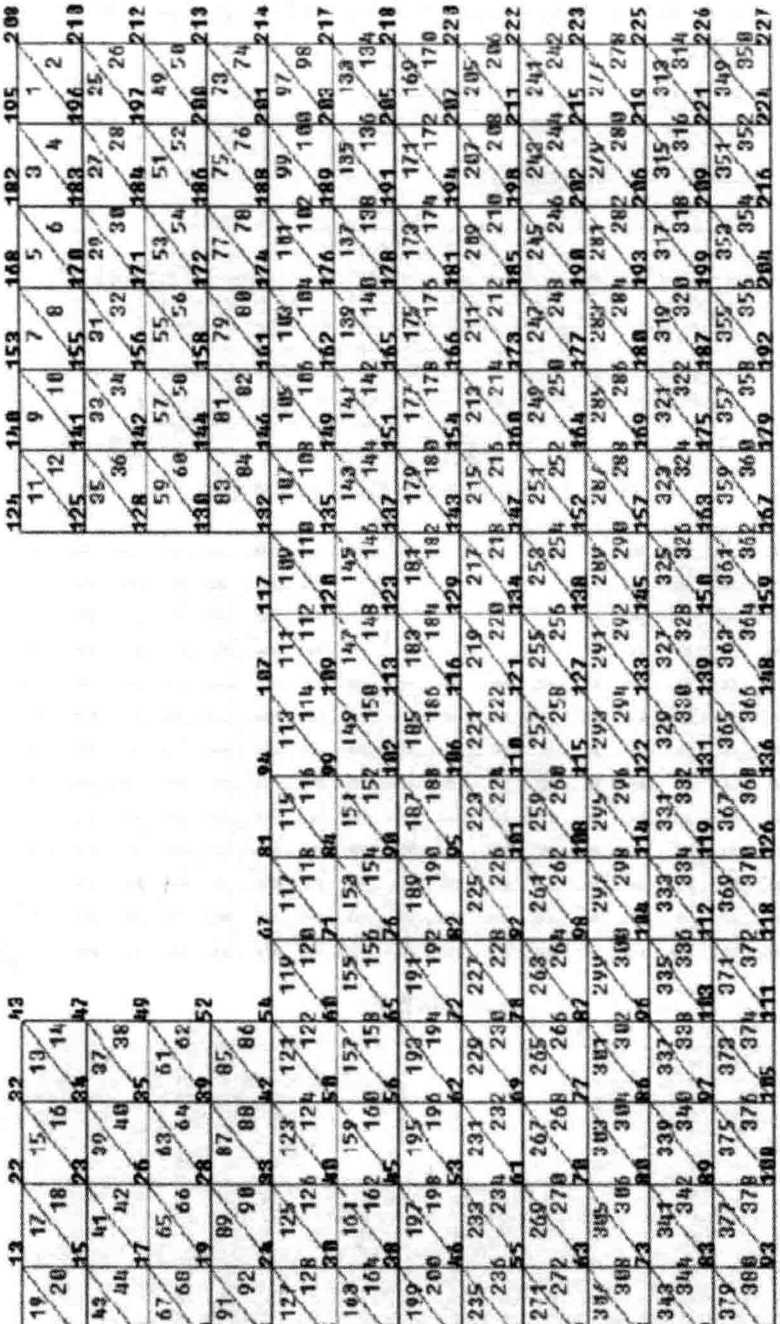


a）总体节点



b）单元编号

图 18.3　总体节点和单元编号



c）一阶节点（粗体）和单元编号的放大图

图 18.3（续）

节点编号、单元编号和节点的坐标由 GID 中 File 菜单中的 Export to data Report 函数全部地输出到文本文件中，这个文本文件可以下载到一个 MATLAB 函数中(子例程)(参见附录 18A)。这个文件包括坐标为(x_n，y_n)的节点编号，具有相应总体节点的单元编号。而且，使用 Mesh 子菜单下的函数 View Boundary Mesh 可从 GID 中选择边界节点，使用 List some Filtered Results 命令可以将这些边界节点复制到一个文本文件中，边界节点或指定节点如图 18.4 所示。

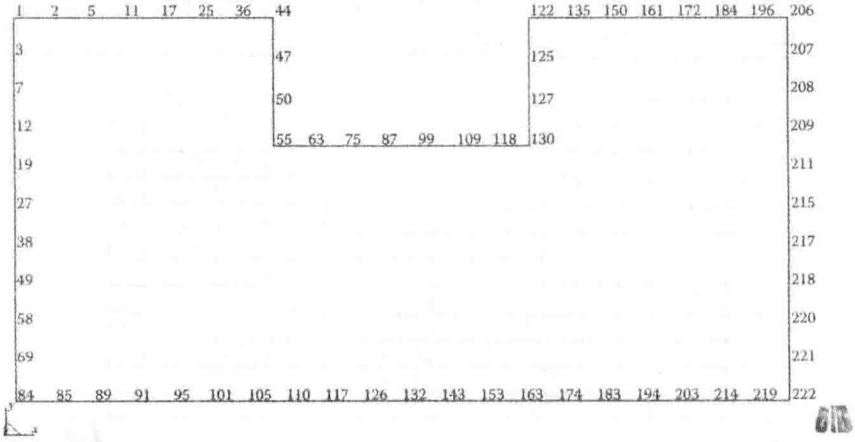


图 18.4　TM 模式的指定节点

18.1.1　基于节点的有限元方法

本节使用基于节点的一阶有限元方法求脊形波导的 TE 模式和 TM 模式的截止频率，附录 18A 中从 GID 中输出的信息数据可以在 MATLAB 的子例程(参见附录 18B.1)中使用，给这个子例程的输入是：

N_n：节点总数。

N_e：三角形单元总数。

Meshread：这个函数从 GID 预处理生成的 ASCII 网格文件中读出节点坐标和连接矩阵(参见 18C.1b 节)。

GLANT：这个函数从总体节点集合中求出刚度矩阵(见 18C.1a 节)。

对于 TE 模式，把所有节点都看做自由节点，但是对于 TM 模式，边界节点不应考虑进去，所以在 TM 模式下，计算截止模式仅需要自由节点。

表 18.1 列出了 TE 模式和 TM 模式的前 7 个模式。

18.1.2　基于棱边的有限元方法

这一节使用基于棱边的有限元方法求截止频率，用命名为 Edges(见 18C.2b 节)的函数生成局部棱边数组 $n1$EL、$n2$EL 和 $n3$EL 和棱边编号，稍后会在 GLAET 函数中利用这些棱边编号求出总体刚度矩阵(MATLAB 代码参见 18C.2a 节)。显然，Edges 函数仅对于结构化的单元才行得通(结构化：直角三角形单元)，因为使用非结构化单元将会得出不精确的结果。

在 Mesh 菜单中，在 Structured 子菜单下选择 Assign for Surfaces，将出现弹出窗口，进入这个窗口中的步长，就可以在 GID 中建立结构化单元。图 18.5 显示了结构化单元。

对于 TM 模式，把所有的棱边都看做自由棱边，但是对于 TE 模式，把边界上的棱边看做指定棱边，只有内部的棱边应该被看做自由棱边。可以通过使 $n1$EL，$n2$EL 和 $n3$EL 相交提取出公共棱边，这可以从 18B.2 节的代码中看到。

表 18.2 列出了 TE 模式和 TM 模式的前 7 个模式。

表 18.1 一阶有限元方法：前 7 个模式的截止频率

TE 模式		TM 模式		TE 模式		TM 模式	
k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)
102.9	4.91	367.2	17.53	374.2	17.87	619.1	29.56
227.8	10.88	396.6	18.94	417.3	19.92	650.5	31.06
267.2	12.76	481.2	22.97	450.7	21.52	721.6	34.45
281.9	13.46	570.8	27.25				

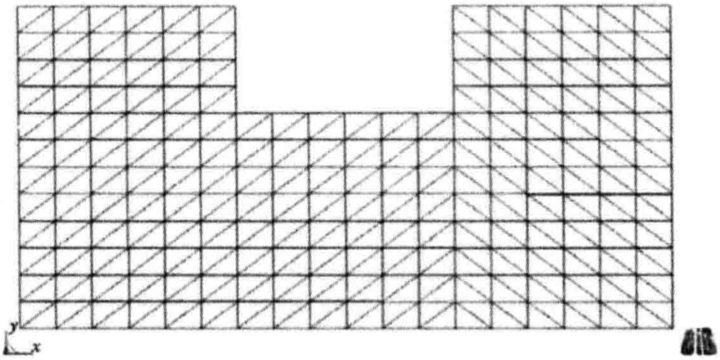
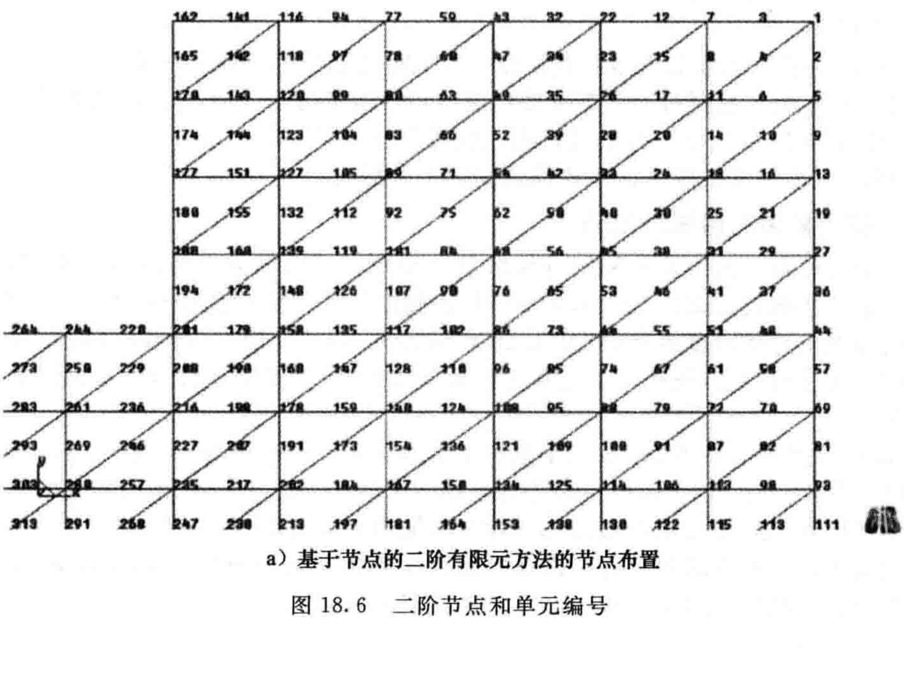


图 18.5 基于棱边的方法的单元设置

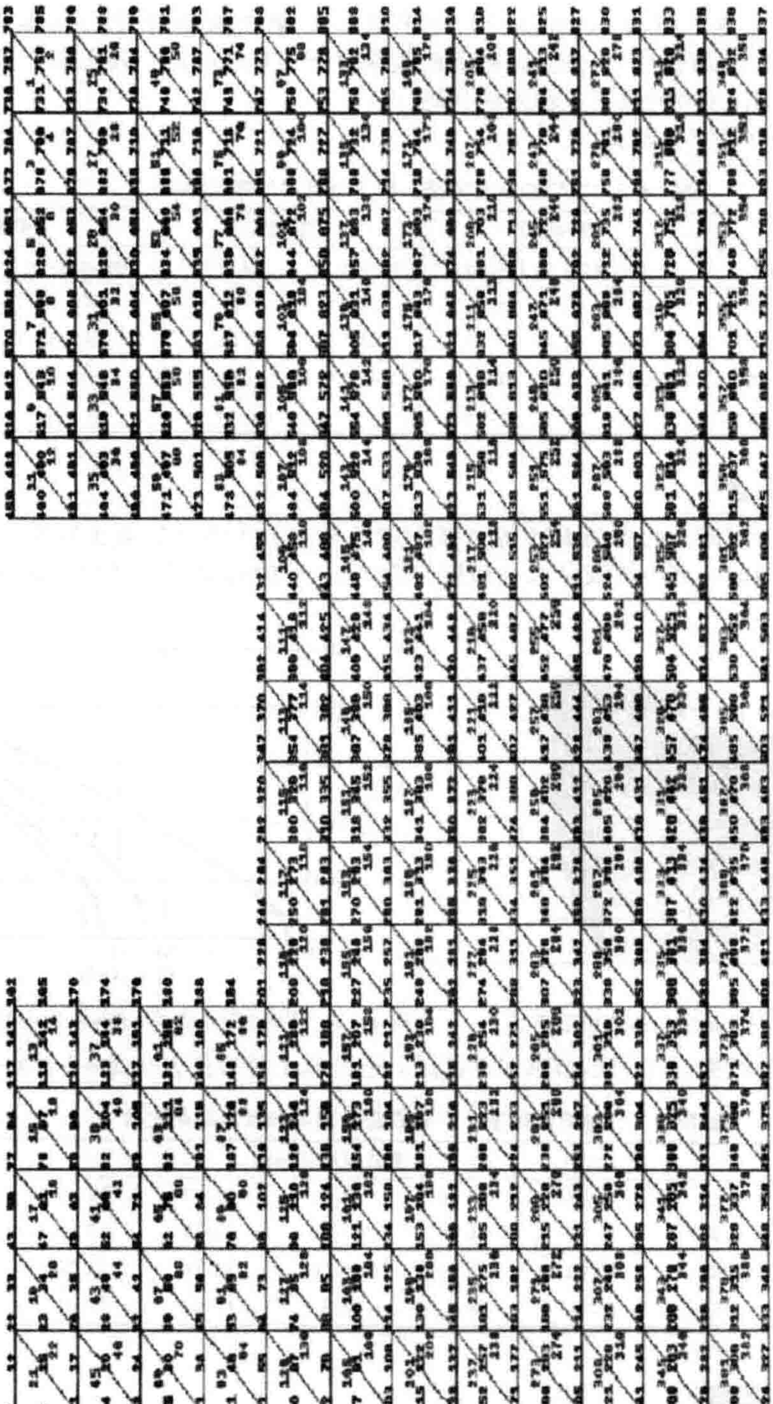
表 18.2 基于棱边的有限元方法：前 7 个模式的截止频率

TE 模式		TM 模式		TE 模式		TM 模式	
k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)
102.4	4.89	365.7	17.46	383.2	18.30	603.6	28.82
210.3	10.04	398.3	19.02	403.0	19.24	651.9	31.13
261.8	12.50	479.2	22.88	440.5	21.03	718.1	34.29
298.2	14.24	553.3	26.42				



a）基于节点的二阶有限元方法的节点布置

图 18.6 二阶节点和单元编号



b）二阶（粗体）节点和单元编号的放大图

图 18.6（续）

18.1.3 基于节点的二阶有限元方法

在 GID 中，使用 Element Type 菜单中的 Quadratic9 命令，可以对图 18.6 所示的几何形状生成二阶节点。函数 meshread2T 用于从 GID 输出文本文件中读出数据（参见 18C.3b 节的 MATLAB 代码）。然后，把这些数据用于 18C.3a 节的 GLAN2T 子例程中以求出刚度矩阵。18B.3 节列出了主程序的代码。

表 18.3 列出了前 7 个模式。

表 18.3 二阶有限元方法：前 7 个模式的截止频率

TE 模式		TM 模式		TE 模式		TM 模式	
k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)	k_c(rad/m)	f(GHz)
102.3	4.89	339.0	16.19	371.1	17.72	569.4	27.19
225.6	10.77	369.5	17.64	412.4	19.69	598.8	28.59
265.6	12.68	451.1	21.54	442.4	21.12	668.7	31.93
280.6	13.40	533.3	25.46				

18.1.4 HFSS 仿真

本节使用基于有限元的商用 EM 仿真器 HFSS 来求脊形波导的截止频率。如图 18.7 所示，波导结构与前一节中的波导大小相同。图 18.8 中的仿真结果显示了前 8 个模式的截止频率。

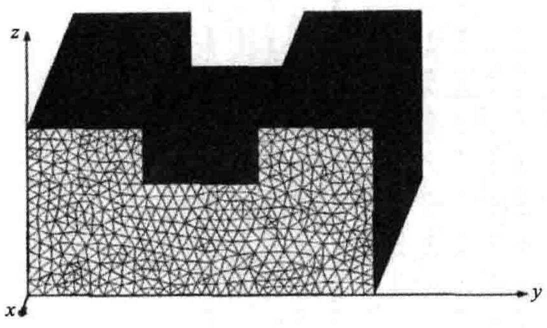


图 18.7 在 HFSS 中构造三角形单元

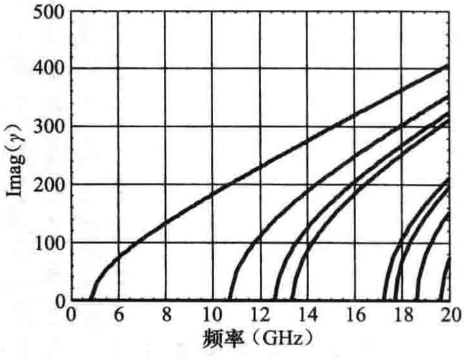


图 18.8 使用 HFSS 求得的脊形波导中的前 8 个模式

一阶和二阶的结果与 HFSS 结果非常接近，但是基于棱边的方法却不同（见表 18.4）。

表 18.4 三种方法的前 7 个模式截止频率的计算结果比较

	截止频率(GHz)						
一阶	4.97	10.88	12.76	13.46	17.53	17.87	18.94
二阶	4.89	10.77	12.68	13.40	16.19	17.64	17.72
基于棱边	4.89	10.04	12.50	14.24	17.46	18.30	19.02
HFSS 仿真	4.8	10.7	12.6	13.3	17.2	17.7	18.5

18.2 非均匀波导

18.2.1 加载的正方形波导

问题由填充了电介质材料的正方形波导所组成，电介质材料的介电常数为 1.5，图 18.9 给出了这个波导的几何尺寸，电介质材料仅填充了波导的一半。

第一步是使用商用软件 GID 生成结构，按照在脊形波导中所使用的步骤，使用如图 18.10所示的结构化三角形单元来完成网格生成，几何形状由 72 个单元和 49 个节点构成。由 GID 生成的数据可以输出到文本文件中，文本文件包括每一个单元($n1L$、$n2L$ 和 $n3L$)的局部节点编号与每个节点的坐标(x_n 和 y_n)。使用 List Some Filtered Results 命令也可以选择电介质单元，并将其存储在一个单独的文本文件中以供主程序使用。

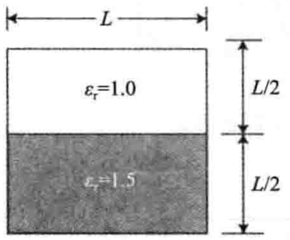


图 18.9　介质加载正方形波导

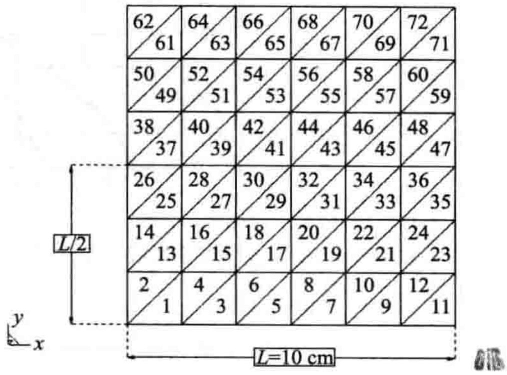
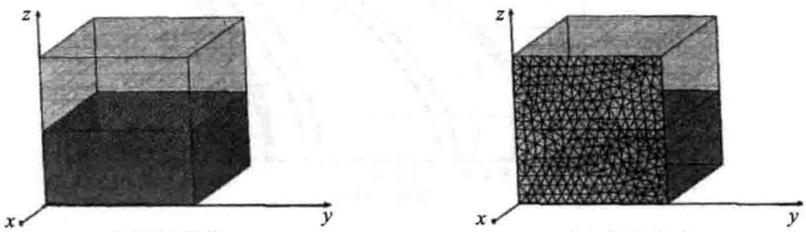


图 18.10　使用 GID 生成单元

Meshread 子例程用于从输出的 GID 文件中读出数据，而 Edges 函数用于生成每个单元的局部棱边编号($n1EL$，$n2EL$ 和 $n3EL$)，分别参见 18C. 1b 节和 18C. 2b 节。把这些函数反馈给 INHWGD 函数(参见 18B. 4 节)，利用 INHWGD 函数来计算矩阵 $\boldsymbol{C}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值就是波数。

如图 18.11 所示，利用 HFSS 对同一个波导进行仿真。



a) HFSS结构　　b) 网格生成

图 18.11　HFSS 结构和网格

对于填充有介电常数为 1.5 的电介质，边长为 0.1m 的非均匀正方形波导，电介质占据波导的一半。

图 18.2 和图 18.3 所示分别为用 HFSS 模拟与用 INHWGD 代码的数值方法得到的波导中的传播模式。

在介质加载的波导中，所有波模都不是 TE 模式或 TM 模式，一般都是混合模式。

18.2.2　非均匀脊形波导

图 18.12 所示的脊形波导填充有电介质材料，电介质材料占据中心区域(中间区域的单元)，选择材料的介电常数为 $\varepsilon_r=4.0$，波导的其余部分被空气填充。

称为 INHWG. m 的 MATLAB 子例程用于求出图 18.14 所示结构在给定频率下的 γ。按照前面所提到的一阶有限元方法的同样步骤，生成在 GID 中的节点和单元的编号，与前面讲述的一样，将 GID 中的数据导入 MATLAB 子例程中。18B. 4 节的 MATLAB 主程序用于求出在确定波数 k_0 下的传播常数 β。

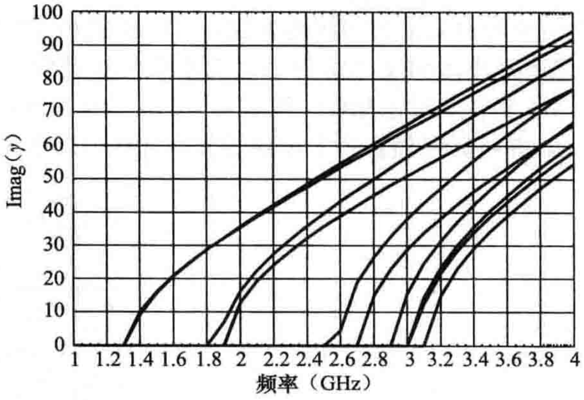


图 18.12 电介质加载正方形波导的 HFSS 仿真

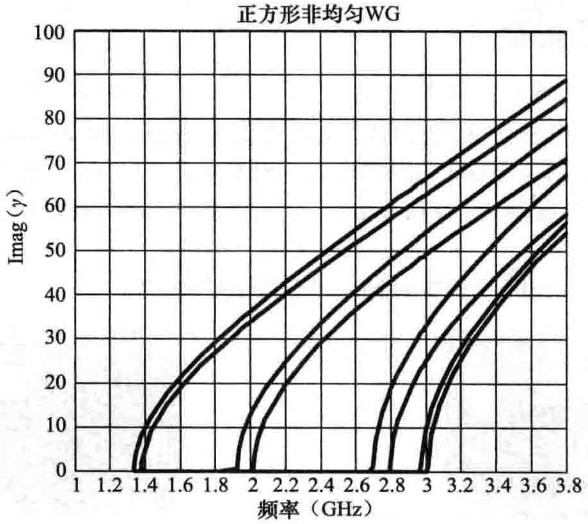
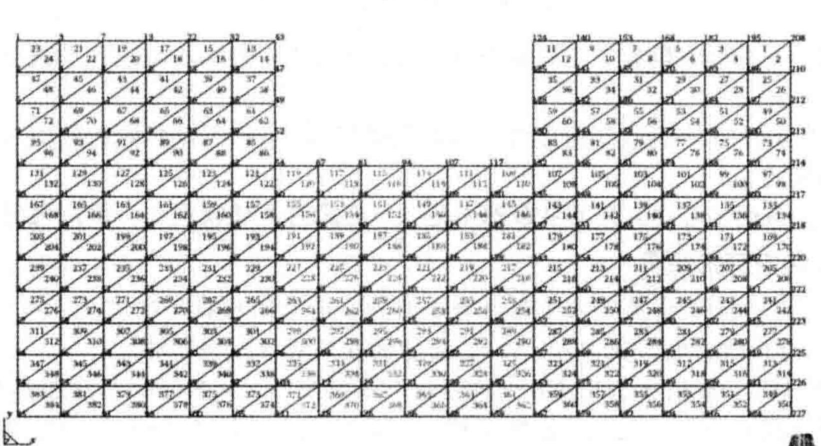
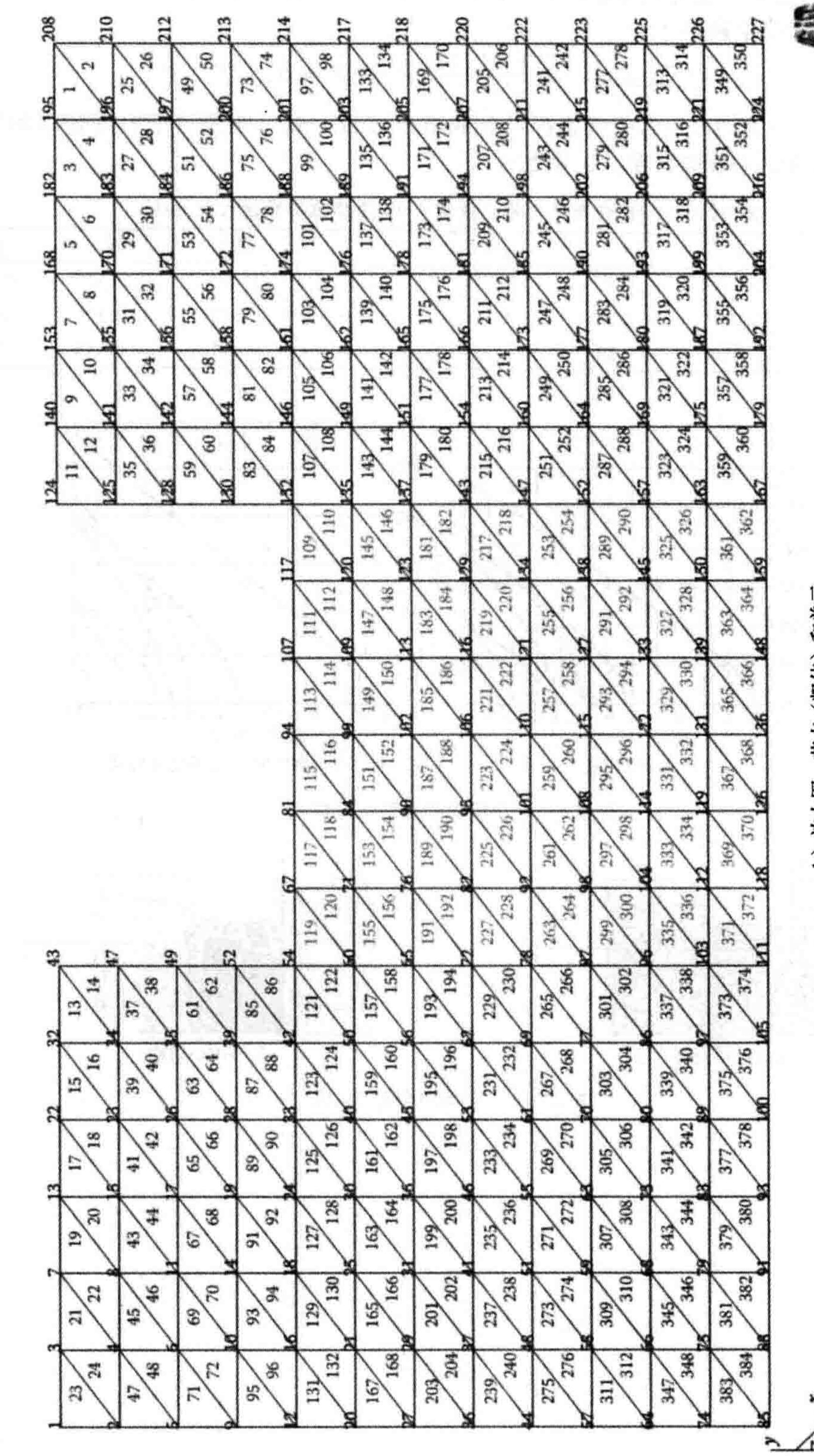


图 18.13 INHWG MATLAB 代码解：电介质加载正方形波导



a）节点和单元

图 18.14 电介质加载脊形波导



b）放大图、节点（粗体）和单元

图 18.14（续）

图 18.15 比较了利用 HFSS 仿真和利用 INHWG MATLAB 子例程(在表 18.5 中称为数值的)得到的结果。这两幅图非常吻合。表 18.5 比较了截止频率 f_n。

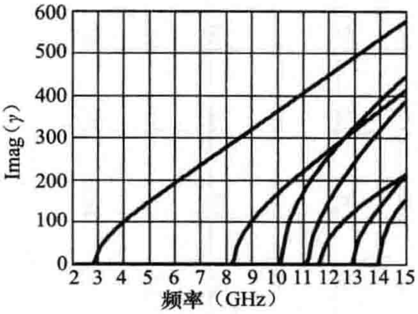
对于第一个截止频率 f_0，

$$\%\text{误差} = \left|\frac{2.9-2.86}{2.9}\right| \times 100\% = 1.38\%$$

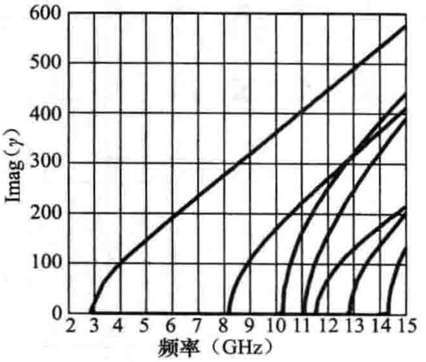
这个误差与在图 18.16a 中所选择单元和节点数目一致。即便对于中等数目的单元，18A 节中给出的输入数据也难以手算生成。

表 18.5 INHWG 前 7 个截止频率：HFSS 仿真与数值代码对比

频率(GHz)	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
HFSS	2.9	8.2	10.1	11.1	11.6	12.9	13.9
数值方法	2.86	8.188	10.26	11.08	11.55	12.84	14.32
%误差	1.38	0.15	1.58	0.18	0.43	0.465	3.02

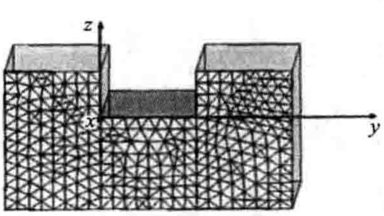


a) HFSS仿真

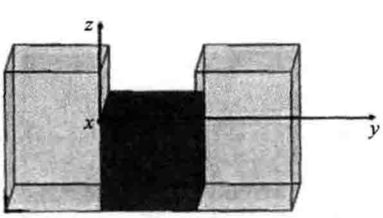


b) INHWG MATLAB代码结果

图 18.15 介质加载脊形波导模式



a) HFSS网格生成



b) HFSS结构

图 18.16 HFSS 网络与结构

第19章 时域有限差分法

麦克斯韦方程是时域中的偏微分方程。在适当的初始条件和边界条件下，这些偏微分方程的解给出了经典电动力学中很多实际问题的解答。描述媒质性质的本构关系用于补充麦克斯韦方程。在前面几章中，我们使用数值方法寻求了这样一些解。大部分例子涉及静态或时谐解。相应的偏微分方程叫做椭圆型偏微分方程。我们使用有限差分法寻求到了它们的解。这种方法利用一组离散的点来替换连续域，这些点是叠加在连续域上的网格的交点。通过把微分用网格上相邻点的电位近似表示，微分方程就转化为一组代数方程。采用这种方法得到了一组联立的代数方程组。区域的边界是一个闭合边界，边界条件则是电位或者电位的函数在边界上的值。如果使用迭代方法，这种方法的困难是解收敛得很慢。如果用矩阵求逆的方法解联立方程组，那么将需要花费大量的计算时间。而且，由于计算机采用浮点运算，在完成大量算术运算时存在的舍入误差会淹没真实解，导致很大的误差。我们在前面几章中所求解的波导问题是基于亥姆霍兹方程，它是一个椭圆形偏微分方程。不管怎样，这个问题涉及求特征值。

在时域中，麦克斯韦方程是双曲型偏微分方程组。如果能够正确地建立计算公式和进行离散化，这种类型的偏微分方程的有限差分解将生成一个步进解，而不需要求联立方程组的解。步进解也称为“marching”解，其意思是用由简单计算已经得到的前一时间步的解来推求当前时间步的解。在这种意义上来说，当求解过程收敛时，其计算解要比平衡问题的解花费更少的时间。然而，如果处理不当，将会引入数值不稳定现象，而且会得到不合理的结果。让我们通过一个简单例子来解释上面所提到的几点。

19.1 真空中的传输线

对于真空中的传输线，可以将波动方程简单地写成

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{19.1}$$

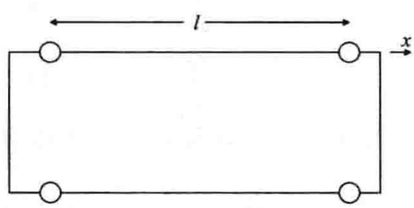


图 19.1 真空中的传输线

如图 19.1 所示，终端短路传输线的边界条件是

$$V(0,t) = 0 \tag{19.2}$$

$$V(l,t) = 0 \tag{19.3}$$

假定传输线已经带电，且其初始电压是 $V_0\sin(\pi x/l)$：这样的一个静态电压分布可由空中的带电云层所产生。电流 I 为零。假定在 $t=0$ 时将空中的带电云层移开，我们希望求出传输线上电压随 x 和 t 的变化。应用分离变量方法，可以得到这个简单问题的解析解。问题的初始条件是：

$$V(x,0) = V_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{19.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{19.5}$$

式(19.5)是由条件 $I(x, 0)=0$ 得到的，I 与$(\partial V)/(\partial I)$成正比。由于式(19.1)是一个二阶微分方程，所以需要两个边界条件和两个初始条件。这个适定问题的解析解是

$$V(x,t) = V_0 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} \tag{19.6}$$

这个解在检验数值解的准确性时是很有用的，我们将使用有限差分法得到数值解。

19.2 时域有限差分解

采用中心差分来近似空间和时间二阶偏微分，我们将得到有限差分解。令

$$t = n\Delta t, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{19.7}$$

$$x = i\Delta x, \quad i = 0,1,2,\cdots N \tag{19.8}$$

现在，可以缩写成(见图 19.2)

$$V(x_i,t_n) = V_i^n \tag{19.9}$$

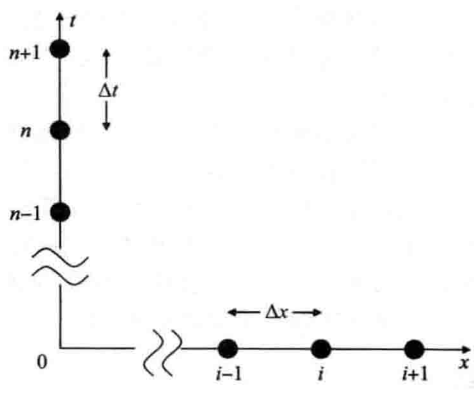


图 19.2 网格点的记号

根据中心差分近似，有

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_i,t_n} = \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \tag{19.10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right|_{x_i,t_n} = \frac{V_i^{n+1} - 2V_i^n + V_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t)^2 \tag{19.11}$$

由式(19.1)、式(19.9)和式(19.10)，以及将 V_i^{n+1} 看做将要计算的未知量，可以得到下式：

$$\begin{aligned} V_i^{n+1} &= r^2(V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n) + 2V_i^n - V_i^{n-1} \\ &= r^2 V_{i-1}^n + 2(1-r^2)V_i^n + r^2 V_{i+1}^n - V_i^{n-1} \end{aligned} \tag{19.12}$$

式中

$$r = c\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{19.13}$$

可以写出问题的计算单元，如图 19.3 的略图所示。

圆圈中的值是在各网格点上电位的乘积的权重。如果选择 $r=1$，将产生如图 19.4 所示的简单计算单元和式(19.14)。

$$V_i^{n+1} = V_{i-1}^n + V_{i+1}^n - V_i^{n-1} \tag{19.14}$$

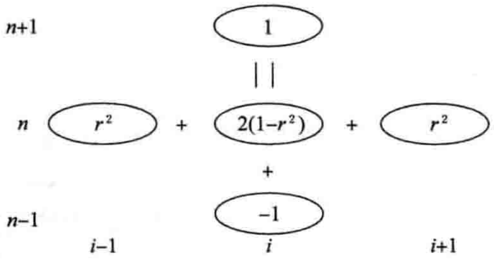


图 19.3　计算单元

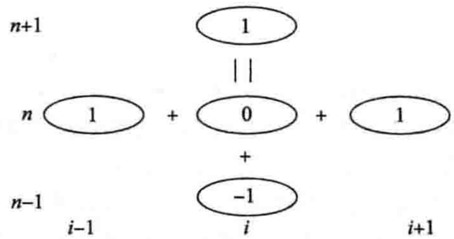


图 19.4　$r=1$ 时的计算单元

我们可以使用这个计算单元，来计算出传输线上任意一点处在任意时刻的电压。让我们通过手算一个简单的例子来说明这个方法，取传输线的长度 $\lambda=1$。让我们准备一张表，在表中记录电压值，如图 19.5 所示。

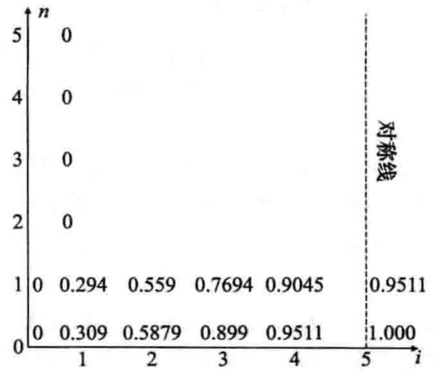


图 19.5　在 $n=0$ 和 $n=1$ 时间步时的电压值

注意，问题对于 $x=0.5(i=5)$ 具有线对称性。那么有

$$V_4^n = V_6^n \tag{19.15}$$

由初始条件式(19.4)可知，$V_0^0=0$，$V_1^0=\sin(0.1\pi)=0.309$，和 $V_2^0=\sin(0.2\pi)=0.58979$ 等，这些值标记在图 19.5 中。当用中心差分公式近似时，由式(19.5)中的第二个初始条件，可以给出

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = \frac{V_i^1 - V_i^{-1}}{2\Delta t}$$

$$V_i^1 = V_i^{-1} \tag{19.16}$$

第一个边界条件式(19.2)给出

$$V_0^n = 0 \tag{19.17}$$

由式(19.14)，当应用于 $n=0$，$i=1$ 时，有

$$V_1^1 = V_0^0 + V_2^0 - V_1^{-1} \tag{19.18}$$

由式(19.16)和式(19.18)，可得

$$2V_1^1 = 0 + 0.5879,\quad V_1^1 = 0.294$$

在 $n=0$，$i=2$ 处应用式(19.14)，且利用式(19.18)，得到

$$V_2^1 = V_1^0 + V_3^0 - V_2^{-1},\quad 2V_2^1 = V_1^0 + V_3^0$$

$$V_2^1 = 0.559$$

在 $i=3$，4 处进行类似的计算，得到

$$V_3^1 = 0.7694,\quad V_4^1 = 0.9045$$

对于 $n=0$，$i=5$，式(19.14)给出

$$V_5^1 = V_4^0 + V_6^0 - V_5^{-1}$$

由式(19.16)，有 $V_5^1=V_5^{-1}$，由式(19.15)，有 $V_4^0=V_6^0$。

所以 $$V_5^1=V_4^0=0.9511$$

注意，通过递推计算，得到在 $t=\Delta t$ 时刻的电压。在内部各点应用式(19.14)，并在传输线上的线对称点应用式(19.15)，就可以计算出在下一时间步的电压，并且可以将这种计算过程推进到任意时间。图 19.6 是一个计算到 $n=5$ 的计算值表。对比准确值与用 FDTD 方法得到的 V_3^1 值。取 $V_0=1$ 和 $\lambda=1$，将 $x=3\Delta x$ 和 $t=\Delta t$ 代入式(19.6)中，就可以得到准确解

$$V_3^1 = \sin 3\pi\Delta x \cos \pi c\Delta t$$

$$\Delta x = 0.1, \quad c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1, \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{0.1}{c}$$

$$V_3^1 = \sin 0.3\pi \cos 0.1\pi = 0.7694$$

上式是由 FDTD 方法得到的结果。由于中心差分近似只能达到二阶精度，也就是说，精度阶数是 $O[(\Delta x)^2, (\Delta t)^2]$，所以结果是出乎意外的。这个结果不是偶然的，但是可以证明对于 $r=1$，FDTD 解是准确的。例如，如果已经选择 $\Delta x = 0.25$，那么选择 Δt 使 $r = c(\Delta t)/(\Delta x) = 1$，仍然能得到准确答案。

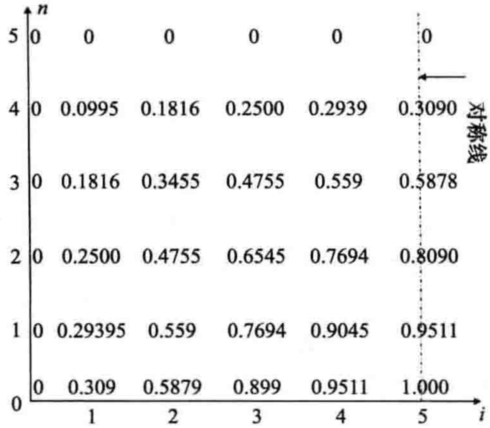


图 19.6 直到 $n=5$ 时的电压值

19.3 数值色散

对于式(19.1)所给出的简单一维波动方程，一个正向行波的时谐形式解是

$$V = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \tag{19.19}$$

一个负向行波也是一个解，由式(19.6)给出的解是满足初始条件和边界条件的上述两种波的叠加结果。ω 和 k 之间的关系是

$$\omega = ck \tag{19.20}$$

式中，c 是光速。$\omega = ck$ 是一条直线。相速度 $v_p = \omega/c$ 和群速度 $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ 都等于 c。当用中心差分公式近似式(19.1)后，我们得到了式(19.12)所给出的计算格式。由于所采用的中心差分近似公式的误差阶数为 $(\Delta t)^2$ 和 $(\Delta x)^2$，因此我们只能期望波的解是近似的。可以通过一个频率为 ω 的单色波和相应的近似波数 $\tilde{k}$ 来分析误差，其解可以写为

$$\tilde{V} \approx A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \tilde{k}x)} \tag{19.21}$$

ω 和数值波数 $\tilde{k}$ 之间的关系称为数值色散关系。将式(19.21)代入式(19.12)中，就可以得到这个关系式。由于常数 A 将会消去，因此我们将关注式(19.21)中的指数因子。假定 V 中的指数因子 Ψ、$\exp[\mathrm{j}(\omega t - kx)]$ 在 V_i^n 中的形式为 Ψ_i^n：

$$\Psi_i^n = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} \tag{19.22}$$

因此，式(19.12)可以近似为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(n+1)\Delta t - \tilde{k} i \Delta x]} = r^2\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega n\Delta t - \tilde{k}(i+1)\Delta x]} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k} i\Delta x)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega n\Delta t - \tilde{k}(i-1)\Delta x]}\} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k} i\Delta x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(n-1)\Delta t - \tilde{k} i\Delta x]}$$

提取因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k} in\Delta x)}$，可以得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta t} = r^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tilde{k}\Delta x} - 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{k}\Delta x}) + 2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta t} \tag{19.23}$$

进行合并处理后，式(19.23)可以写为[1]

$$\cos(\omega\Delta t) = r^2[\cos(\tilde{k}\Delta x) - 1] + 1 \tag{19.24}$$

现在，研究如下两种特殊情况[1]：

情况 1：$r=1$。

式(19.24)给出

$$\cos(\omega\Delta t) = \cos\tilde{k}\Delta x, \quad \omega\Delta t = \tilde{k}\Delta x$$

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c \tag{19.25}$$

式(19.25)中的最后一个等式是因为

$$r = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$$

对于这种情况，数值波与物理波的相速度相同，数值近似没有带来任何色散。这就解释了当选择 $r=1$ 时，我们所得到的准确答案。

情况 2：非常精细的网格 $\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$。

由于式(19.24)中的余弦函数的自变量很小，可以采用如下式的近似

$$\cos\theta=(1-\sin^2\theta)^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\approx 1-\frac{1}{2}\theta^2 \tag{19.26}$$

并得到

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2&=r^2\left[1-\frac{1}{2}\,\widetilde{k}^2(\Delta x)^2-1\right]+1\\ -\frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2&=c^2\,\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left[-\frac{1}{2}\,\widetilde{k}^2(\Delta x)^2\right]\\ \omega^2&=c^2\,\widetilde{k}^2\end{aligned} \tag{19.27}$$

正像所期望的一样，数值波与物理波是完全相同的。

一般情况：

让我们考虑 r 和 R 取任意值时的一般情况，其中

$$R=\frac{\lambda_0}{\Delta x} \tag{19.28}$$

R 是单位波长上的网格数。式(19.24)可以写为

$$\widetilde{k}=\frac{1}{\Delta x}\arccos\left\{1+\frac{1}{r^2}[\cos(\omega\Delta t)-1]\right\} \tag{19.29}$$

以及归一化数值相速度为

$$\frac{\widetilde{v}_{\mathrm{p}}}{c}=\frac{\omega}{\widetilde{k}c}=\frac{(\omega\Delta x)/(c)}{\arccos\{1+[\cos(\omega\Delta t)-1]/r^2\}}$$

注意

$$\frac{\omega\Delta x}{c}=\frac{2\pi f\Delta x}{c}=\frac{2\pi\Delta x}{\lambda_0}=\frac{2\pi}{R}$$

$$\omega\Delta t=2\pi f\Delta t=\frac{2\pi f}{c}\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda_0}r\Delta x=2\pi\,\frac{r}{R}$$

得到

$$\frac{\widetilde{v}_{\mathrm{p}}}{c}=\frac{2\pi}{R\arccos\{1+(1/r^2)[\cos 2\pi(r/R)-1]\}} \tag{19.30}$$

让我们看看由式(19.30)得到的一对数值[1]。

情况 1：$r=0.5$，$R=10$：

令 $r=0.5$，单位波长的网格数是 $R=10$；归一化数值相速度是

$$\frac{\widetilde{v}_{\mathrm{p}}}{c}=0.9873 \tag{19.31}$$

其误差是 1.27%。

情况 2：$r=0.5$，$R=20$：

$$\frac{\widetilde{v}_{\mathrm{p}}}{c}=0.99689 \tag{19.32}$$

若 R 增大为原来的两倍，相速度的误差将减小到 0.31%，原来为 0.25。图 19.7 是以 r 为参数时，归一化相速度与 R 的关系曲线。可以看到，减小 r 所引起精度的降减可以通过增大 R 来得到补偿，也就是说，增加单位波长的网格数可以补偿减小 r 所引起精度的降减。

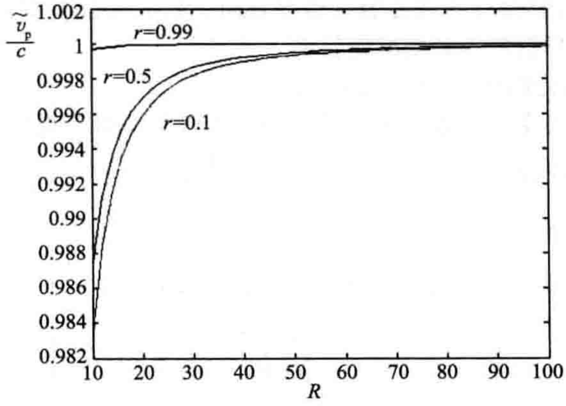


图 19.7 以 r 为参数时归一化数值相速度与 R 的关系曲线

19.4 非均匀、非色散媒质中的波：FDTD 解

让我们将 FDTD 方法用于分析非均匀、非色散媒质中的波传播问题。考虑一维情况，场量和介电常数都在一维空间中变化。

$$\varepsilon=\varepsilon(x) \tag{19.33}$$

$$\overline{D}=\hat{z}D_z(x) \tag{19.34}$$

$$\overline{E}=\hat{z}E_z(x)$$

$$\overline{H}=\hat{y}H_y(x) \tag{19.35}$$

$$D_z=\varepsilon(x)E_z \tag{19.36}$$

式(19.36)的一个简单例子是一个宽度为 d 和介电常数为 ε_2 的介质平板。如图 19.8 所示，输入媒质的介电常数是 ε_1，输出媒质的介电常数是 ε_3。

对于非磁性媒质，相应的麦克斯韦方程是：

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\mu_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} \tag{19.37}$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{H}=\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} \tag{19.38}$$

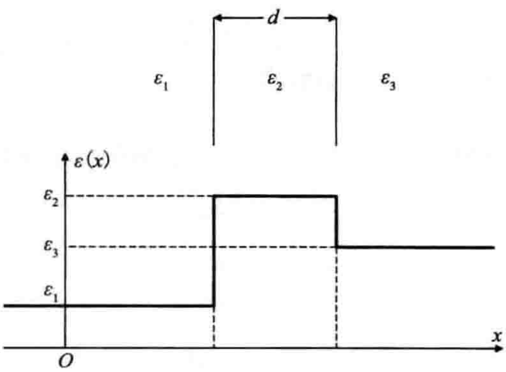


图 19.8 一个非均匀媒质的例子

由式(19.37)、式(19.34b)及式(19.35)，可以得到

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{19.39}$$

由式(19.38)、式(19.35)及式(19.34a)，可以得到

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{19.40}$$

可以采用中心差分公式对式(19.39)中的第一个微分进行离散。令 $t=\Delta t$ 和 $x=i\Delta x$，在下标为$[i+(1/2)]$的空间点和上标为 n 的时间处，对式(19.39)进行近似：

$$\left.\frac{\partial H_y}{\partial t}\right|_{i+(1/2)}^{n} = \frac{1}{\mu_0}\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{i+(1/2)}^{n} \tag{19.41}$$

$$\frac{H_y\big|_{i+(1/2)}^{n+(1/2)} - H_y\big|_{i+(1/2)}^{n-(1/2)}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_z\big|_{i+1}^{n} - E_z\big|_{i}^{n}}{\Delta x} \tag{19.42}$$

$$H_y\big|_{i+(1/2)}^{n+(1/2)} = H_y\big|_{i+(1/2)}^{n-(1/2)} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x}\left(E_z\big|_{i+1}^{n} - E_z\big|_{i}^{n}\right) \tag{19.43}$$

在下标为 i 的空间点和上标为$[n+(1/2)]$的时间点处，对式(19.40)进行时域有限差分离散：

$$\left.\frac{\partial D_z}{\partial t}\right|_{i}^{n+(1/2)} = \left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|_{i}^{n+(1/2)} \tag{19.44}$$

$$D_z\big|_{i}^{n+1} = D_z\big|_{i}^{n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[H_y\big|_{i+(1/2)}^{n+(1/2)} - H_y\big|_{i-(1/2)}^{n+(1/2)}\right] \tag{19.45}$$

在下标为 i 的空间点和上标为 $n+1$ 的时间处，代数方程式式(19.36)可以离散为：

$$E_z\big|_{i}^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon_i} D_z\big|_{i}^{n+1} \tag{19.46}$$

式中

$$\varepsilon_i = \varepsilon(i\Delta x) \tag{19.47}$$

式(19.43)、式(19.45)和式(19.46)给出了一种计算时域解的蛙跳步进计算方法[4]。图 19.9 可以帮助我们来理解这种算法。

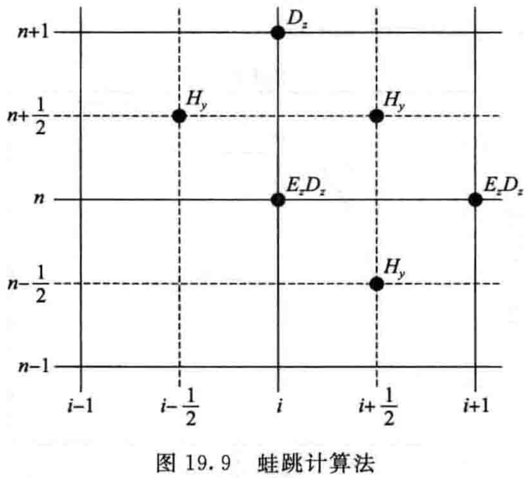


图 19.9　蛙跳计算法

式(19.43)的左端项可以由式(19.43)右端的$H_y\big|_{i+(1/2)}^{n-(1/2)}$、$E_z\big|_{i}^{n}$和$E_z\big|_{i+1}^{n}$的值来计算，这些值是前一时间步的值，已经计算出来了。这样，可以计算出 H_y 在$[n+(1/2)]$时间步的值。现在，可以由时间步 n 的 D_z 值和时间步$[n+(1/2)]$的 H_y 值计算出式(19.45)的左端项。因此，就计算出了在$(n+1)$时间步的 D_z 值。利用式(19.46)，由 D_z 可以计算出 E_z。重复这三个计算步骤，可以计算出下一个时间步的场量，解从而随时间推进。为了启动这一过程，我们必须提供初始值：在时间步$-(1/2)[n=0，t=-(\Delta t/2)]$的 H_y 值，以及在时间步 0$(n=0，t=0)$的 E_z 值。

19.5 非均匀、色散媒质中的波

对于色散媒质，其介电常数 ε 是频率的函数

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) \tag{19.48}$$

仅当考虑单色波传播时，代数方程式式(19.36)才是真实的。当分析脉冲波传播问题时，需要将电介质的本构方程写为

$$D(s) = \varepsilon(s)E(s) \tag{19.49}$$

这个方程在时域中的形式是

$$D(t) = L^{-1}[\varepsilon(s)E(s)] = \varepsilon(s) * E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) * E(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{19.50}$$

在上式中，符号 * 表示卷积。因此，下列本构关系

$$D(t) = \varepsilon(\omega)E(t) \tag{19.51}$$

将会导致错误，除非 ε 是非色散的。本构关系式应该表示成式(19.50)的卷积积分形式，或者表示为一个辅助微分方程。下面给出了色散关系式、辅助微分方程和相对介电常数与频率关系曲线的三个例子。

例 19.1 德鲁德色散关系式(冷各向同性有损等离子体)：

$$\varepsilon'_r - \mathrm{j}\varepsilon''_r = \varepsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu)} \tag{19.52}$$

本构关系式可写为一个辅助微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\overline{J}}{\mathrm{d}t} + \nu\overline{J} = \varepsilon_0\omega_p^2\overline{E} \tag{19.53}$$

例如：等离子体频率

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 30\mathrm{GHz}$$

碰撞频率(见图 19.10)$\nu = 2\times10^{10}\,\mathrm{rad/s}$。◀

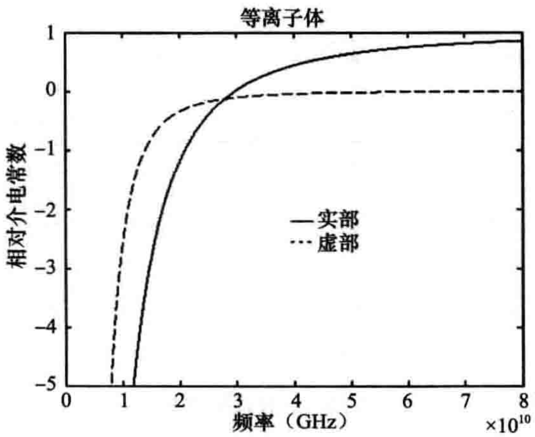


图 19.10 相对介电常数与频率的关系曲线

例 19.2 德拜色散关系式(水)

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \mathrm{j}\omega t_0} \tag{19.54}$$

$$t_0\frac{\mathrm{d}\overline{D}}{\mathrm{d}t} + \overline{D} = \varepsilon_s\varepsilon_0\overline{E} + t_0\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}t} \tag{19.55}$$

例如：低频相对介电常数 $\varepsilon_s=81$。
高频相对介电常数 $\varepsilon_s=1.8$。
弛豫时间 $t_0=9.4\times10^{-12}$s(见图 19.11)。◀

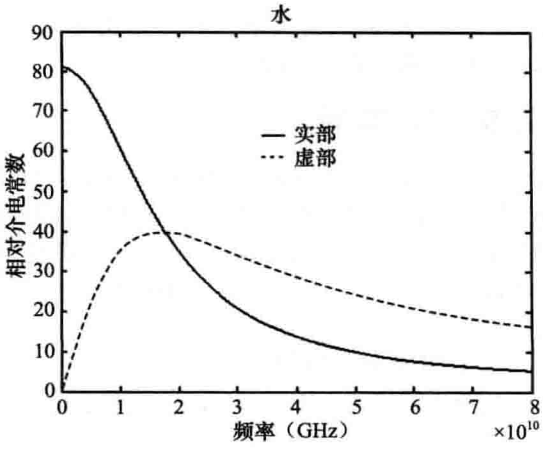


图 19.11　相对介电常数和频率的关系曲线

例 19.3 洛伦兹色散媒质(二阶，光学材料)

$$\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_\infty+\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)\omega_R^2}{\omega_R^2+2j\omega\delta-\omega^2} \tag{19.56}$$

$$\omega_R^2\overline{D}+2\delta\frac{d\overline{D}}{dt}+\frac{d^2\overline{D}}{dt^2}=\omega_R^2\varepsilon_s\varepsilon_0\overline{E}+2\delta\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d\overline{E}}{dt}+\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d^2\overline{E}}{dt^2} \tag{19.57}$$

例子：$\varepsilon_s=2.25$，$\varepsilon_\infty=1$。
谐振频率 $\omega_R=4\times10^6$ rad/s。
阻尼常数 $\delta=0.28\times10^6$/s(见图 19.12)。◀

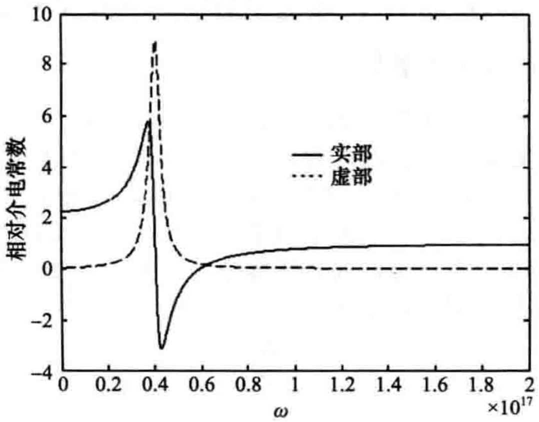


图 19.12　相对介电常数和频率的关系曲线

现在，以德拜材料为例，说明由色散关系获得辅助微分方程的方法

$$\overline{D}(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\overline{E}(\omega)=\varepsilon_0\left(\varepsilon_\infty+\frac{\varepsilon_s-\varepsilon_\infty}{1+j\omega t_0}\right)\overline{E}(\omega)$$

$$\overline{D}(\omega)(1+j\omega t_0)=\varepsilon_0\varepsilon_\infty(1+j\omega t_0)\overline{E}(\omega)+\varepsilon_0(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)\overline{E}(\omega)$$

$$j\omega t_0\overline{D}(j\omega)+\overline{D}(j\omega)=\varepsilon_0(\varepsilon_\infty+\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)\overline{E}(j\omega)+\varepsilon_0\varepsilon_\infty j\omega t_0\overline{E}(j\omega)$$

利用关系$\frac{(\partial)}{(\partial t)}=\mathrm{j}\omega$，有

$$t_0\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}+\overline{D}=\varepsilon_0\varepsilon_s t_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}+\varepsilon_0\varepsilon_s\overline{E}$$

然而，注意，在例 19.1 中，时域本构关系式将电流密度与电场联系在一起。媒质被模拟为一种导体。而频域本构关系式将 $\overline{D}$ 和 $\overline{E}$ 联系起来。

19.6 德拜材料中的波：FDTD 解

辅助微分方程(式(19.55))是德拜材料的本构关系式。计算算法由式(19.43)和式(19.45)组成，但是式(19.46)需要被替换。用 FDTD 方法离散式(19.55)就可以完成这个替换。在空间步 i 和时间步$[n+(1/2)]$应用式(19.55)，可以得到

$$\varepsilon_0\varepsilon_\infty t_0\left.\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}t}\right|_i^{n+(1/2)}+\varepsilon_0\varepsilon_s E_z\big|_i^{n+(1/2)}=t_0\left.\frac{\mathrm{d}D_z}{\mathrm{d}t}\right|_i^{n+(1/2)}+D_z\big|_i^{n+(1/2)}\tag{19.58}$$

在式(19.58)中应用中心差分近似，得到

$$\varepsilon_0\varepsilon_\infty t_0\frac{E_z\big|_i^{n+1}-E_z\big|_i^n}{\Delta t}+\varepsilon_0\varepsilon_s E_z\big|_i^{n+(1/2)}=t_0\frac{D_z\big|_i^{n+1}-D_z\big|_i^n}{\Delta t}+D_z\big|_i^{n+(1/2)}\tag{19.59}$$

由于 E_z 和 D_z 在积分时间步(n 整数)是已知的，因此不能直接得到式(19.59)中 $E_z\big|_i^{n+1/2}$和$D_z\big|_i^{n+1/2}$的值。然而，可以对这些量采用平均算子(在 Δt 内，平均算子的精度是二阶的)：

$$E_z\big|_i^{n+(1/2)}=\frac{E_z\big|_i^{n+1}+E_z\big|_i^n}{2}\tag{19.60}$$

$$D_z\big|_i^{n+(1/2)}=\frac{D_z\big|_i^{n+1}+D_z\big|_i^n}{2}\tag{19.61}$$

将式(19.60)和式(19.61)代入式(19.59)中，并将未知量放在方程的左边，可以得到

$$E_z\big|_i^{n+1}=\frac{\Delta t+2t_0}{2t_0\varepsilon_\infty+\varepsilon_s\Delta t}D_z\big|_i^{n+1}+\frac{\Delta t-2t_0}{2t_0\varepsilon_\infty+\varepsilon_s\Delta t}D_z\big|_i^n+\frac{2t_0\varepsilon_\infty-\varepsilon_s\Delta t}{2t_0\varepsilon_\infty+\varepsilon_s\Delta t}E_z\big|_i^n\tag{19.62}$$

式(19.45)、式(19.46)和式(19.62)给出了德拜材料的计算算法。

19.7 稳定极限和 courant 条件

一平面波在一维 FDTD 网格中传播。在任意时间步，波上的一点所前进的距离不可能大于一个空间网格。如果媒质是自由空间，并且这个点正好通过了一个空间网格，那么 $c\Delta t/\Delta x=r=1$。这个条件叫做 courant 条件。如果 $r>1$，那么这个点通过的距离会大于一个空间网格，导致速度 $\Delta x/\Delta t>c$，这就违背了在自由空间中波速不可能比光速大的原则。因此，选择 $r>1$ 将导致算法不稳定，这也不能通过选择一个更大的 R 值来得到更正。对于 2D 和 3D 问题，稳定性准则可以表述为

$$r=\frac{c\Delta t}{\sqrt{N}\Delta}\leqslant 1\tag{19.63}$$

式中

$$\Delta=\Delta x=\Delta y=\Delta z\tag{19.64}$$

而 N 是维数。

19.8 开放边界

19.1 节中所求解的问题的区域是在有界空间 $0<x<l$ 上，利用在两端点 $x=0$ 和 1 处的给定边界条件求得了问题的解。求反射系数和传输系数的问题涉及开放边界，其区域是 $-\infty<x<+\infty$。除非把问题的空间进行截断，否则不能求得问题的解(见图 19.13)。

假定我们决定所考虑问题的空间是 $-L_1<x<L_2$。在 $x=-L_1$ 处，反射波将是一个外行波，它不应该被反射回问题的空间中。如果波被边界所吸收，这一点可以得到保证。这样的边界条件称为吸收边界条件。下面说明一种实现边界条件的简单方法。令左边界 $x=-L_1$ 处的空间点的下标是 $i=0$，并且选择

$$r = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5 \tag{19.65}$$

上式告诉我们，一个波前通过一个空间网格需要两个时间步，也即

$$E_0^n = E_1^{n-2} \tag{19.66}$$

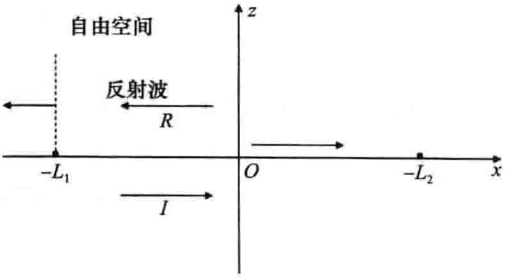


图 19.13　一维开放域问题

当计算左边界上的点的值时，只需将 E_1^{n-2} 的值存入 E_0^n 中。可以采用同样的方法对右边界 $x=L_2$ 进行截断处理。

19.9　激励源

19.1 节中所求解的问题有给定的初值，其初值是带电线路上的电压值。对于 19.8 节中的问题，入射波是给定的。如果入射波是一个单色正弦波，我们可以通过在一固定点处指定一个正弦值来模拟这个单色正弦波。这称为一个硬源。对于一个行波来说，硬源可以看做一个金属壁，当脉冲波通过时将会被反射。假设固定点记为 $i=F$，那么

$$E_F^n = \sin(2 * \mathrm{pi} * \mathrm{freq} * \mathrm{d}t * n) \tag{19.67}$$

就在空间点 $i=F$ 处产生了一个硬源。

另一方面，

$$\text{脉冲} = \sin(2 * \mathrm{pi} * \mathrm{freq} * \mathrm{d}t * n) \tag{19.68}$$

$$E_F^n = E_F^n + \text{脉冲} \tag{19.69}$$

产生一个软源。在软源激励下，传播的脉冲波可以通过。

19.10　频率响应

假定我们希望求出一个系统的频率响应。假定 19.8 节中的输出媒质是一种等离子体或有损耗电介质，我们希望求出在不同频率下的反射系数。一种方法就是在各个不同频率下逐一地对问题进行计算，由此计算出在每一个频率下的反射系数。一个更有效的方法就是以一个脉冲作为激励源，得到反射脉冲。反射脉冲的傅里叶变换与入射脉冲的傅里叶变换之比就是频率响应。如果激励源是一个冲击，它的傅里叶变换是 1，也就是说，在所有频率下其频谱的幅度是 1。一个更为实用的源是高斯脉冲，如下式所示

$$f(t) = \mathrm{e}^{-(1/2)\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2} \tag{19.70}$$

这是一个以 t_0 为中心的脉冲，其宽度(标准差)为 σ(见图 19.14)。

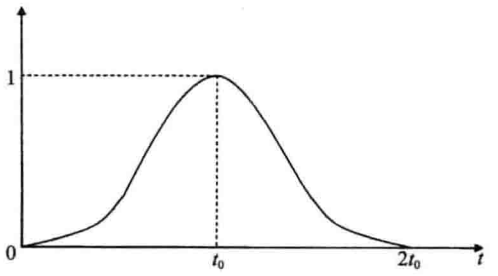


图 19.14　高斯脉冲，$\Delta t=1.875\times10^{-11}$，$\sigma=5\sqrt{2}\Delta t$，$t_0=40\Delta t$

作为一个例子，假定 $t_0=40\Delta t$，$t=n\Delta t$，$\sigma=12\Delta t$，那么[5]

$$f(n) = e^{-0.5[(n-40)/12]^2}$$

$$f(0) = f(80) = e^{-0.5[(10/3)]^2} = e^{-5.55} \approx 0$$

通过选择更小的 σ 值，可以使脉冲变得更窄。例如，假定 $\sigma=5\sqrt{2}\Delta t$

$$f(0) = f(80) = e^{-0.5\times(40/5\sqrt{2})^2} = e^{-0.5\times64\times0.5} = e^{-16} = -140\text{dB}$$

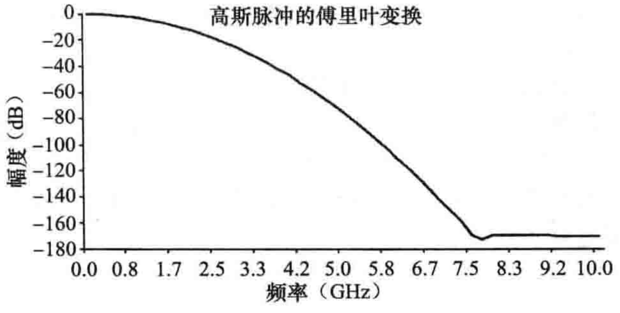


图 19.15 高斯脉冲的傅里叶变换，$\Delta t=1.875\times10^{-11}$ s，$\sigma=5\sqrt{2}\Delta t$，$t_0=40\Delta t$(经许可转载，图片来自 *Finite Differences Time Domain Method for Electromagnetics*，p. 36，CRC Press LLC，Boca Raton，FL，1993)

在图 19.15 中画出了式(19.70)的傅里叶变换的幅值分布。在 $t=0$ 或 $t=40\Delta t$ 截断脉冲并不会引入不希望的高频分量。

由快速傅里叶变换知道，很明显信号的幅值是相当充足的，达到 3GHz。然而，我们将关心噪声，假如说我们对 7GHz 或 8GHz 频段感兴趣，由于在这个频率下信号幅值是 120dB。

在得到反射脉冲后，我们可以得到反射脉冲的快速傅里叶变换，因此，可以得到在不同频率下反射脉冲幅值与入射脉冲幅值之比。

参考文献

1. Taflove, A., *Computational Electrodynamics, The Finite-Difference Time-Domain, Method,* Artech House, Norwood, MA, 1995.
2. Taflove, A. and Hagness, S., *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain, Method,* 2nd edition, Artech House Inc, Norwood, MA, 2000.
3. Sullivan, D. M., *Electromagnetic Simulation Using FDTD Method,* IEEE Press, New York, 2000.
4. Yee, K., Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell equations in isotropic media, *IEEE Trans. Ant. Prop.,* 14(3), 302–307, 1966.
5. Kunz, K. S. and Luebbers, R. J., *Finite Differences Time Domain Method for Electromagnetics,* CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1993.

第20章

电磁脉冲与开关等离子体平板相互作用的时域有限差分法模拟⊖

20.1 引言

电磁波与等离子体平板的相互作用比无界等离子体媒质更易于用实验方法来实现。当入射波向一个已经存在的等离子体平板入射时，波会遇到空间的不连续性。如果等离子体频率比入射波的频率低，此时入射波将部分地被反射和部分地被折射。当等离子体频率比入射波的频率高时，波会被完全反射，因为在等离子体中的介电常数小于零。然而，如果等离子体平板的厚度足够薄，那么波可以传输，这种现象称为隧道效应[1]。对于这种时不变等离子体，反射波和折射波的频率都与波源的频率相同，我们称这些波为A波。在等离子体内的波具有不同的波数，但是由于边界条件的要求，波频率却是相同的。

当波源在自由空间中传播和突然建立起一个等离子体平板时，从媒质性质方面来看，媒质内部的波会经历一个时间不连续。因此，开关行为产生一个新的波，它的频率被提高了，此时波会穿出等离子体平板。我们称这种波为B波。图20.1说明了这一现象。可以看到，频率为 ω_0 的波源在自由空间中传播。

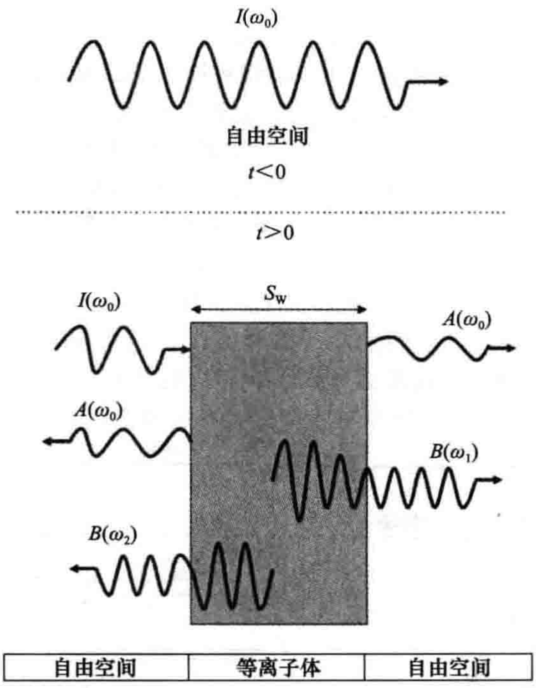


图20.1 开关一各向同性等离子体平板的效应。A波与入射波的频率 ω_0 相同，B波的频率被提高到 $\omega_1=(\omega_0^2+\omega_p^2)^{1/2}=-\omega_2$。(图片摘自Kalluri，D.K.，*IEEE Trans. Plasma Sci.*，16(1)，11—16，1988.)

⊖ 经允许转载，资料来自 *Int. J. Infrared Millim. Waves*，24(3)，349-365，March 2003.

在 $t=0$ 时刻，建立一个等离子体频率为 ω_p 的等离子体平板。在图 20.1 中，A 波与波源的频率相同。由于等离子体平板的建立，新产生了一个 B 波，其频率被提高到 $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}=-\omega_2$。第二个 B 波的频率的负号表明它是沿相反方向传播的。然而，只要这些波停留在等离子体平板内，它们的波数与波源的波数相同。当 B 波穿出等离子体平板时，它会遇到空间的不连续性，所以波数也会相应地发生变化。只有在开关动作过程的时间内，才会产生 B 波，因此它仅在一个有限时间内存在。

求等离子体平板突然开关的解析解需要进行大量的数值拉普拉斯反变换。这个问题被广泛地加以研究，例如，Kalluri 已经出版了一本采用拉普拉斯变换方法求解这个问题的理论著作[2,3]。然而，将这种方法推广应用到像有限上升时间和空间非均匀的等离子体这种更为实际的问题中是非常困难的。本章所讨论的时域有限差分(FDTD)法可以很轻松地处理这样的实际问题。

20.2 FDTD 方程的建立

考虑一个在自由空间中传播的频率为 ω_0 的连续波源。在 $t=0$ 时刻，建立一个在空间分布的等离子体平板。对于这个问题，不能假定无限大无界空间的条件，因为在开关过程以后，等离子体媒质分布在空间中的有限范围内，其中等离子体密度是确定的。因此，在 FDTD 模拟中，必须同时考虑空间域和时间域。

20.2.1 总场和散射场的公式

在 FDTD 方法中，建立空间公式会引起一个连续波源的实现问题。除非波源位于非常远的地方，否则被等离子体平板反射的波最终将到达波源，并破坏波源。考虑在网格节点 s 处有一个正弦波源：

$$E\big|_s^n=\exp[\mathrm{j}(\omega_0 n\Delta t-k_0 s\Delta z)] \tag{20.1}$$

这个波传输到我们所感兴趣的区域，并最终将被反射回波源位置，除非波源位于非常远的位置。波源好像是一个 hard 源[3]，它阻止反射波通过或传播至无限远这样的运动。因此，对所感兴趣的系统来说，hard 源产生了对散射波的非物理反射。为了合理地模拟波源的条件，对于反射波，波源必须隐藏，但仍然连续地给系统馈电。通过引入总场/散射场公式的概念可以实现这一点[4]。这种方法是基于麦克斯韦方程的线性特性，将电场和磁场分解为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{scat}} \tag{20.2}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{inc}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{scat}} \tag{20.3}$$

其中，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{inc}}$ 是入射场，并且假定在所有时间步、所有 FDTD 网格空间点上它们都是已知的。$\boldsymbol{E}_{\mathrm{scat}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{scat}}$ 是散射场(或者反射波，或者折射波)，它们在一开始都是未知的。为了实现这一想法，我们将计算域分为区域 1 和区域 2 两个区域，如图 20.2 所示。

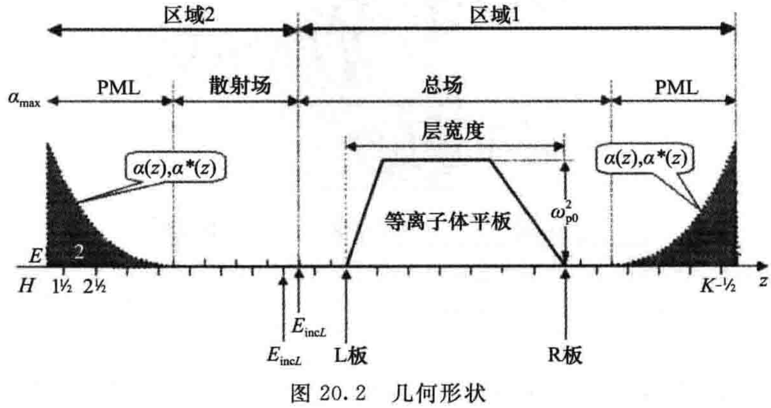


图 20.2 几何形状

区域 1 是总场区域，等离子体平板被嵌入在这个区域中。入射波一开始被赋予总场。区域 2 是散射场区域，它位于自由空间中。

在区域 1 和区域 2 的分界面上，为了向前推进一个时间步，FDTD 公式需要两个区域中场 E 和 H 的各个分量。让我们假定分界面属于区域 1，并且电场分量$E_{\text{tot}}|_L^{n+1}$位于分界面上，如图 20.2 中所示的 $E_{\text{inc}L}$。这个分量的 FDTD 方程是

$$E_{\text{tot}}|_L^{n+1} = E_{\text{tot}}|_L^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta z}(H_{\text{tot}}|_{L+(1/2)}^{n+(1/2)} - H_{\text{tot}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)}) \tag{20.4}$$

然而，$H_{\text{tot}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)}$位于区域 2 中，并没有定义。在$\left(L-\frac{1}{2}\right)$这一点，散射场$H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)}$是已知的。因此，需要对式(20.4)做一些修正，使得

$$E_{\text{tot}}|_L^{n+1} = E_{\text{tot}}|_L^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta z}(H_{\text{tot}}|_{L+(1/2)}^{n+(1/2)} - H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)}) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta z}H_{\text{inc}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} \tag{20.5}$$

由于

$$H_{\text{tot}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} = H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} + H_{\text{inc}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} \tag{20.6}$$

式中，如前所述，假定$H_{\text{inc}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)}$是已知的。

类似地，在 $L-(2/2)$处，H 场分量的公式也需要做一些修正。在这个空间点，H 场分量是散射场，因为它位于区域 2 内。FDTD 方程可以写为

$$H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} = H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n-(1/2)} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z}(E_{\text{scat}}|_L^n - E_{\text{scat}}|_{L-1}^n) \tag{20.7}$$

同样，$E_{\text{scat}}|_L^n$位于区域 1，因此没有定义。利用一些已知的场量，式(20.7)可以修正为

$$H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n+(1/2)} = H_{\text{scat}}|_{L-(1/2)}^{n-(1/2)} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z}(E_{\text{tot}}|_L^n - E_{\text{scat}}|_{L-1}^n) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z}E_{\text{inc}}|_L^n \tag{20.8}$$

由于

$$E_{\text{scat}}|_L^n = E_{\text{tot}}|_L^n - E_{\text{inc}}|_L^n \tag{20.9}$$

简而言之，将计算区域划分成区域 1(总场)和区域 2(散射场)的概念，就是给区域 1(其中嵌入了我们感兴趣的媒质)提供入射场(源)，通过在分界面处消去散射场从而将散射场从总场中分离出来。在这种模拟中，区域 1 延伸到了右端 PML 的边界。

20.2.2　空间网格截断：PML

反射波和折射波都将会传播到计算边界的末端。为了防止计算域的边界对波的数值反射，需要使用一个吸收边界条件，例如 PML。吸收边界条件的概念就是当电磁波进入一个有损耗媒质时，如果满足阻抗匹配条件，将不会出现由有损耗媒质引起的反射。对于 R 波传播，考虑有损耗媒质中的麦克斯韦方程：

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sigma^* H = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial z} \tag{20.10}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{20.11}$$

式中，σ 是电导率和σ^*是磁导率。磁导率 σ^* 不是一个物理量，它只是为了阻抗匹配的需要而引入的。由于 PML 位于自由空间中的边界上，引入磁导率将不会改变我们感兴趣的区域的物理特性。众所周知，阻抗匹配条件[5]是：$\sigma/\varepsilon_0 = \sigma^*/\mu_0$。为了简化计算，假设 $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$。这个假设隐含了变量的归一化。例如，速度都是相对于自由空间中的光速$c=3\times 10^8$ m/s 归一化的。那么，阻抗匹配条件就简化为 $\sigma=\sigma^*$。

当波在有损耗媒质中传播时，波将会衰减。然而，如果 PML 的厚度是有限的，那么波会到达边界，并被反射回系统。这种反射一般是非常微弱的，可以忽略。然而，在数值计算中，因为单位空间步长和时间步长都是有限的，所以在每一空间步都会有数值反射，

于是波源会经历电导率的突然变化，导致数值反射。为了减少这种反射，电导率必须从零连续地变化到最大值，数值模拟经验表明如下二次函数的反射非常低[5]：

$$\sigma = \sigma^* = \sigma_{\max}\left(\frac{z}{W}\right)^2 \tag{20.12}$$

式中，z 是从内部方向 PML 的起始处开始测量的距离，W 是 PML 的厚度。根据需要的 PML 的最小反射值，可以求出电导率的最大值。

20.2.3 开关等离子体平板中 R 波的 FDTD 公式

对于在磁等离子体媒质中传播的 R 波，考虑阻尼常数 ν 时，麦克斯韦方程[6]可以写为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sigma H = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial z} \tag{20.13}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_0}J \tag{20.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + \nu J = \varepsilon_0 \omega_{\mathrm{p}}^2(z,t)E \tag{20.15}$$

在上式中，ω_{p} 是等离子体频率，ν 是碰撞频率[1]。

式(20.13)～式(20.15)的 FDTD 方程可以写为

$$H\Big|_{k+(1/2)}^{n+(1/2)} = \mathrm{e}^{-\sigma\Delta t} H\Big|_{k+(1/2)}^{n-(1/2)} - \frac{1}{\mu_0 \sigma \Delta z}(1-\mathrm{e}^{-\sigma\Delta t})\left(E\Big|_{k+1}^{n} - E\Big|_{k}^{n}\right) \tag{20.16}$$

$$J\Big|_{k}^{n+(1/2)} = \mathrm{e}^{(-\nu)\Delta t} J\Big|_{k}^{n-(1/2)} + \frac{\varepsilon_0}{\nu}(1-\mathrm{e}^{(-\nu)\Delta t})\,\omega_{\mathrm{p}}^2\Big|_{k}^{n} E\Big|_{k}^{n} \tag{20.17}$$

$$E\Big|_{k}^{n+1} = \mathrm{e}^{-\sigma\Delta t} E\Big|_{k}^{n} - \frac{1}{\varepsilon_0 \sigma}(1-\mathrm{e}^{-\sigma\Delta t})\left[\frac{1}{\Delta z}\left(H\Big|_{k+(1/2)}^{n+(1/2)} - H\Big|_{k-(1/2)}^{n+(1/2)}\right) + J\Big|_{k}^{n+(1/2)}\right] \tag{20.18}$$

在式(20.17)中，当等离子体是无损耗时，取 $\nu=0$。在下面两节中，所得到的数值结果都是基于这样的假设条件。

在各种媒质中，实现式(20.16)～式(20.18)所给算法的具体参数如下：

自由空间：$\sigma=0$，$J=0$，$\omega_{\mathrm{p}}^2=0$

等离子体平板：$\sigma=0$

PML：$J=0$，$\omega_{\mathrm{p}}^2=0$

注意，对于较小的 σ，可以做出下面的近似：

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\sigma\Delta t}}{\sigma} = \Delta t \tag{20.19}$$

20.3 连续波与开关等离子体平板的相互作用

图 20.3 所示为等离子体在时间和空间中的分布。其中，(a)当到达上升时间 T_{r}时，等离子体频率达到最大值 ω_{p0}^2；(b)等离子体频率平方的空间分布，在$(S_{\mathrm{W}}-S_{\mathrm{L}}-S_{\mathrm{R}})$宽度内它是常数，在宽度 S_{L}上它是线性增大的，在宽度 S_{R}上它是线性减小的。

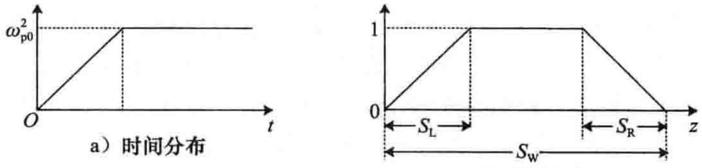


图 20.3 在空间域和时间域中等离子体的分布

当等离子体平板参数 $\omega_0=0.8$，$\omega_{\mathrm{p}}=1.0$，厚度 $S_{\mathrm{W}}=4.0\pi/\omega_{\mathrm{p}}$，$S_{\mathrm{L}}=0$，$S_{\mathrm{R}}=0$ 和上升

时间 $T_r=0$ 时，等离子体平板右边的暂态波的计算结果如图 20.4 所示。也给出了在图 20.2中“R 板”处电场分量的实部，这个波很快就消失了。因为波源的频率小于等离子体频率且等离子体平板的厚度足够大，所以仅有折射波存在，并且立刻就传播出去了。这一结果与文献[1]的结果相一致。这个波的角频率是 $\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}=1.28$，与预期的一样。

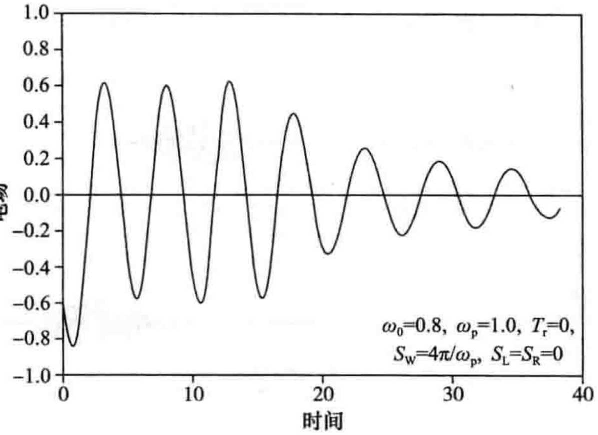


图 20.4 建立等离子体平板所产生的暂态波

20.4 脉冲波与开关等离子体平板的相互作用

对于脉冲信号的情况，很容易说明新建立的等离子体平板的相互作用。在自由空间中，考虑一个频率为 ω_0 的高斯脉冲

$$E(z,t)=\exp\left\{-\left[\frac{\omega_0 t-k_0(z-z_0)}{k_0 z_w/2}\right]^2+\mathrm{j}(\omega_0 t-k_0 z)\right\} \tag{20.20}$$

式中，z_0 是 $t=0$ 时刻脉冲的中心，z_w 是脉冲宽度。当脉冲波在自由空间中沿 z 轴传播时，建立一个等离子体平板，该等离子体平板包围整个脉冲。因而波将与等离子体平板相互作用。这种相互作用将会把脉冲分解为一个前向波和一个后向波。脉冲的磁场分量将会有一个附加模，它是一个频率为零的摆动模式。突然建立等离子体平板的一些结果如图 20.5 和图 20.6所示。参数为 $\omega_{p0}=1.5\omega_0$，$T_r=0$，$S_W=16\lambda_0$，$S_L=0.2S_W$，$S_R=0.3S_W$，脉冲宽度为 $z_w=2\lambda_0$。建立后的等离子体平板空间分布如图 20.5 中的虚线所示。图 20.5 为电场分量。图 20.5 显示出了在不同时刻电场在空间中的分布。在 $t=0^+$ 时电场是初始脉冲形状。在 $t=5T_0$ 时(这里，$T_0=2\pi/\omega_0$)，脉冲被分离为两个波，其中一个是前向行波，而另一个是反向行波。它们似乎与初始波具有相同的空间频率。当波到达等离子体平板的边界时，它们的频率提高了($t=10T_0$ 和 $t=15T_0$)。由于等离子体平板的性质在空间中是渐变的，因此在等离子体平板边界处脉冲的反射不明显。注意，当脉冲从等离子体平板中穿出来之后，脉冲就会变宽。脉冲提高的频率是 $\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}=1.8$，这个频率与无界等离子体平板情况中提高的频率相同。图 20.6中脉冲的磁场分量在起始位置有一个额外的波。这个波就是一个频率为零的摆动模式。

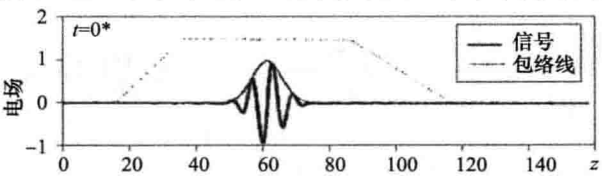


图 20.5 突然建立等离子体平板后电场随时间的变化。$T_r=0$，$\omega_p=15\omega_0$，$z_w=\lambda_0$，$S_W=16\lambda_0$，$S_L=0.2S_W$，$S_R=0.3S_W$

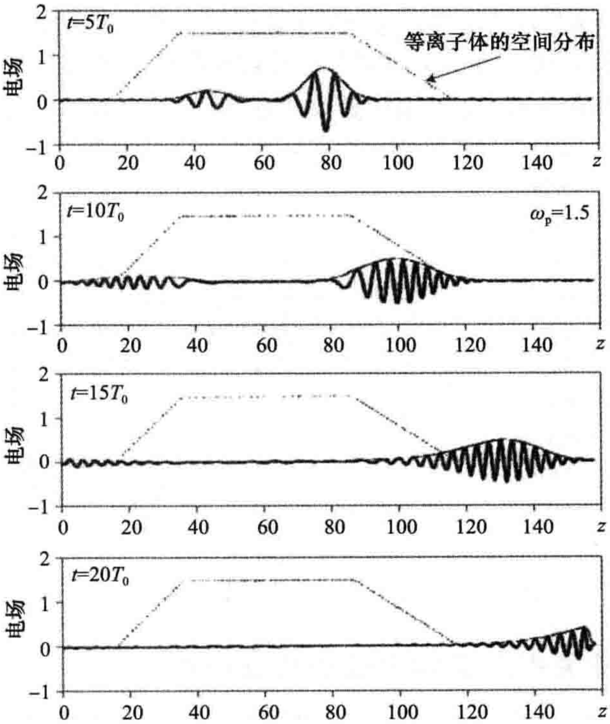


图 20.5(续)

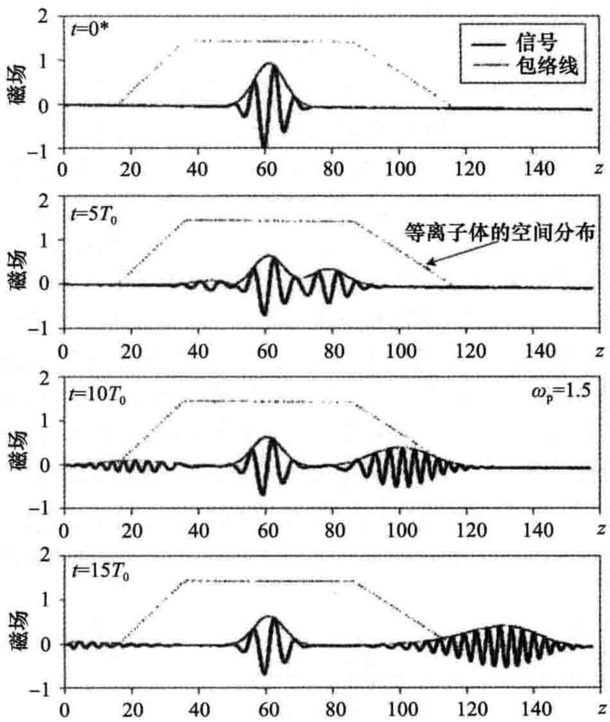


图 20.6 突然建立等离子体平板后磁场随时间的变化。$T_r=0$，$\omega_p=15\omega_0$，$z_w=2\lambda_0$，$S_W=16\lambda_0$，$S_L=0.2S_W$，$S_R=0.3S_W$

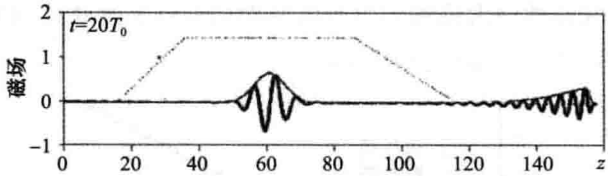


图　20.6(续)

图 20.7 从上至下分别为当等离子体平板频率 $\omega_{p0}=0$，$\omega_{p0}=0.5\omega_0$，$\omega_{p0}=1\omega_0$，$\omega_{p0}=2\omega_0$ 和 $\omega_{p0}=4\omega_0$，以及脉冲宽度为 $z_w=2\lambda_0$ 时，在等离子体平板外右边的前行波的电场随时间变化的曲线。等离子体平板的参数是 $S_W=16\lambda_0$，$S_L=0.2S_W$，$S_R=0.3S_W$，这里等离子体平板边界中的渐变降低了脉冲的反射。等离子体平板建立的上升时间是 $T_r=2T_0$，这将抑制脉冲中反向行波的产生。在这些参数下，脉冲将保持它原有的形状，但是当等离子体频率增大时它会变为一个更高频率的脉冲。当 ω_{p0} 增大时，脉冲的宽度减小，这可以理解为脉冲展宽。脉冲展宽表明等离子体媒质色散特性的根本性质。由于群速度依赖于等离子体频率，其值为 $v_g=c\omega_0/\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$，随着等离子体频率的增大，脉冲相应地延迟得更多。等离子体的建立不会给脉冲提供任何额外的能量，因此，当脉冲展宽后波的幅值会减小。图 20.8 所示为等离子体右边界之外的脉冲的电场分量的频率、峰值幅度和脉宽。脉冲持

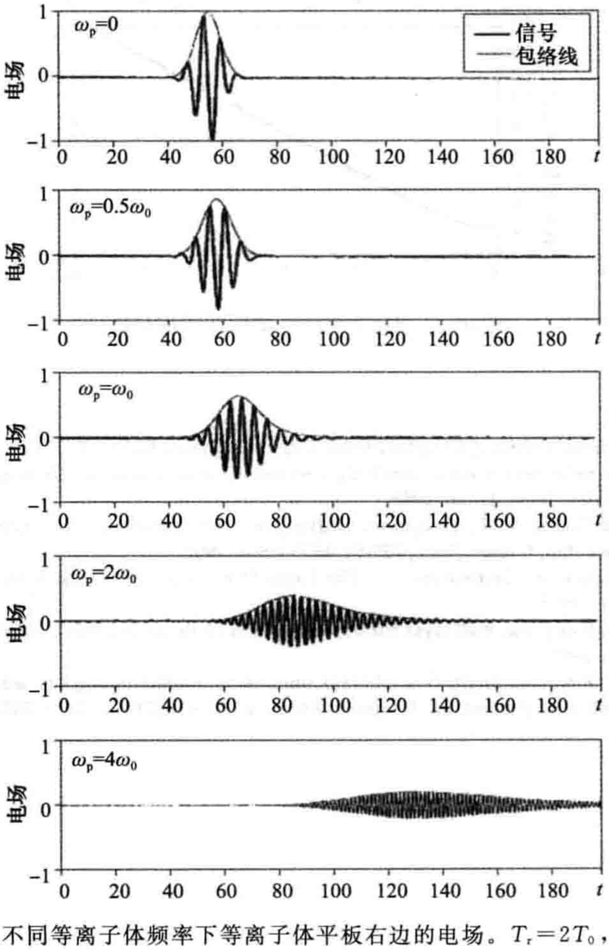


图 20.7　不同等离子体频率下等离子体平板右边的电场。$T_r=2T_0$，$z_w=2\lambda_0$，$S_W=16\lambda_0$，$S_L=0.2S_W$，$S_R=0.3S_W$

续时间是通过在包络线函数最大值的 e^{-1}(=0.368)倍的点上测量得到的。脉冲的频率与无界等离子体频率相同，也就是 $\omega=\sqrt{\omega_0^2+\omega_{p0}^2}$。

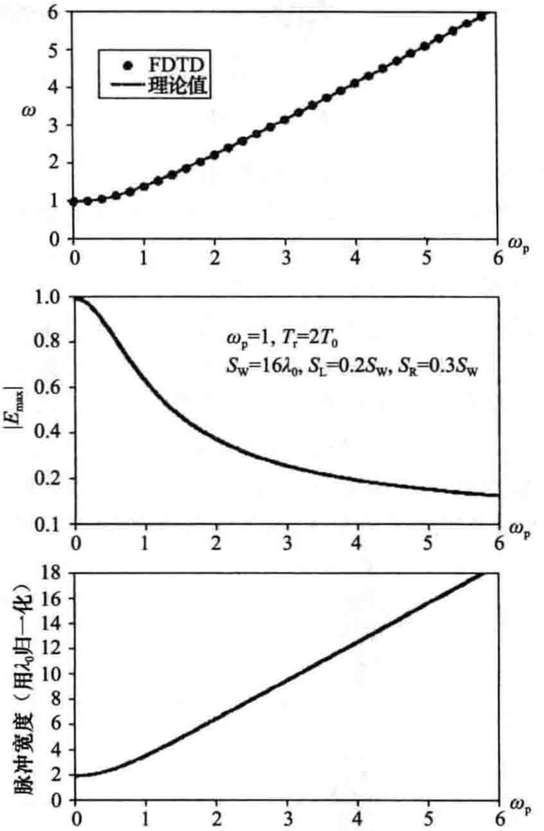


图 20.8　图 20.7 中电场的脉冲的特性

参考文献

1. Kalluri, D. K., *Electromagnetics of Complex Media*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
2. Kalluri, D. K., On reflection from a suddenly created plasma half-space: Transient solution, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 16(1), 11–16, 1988.
3. Kalluri, D. K. and Goteti, V. R., Frequency shifting of electromagnetic radiation by sudden creation of a plasma slab, *J. Appl. Phys.*, 72(10), 4575–4580, 1992.
4. Taflove, A., *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, Artech House, Boston, MA, 1995.
5. Berenger, J. P., A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.*, 114, 185–200, 1994.
6. Lee, J. H., Kalluri, D. K., and Nigg, G. C., FDTD simulation of electromagnetic transformation in a dynamic magnetized plasma, *Int. J. Infrared Millimeter Waves*, 21(8), 1223–1253, 2000.

第21章

基于微扰和变分技术的近似解析方法⊖

有限元方法(FEM)、FDTD方法、矩量法等数值方法和基于这些方法的电磁软件已经在工业中得到了广泛的应用。然而，每当不可能得到精确解析解和精确解时，近似解析解在对问题进行定性分析时可以起到重要的作用。此外，在许多情况中，近似解析解所给出的可接受的近似解需要较少计算量，有效地减轻了计算负担。无论如何，近似解析解方法有着丰富的历史，可以追溯到人类还没有完全依赖于计算机的时代。

本章的主要目的是介绍这些近似分析方法的例子。参考文献[1～4]对这些解做了更为详细的阐述。

21.1 空腔的微扰

可调谐微波源由一个连在空腔谐振器上的微波发生器所构成。其调谐频率就是空腔的谐振频率。改变空腔壁，即扰动空腔壁，可以在一定范围内改变调谐频率。

图21.1显示出了金属螺丝的两个位置。位置1的坐标是

$$P_1\left(\frac{a}{2},b,\frac{d}{2}\right)$$

位置2的坐标是

$$P_2\left(a,\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right)$$

若在位置1处将金属螺钉拧入，我们将证明矩形空腔的TE_{101}模式的谐振频率会降低。而在位置2处将金属螺钉拧入，谐振频率却会提高。可以用微扰法来证明这些结果。

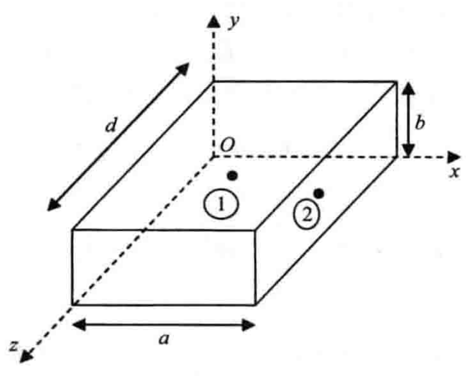


图21.1 有一个金属螺丝的矩形空腔

21.1.1 空腔壁微扰理论

假定我们有一个由PEC面S所构成的空腔，空腔的体积为τ，其谐振频率为ω_0，场量分别为$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$与$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0$(见图21.2a)。

如图21.2b所示，由于空腔变形，现在使得PEC面变成$S'=S-\Delta S$，它所包围的体

⊖ 第21章的附录参见附录21A。

积为 $\Delta\tau$。令$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$是被扰动空腔内的场。我们希望求出被扰动空腔的谐振频率ω。

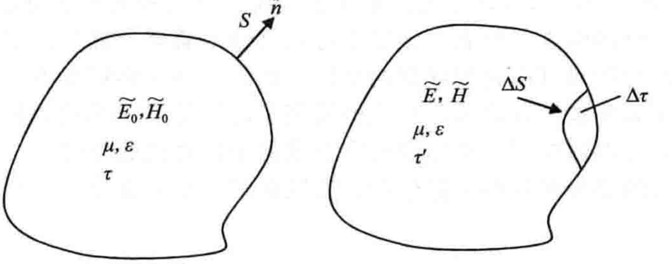
在上述两种情况下，必须满足的场方程为：

$$-\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0=\mathrm{j}\omega_0\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 \quad (21.1\mathrm{a})$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}_0=\mathrm{j}\omega_0\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \quad (21.1\mathrm{b})$$

$$-\overline{\nabla}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=\mathrm{j}\omega\mu\widetilde{\boldsymbol{H}} \quad (21.2\mathrm{a})$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}=\mathrm{j}\omega_0\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} \quad (21.2\mathrm{b})$$



a）原始空腔　　b）被扰动空腔

图 21.2 空腔壁微扰

由式(21.2b)和式(21.1a)，可得

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*\ \widetilde{\boldsymbol{E}} \quad (21.3\mathrm{a})$$

$$-\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*=-\mathrm{j}\omega_0\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^* \quad (21.3\mathrm{b})$$

现在，将矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B} \quad (21.4)$$

应用于式(21.3b)和式(21.3a)相加后所得到的表达式，有

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}-\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*=\mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*-\mathrm{j}\omega_0\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}$$

$$-\nabla\cdot(\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*)=\mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*-\mathrm{j}\omega_0\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^* \quad (21.5)$$

对式(21.2a)和式(21.1b)进行同样的运算，得到

$$\nabla\cdot(\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\times\widetilde{\boldsymbol{E}})=\mathrm{j}\omega\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*-\mathrm{j}\omega_0\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}} \quad (21.6)$$

将式(21.5)和式(21.6)相加后，在 τ 上积分，并利用散度定理

$$\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oiint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad (21.7)$$

得到如下表达式

$$\oiint_{S'}(\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*)\cdot\overline{\mathrm{d}}S+\underbrace{\oiint_{S'}(\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\cdot\overline{\mathrm{d}}S}_{\text{项1}}$$

$$=\iiint_{\tau'}\mathrm{j}\varepsilon(\omega-\omega_0)\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}^*\,\mathrm{d}\tau+\iiint_{\tau'}\mathrm{j}\mu(\omega-\omega_0)\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\,\mathrm{d}\tau \quad (21.8)$$

式(21.8)中的项 1 是零，因为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\times\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\times\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{n})$$

$$=\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\hat{n})\quad\text{（在三重标量积中，交换}\cdot\text{和}\times\text{）}$$

$(\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\hat{n})$是$\widetilde{\boldsymbol{E}}$的切向分量，它在理想导体表面上是零。

因此，式(21.8)变为

$$\oiint_{S'}(\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\iiint_{\tau'}(\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*+\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*)\mathrm{d}\tau \quad (21.9)$$

注意

$$\iint_S \widetilde{\boldsymbol{H}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^* \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \widetilde{\boldsymbol{H}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^* \times \hat{n}) \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{21.10}$$

注意，$(\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \times \hat{n})$是理想导体表面上$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$ 的切向分量，它是零，因此式(21.10)等于零。

由式(21.9)和式(21.10)，可得

$$\oiint_{S'-S} (\widetilde{\boldsymbol{H}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{j}(\omega - \omega_0) \iiint_{\tau'} (\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^* + \mu \widetilde{\boldsymbol{H}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*) \mathrm{d}\tau \tag{21.11}$$

如果注意 $S' = S - \Delta S$，则式(21.11)变为

$$\omega - \omega_0 = \frac{-\dfrac{1}{\mathrm{j}} \iint_{\Delta S} (\widetilde{\boldsymbol{H}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\iiint_{\tau'} [(\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) + (\mu \widetilde{\boldsymbol{H}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*)] \mathrm{d}\tau} \tag{21.12}$$

式(21.12)是一个准确的公式。

在式(21.12)中，最粗糙的一个近似就是分别用$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$ 和$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0$ 替代分子和分母中的$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$。对于小扰动，在分母中这种近似是合理的。如果变形浅并且光滑，那么在分子中进行这种替换也不是一种坏的近似：

$$\oiint_{\Delta S} (\widetilde{\boldsymbol{H}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \approx \oiint_{\Delta S} (\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{21.13}$$

根据附录 21A 中给出的复坡印廷定理，有

$$\oiint_{\Delta S} (\widetilde{\boldsymbol{H}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_0^*) \cdot \overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{S} = \mathrm{j}\omega_0 \iiint_{\Delta\tau'} [\varepsilon |\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 - \mu |\widetilde{\boldsymbol{H}}_0|^2] \mathrm{d}\tau \tag{21.14}$$

因此，可以得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\iiint_{\Delta\tau} [\mu |\widetilde{\boldsymbol{H}}_0|^2 - \varepsilon |\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2] \mathrm{d}\tau}{\iiint_{\tau} [\varepsilon |\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 + \mu |\widetilde{\boldsymbol{H}}_0|^2] \mathrm{d}\tau} \tag{21.15}$$

式(21.15)可以写为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\langle \Delta W_\mathrm{m} \rangle - \langle \Delta W_\mathrm{e} \rangle}{\langle W \rangle} \tag{21.16}$$

在式(21.16)中，$\Delta\omega$ 是谐振频率的变化量。$\langle \Delta W_\mathrm{m} \rangle$、$\langle \Delta W_\mathrm{e} \rangle$与在 $\Delta\tau$ 内最初的时间平均电场和磁场能量成比例。如果 $\Delta\tau$ 很小，分母与存储在原始空腔中的总能量成比例，这样可以将式(21.16)写为

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx C \frac{\Delta\tau}{\tau} \tag{21.17a}$$

$$C = \frac{\langle w_\mathrm{m} \rangle - \langle w_\mathrm{e} \rangle}{\langle w_\tau \rangle} \tag{21.17b}$$

式中，$\langle w_\tau \rangle$是$\langle w \rangle / \tau$，它是空间平均值。在上式中，小写的 w 用于表示能量密度。

注意，假定对一个向内的扰动 $\Delta\tau$ 是正的，推出了上式所示的结果。如果$\langle w_\mathrm{m} \rangle > \langle w_\mathrm{e} \rangle$，常数 C 是正的，也就是说，在 H 比较大的一个点上进行了扰动，因此 C 是正的且 $\omega > \omega_0$。在这样一点上的向内扰动将会提高谐振频率。如果扰动是在 E 比较大的一个点上，那么向内扰动将会降低谐振频率。向外扰动将会导致相反的结果。

用上面的分析结果，确定在图 21.1 的位置 1 处引入一个向内扰动所产生的频率变化量。让矩形空腔运行于 TE_{101} 模式。其场量是

$$\widetilde{E}_y = D \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{d} \tag{21.18a}$$

$$\widetilde{H}_z = A \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{d} \tag{21.18b}$$

$$\widetilde{H}_x = B\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{d} \tag{21.18c}$$

对于位置 1，

$$x = \frac{a}{2},\quad z = \frac{d}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_y\left(\frac{a}{2},b,\frac{d}{2}\right) &= D\\ \widetilde{H}_z\left(\frac{a}{2},b,\frac{d}{2}\right) &= 0\\ \widetilde{H}_x\left(\frac{a}{2},b,\frac{d}{2}\right) &= 0\end{aligned}\right\}\quad 在\ P_1\ 点 \tag{21.19}$$

电场是最大值，而磁场是零。因此，向内扰动使谐振频率降低。另一方面，在 $P_2\left(a,\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right)$ 点，得到

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_y\left(a,\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right) &= 0\\ \widetilde{H}_z = \left(a,\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right) &= -A\\ \widetilde{H}_x = \left(a,\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{21.20}$$

因为在这一点的时间平均磁场能量密度很大，而在这一点的电场能量密度是零，所以在这一点的向内扰动将使谐振频率提高。

可以证明，对于 P_1 点，由式(21.17b)得出，$C=-2$。

21.1.2 空腔材料的微扰[1]

图 21.3 定义了这个问题。从下面方程开始：

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 = -\mathrm{j}\omega_0\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 \tag{21.21a}$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 = \mathrm{j}\omega_0\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \tag{21.21b}$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega(\mu+\Delta\mu)\widetilde{\boldsymbol{H}} \tag{21.22a}$$

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{21.22b}$$

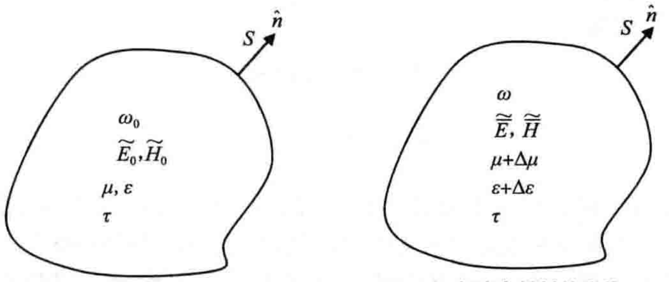


图 21.3 空腔材料微扰

对于理想导体壁，可以证明

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} \approx \frac{-\iiint_\tau(\Delta\varepsilon\,\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^* + \Delta\mu\,\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*)\mathrm{d}\tau}{\iiint_\tau(\varepsilon\,\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_0^* + \mu\,\widetilde{\boldsymbol{H}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}_0^*)\mathrm{d}\tau} \tag{21.23}$$

当 $\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\mu$ 的变化都比较小时，在式(21.23)中，又可以用 $\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$ 替换 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$，用 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_0$ 替换 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$：

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\approx\frac{-\iiint_\tau(\Delta\varepsilon|\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2+\Delta\mu|\widetilde{\boldsymbol{H}}_0|^2)\mathrm{d}\tau}{\iiint_\tau(\varepsilon|\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2+\mu|\widetilde{\boldsymbol{H}}_0|^2)\mathrm{d}\tau} \tag{21.24}$$

$\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\mu$ 增大一点只能使谐振频率减小。

假定我们希望考虑在一个小区域 $\Delta\tau$ 内 ε 和 μ 有一个大变化。如果这个小区域与波长相比很小，我们就可以使用准静态近似，因为亥姆霍兹方程可以用拉普拉斯方程来近似。

例 21.1 我们考虑一个矩形空腔内的 TE_{101} 模式。在空腔的底部放置一个厚度为 δ 的电介质薄板，即

$$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r,\quad 0<y<\delta$$
$$\varepsilon=\varepsilon_0,\quad \delta<y<b$$

在式(21.23)中，在 $0<y<\delta$ 之外，$\Delta\varepsilon$=零，在图 21.4 中的每一点 $\Delta\mu$ 是零。因此，分子中的积分区域是电介质层。在分子中将使用的电场 $\widetilde{\widetilde{E}}$ 是电介质中的扰动电场。在静电近似中，利用 $y=\delta$ 处的下列边界条件可以得到这个电场：

$$D_{n1}=D_{n2}$$

$$\varepsilon_r\varepsilon_0E_\mathrm{d}=\varepsilon_0E_0;\quad E_\mathrm{d}=\frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{21.25a}$$

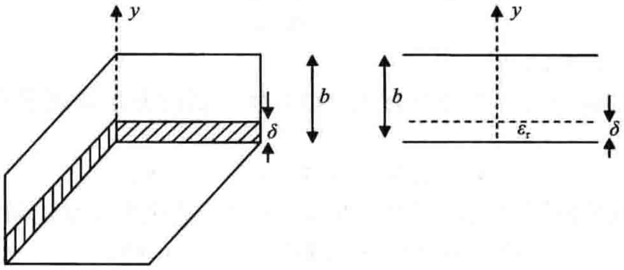


图 21.4　空腔中的电介质薄板

在分子中可以用 E_d 替换 E，在分母中可以分别用 E_0 和 H_0 替换 E 和 H，因为受扰动的部分只是空腔中的一小部分。

那么，分母是 $2\varepsilon_0\iiint_\tau|\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2\mathrm{d}\tau$

$$分母=2\varepsilon_0\iiint_\tau|\widetilde{\boldsymbol{E}}_0|^2\mathrm{d}\tau \tag{21.25b}$$

而分子是

$$分子=-\iiint_{\Delta\tau}\Delta\varepsilon(E_\mathrm{d}\cdot E_0^*)\mathrm{d}\tau \tag{21.25c}$$

在 $\Delta\tau$ 内，

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r-\varepsilon_0=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1) \tag{21.25d}$$

因此，

$$分子=-(常数)\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\delta$$

分母=2(与分子中一样的常数)b：

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\approx\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{b} \tag{21.26}$$

在上式中，常数等于 $\varepsilon_0E_0^2$ 乘以底面积：

$$常数=(底面积)\varepsilon_0E_0^2 \tag{21.27}$$

21.2 变分技术和稳定公式

21.2.1 瑞利商

令 $\boldsymbol{X}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，即

$$\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X} \tag{21.28}$$

这里，λ 是特征值。

瑞利商是

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} \tag{21.29}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 是一个列向量，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 是一个行向量，$\boldsymbol{A}$ 是一个方阵。

如果将式(21.28)代入式(21.29)中，那么，可以得到

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} = \lambda\frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} = \lambda \tag{21.30}$$

当 $\boldsymbol{X}$ 是一个精确的特征向量时，瑞利商与特征值相同。假定有一个近似的 $\boldsymbol{X}$，称为 $\boldsymbol{V}$，它在某种意义上有一个误差 ε。可以证明，在这种情况下瑞利商近似地等于 λ，其误差为 ε^2。也就是说，如果 $\boldsymbol{V}$ 的误差是 0.1(10%)，那么

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}} \tag{21.31}$$

的误差将是$(0.1)^2=0.01(1\%)$。

瑞利商是矩阵特征值的一个静态公式。可以用下面的方法来证明这一点：

令

$$\boldsymbol{V} = a_1\boldsymbol{V}_1 + a_2\boldsymbol{V}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{V}_n \tag{21.32}$$

式中，$\boldsymbol{V}$ 是一个近似的特征向量，而 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，…，$\boldsymbol{V}_n$ 是这个 n 维空间中的精确特征向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AV} &= a_1\boldsymbol{AV}_1 + a_2\boldsymbol{AV}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{AV}_n \\ &= a_1\lambda_1\boldsymbol{V}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{V}_2 + \cdots + a_n\lambda_n\boldsymbol{V}_n\end{aligned} \tag{21.33}$$

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = a_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} + a_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + a_n\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{T}} \tag{21.34}$$

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}})\right\}\{\boldsymbol{A}\}\left\{\sum_{j=1}^{n}(a_j\boldsymbol{V}_j)\right\}}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}})\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n}(a_j\boldsymbol{V}_j)\right\}} \tag{21.35}$$

特征向量的正交特性可以写成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_j = 0, \quad i \neq j \\ &\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_j = 1, \quad i = j \ \ (\text{如果 } \boldsymbol{V} \text{ 归一化了})\end{aligned} \tag{21.36}$$

在计算式(21.8)中的分子时，可以采用下面的简化方法。在求和式中一个典型的项是

$$a_i\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}a_j\boldsymbol{V}_j = a_ia_j\lambda_j\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_j = \begin{cases}0, & i \neq j \\ a_i^2\lambda_i, & i = j\end{cases}$$

因此，式(21.35)变为

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} \tag{21.37}$$

$\boldsymbol{V}$ 近似等于 $\boldsymbol{V}_1$，误差阶数是 ε，这意味着

$$\frac{a_j}{a_1}, \quad j = 2,\cdots,n \text{ 分别是误差的阶数 } \varepsilon, \left(\frac{a_j}{a_1}\right)^2 \text{ 是误差的阶数 } \varepsilon^2$$

且

$$\lambda_R = \lambda_1 \frac{a_1^2[1+O(\varepsilon^2)]}{a_1^2[1+O(\varepsilon^2)]}$$

$$\lambda_R = \lambda_1[1+O(\varepsilon^2)]$$

21.2.2　变分公式：标量亥姆霍兹方程

令 Φ 为一个标量场，那么标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\Phi + \lambda\Phi = 0 \tag{21.38}$$

就是一个特征值问题。用 Φ 乘以式(21.38)并在体积 τ 上进行积分，就可以将这个特征值问题转换为一个变分形式：

$$\iiint_\tau \Phi\nabla^2\Phi \mathrm{d}\tau + \lambda\iiint_\tau \Phi^2 \mathrm{d}\tau = 0 \tag{21.39}$$

$$\lambda = -\frac{\iiint_\tau \Phi\nabla^2\Phi \mathrm{d}\tau}{\iiint_\tau \Phi^2 \mathrm{d}\tau} \tag{21.40}$$

可以用下式来修正这个方程

$$\nabla\cdot[\Phi\nabla\Phi] = \Phi\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi \tag{21.41}$$

此时，得到

$$\lambda = -\frac{\iiint_\tau \{\nabla\cdot[\Phi\nabla\Phi] - |\nabla\Phi|^2\} \mathrm{d}\tau}{\iiint_\tau \Phi^2 \mathrm{d}\tau}$$

利用散度定理，得到

$$\lambda = -\frac{\iiint_\tau |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\tau - \oiint_S \Phi\nabla\Phi\cdot \overline{\mathrm{d}S}}{\iiint_\tau \Phi^2 \mathrm{d}\tau} \tag{21.42}$$

式中，S 是限定体积 τ 的闭合曲面。对于齐次边界情况，即

$$\Phi(r)|_S = 0 \text{ 或者 } \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{21.43}$$

式(21.42)中的面积分将变为零。

因此，有

$$\lambda = -\frac{\iiint_\tau |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\tau}{\iiint_\tau \Phi^2 \mathrm{d}\tau} \tag{21.44}$$

可以证明，式(21.44)就是变分原理，也就是说，如果 Φ 是一个特征函数，那么 λ 就是相应的特征值。而且，如果 $\Phi_{试探}$ 是一个误差为 ε 的近似特征向量，那么由式(21.44)计算出来的 $\lambda_{试探}$ 将是相应的特征值，其误差为 ε^2。我们通过一个简单的例子来说明式(21.44)的应用，对于这个例子可以得到准确解。

例 21.2 在这个例子中，我们计算图 21.5 所示的矩形波导中 TM 主模的特征值。

在 3.2 节中，我们利用下式研究了 TM 模式

$$\widetilde{E}_z(x,y,z) = F(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

式中，$F(x,y)$满足如下方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_c^2 F = 0 \tag{21.45}$$

且

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \tag{21.46}$$

比较式(21.45)和式(21.39)，注意，k_c^2 就是特征值 λ，而且在直角坐标系下需要求解一个二维问题，也就是说，可以用$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$替换$\nabla^2$。这样，式(21.44)变为

$$k_c^2 = \lambda = \frac{\iint_S |\nabla F|^2 \mathrm{d}S}{\iint_S F^2 \mathrm{d}S} \tag{21.47}$$

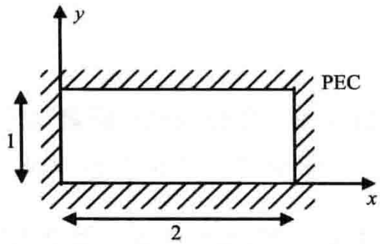


图 21.5 矩形波导的横截面

对于 TM 模式，在边界面 $x=0$ 或者 $y=0$，1 上，边界条件 $E_z=0$ 转化为 $F=0$；$x=0$ 或 2；$F=0$；$y=0$ 或 1。

一个满足这些边界条件的试探函数可以写为

$$\begin{aligned} F_{试探} &= cx(2-x)y(1-y) \\ &= c(2x-x^2)(y-y^2) \end{aligned} \tag{21.48}$$

式中，c 是常数。

$$\frac{F_{试探}}{\partial x} = c(2-2x)(y-y^2)$$

$$\frac{F_{试探}}{\partial y} = c(2x-x^2)(1-2y)$$

$$\begin{aligned} |-F_{试探}|^2 &= \left(\frac{F_{试探}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{F_{试探}}{\partial y}\right)^2 \\ &= c^2[4y^2(1-x)^2(1-y)^2 + (1-2y)^2x^2(2-x)^2] \\ F_{试探}^2 &= c^2x^2(2-x)^2y^2(1-y)^2 \end{aligned} \tag{21.49}$$

可以得到

$$\lambda_{试探} \approx 12.5 \tag{21.50}$$

可以由下式计算出 λ 的准确值

$$k_c^2 = \lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad m=1, n=1, a=2, b=1$$

$$\lambda = 12.337 \tag{21.51}$$

由于式(21.47)是变分原理，我们得到的 $\lambda_{试探}$ 与精确值之间的误差在 1.3% 范围以内。◀

21.2.3 变分公式：矢量亥姆霍兹方程

我们从矢量亥姆霍兹方程开始，其中 $\varepsilon(r)$ 可以是一个非均匀电介质的介电常数。

电场的方程是

$$\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}} - \omega^2\mu\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{21.52}$$

取 $\widetilde{E}$ 和式(21.52)的点乘并积分。现在可以将式(21.52)写成如下变分形式

$$\omega_r^2 = \frac{\iiint_\tau \widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}{\mu\iiint_\tau \varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}^2\mathrm{d}\tau} \tag{21.53}$$

可以通过下面的方法来证明式(21.53)就是变分原理。

令

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{试探} = \widetilde{\boldsymbol{E}} + \Delta\widetilde{\boldsymbol{E}} = \widetilde{\boldsymbol{E}} + p\widetilde{\boldsymbol{e}} \tag{21.54}$$

式中，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$是真实的电场，试探电场用一个任意的参数 p 来表示。将式(21.54)代入式

(21.53)中，并且使用$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{试探}$，有

$$\omega^2(p)=\frac{\iiint_\tau(\widetilde{\boldsymbol{E}}+p\widetilde{\boldsymbol{e}})\cdot(\nabla\times\nabla\times(\widetilde{\boldsymbol{E}}+p\widetilde{\boldsymbol{e}}))\mathrm{d}\tau}{\mu\iiint_\tau\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{E}}+p\widetilde{\boldsymbol{e}})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{E}}+p\widetilde{\boldsymbol{e}})\mathrm{d}\tau} \tag{21.55}$$

对于固定的$\widetilde{e}$来说，这里已经证明了 ω^2 是 p 的函数。ω^2 的麦克劳林展开式是

$$\omega^2(p)=\omega_\mathrm{r}^2+p\frac{\partial}{\partial p}(\omega^2)\bigg|_{p=0}+\frac{p^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p^2}(\omega^2)\bigg|_{p=0}+\cdots \tag{21.56}$$

因为 $\omega^2(0)=\omega_\mathrm{r}^2$，所以第一项是真实的谐振频率。在变分学中，式(21.56)可以写为

$$\omega^2(p)=\omega_\mathrm{r}^2+p\delta(\omega^2)+\frac{p^2}{2!}\delta^2(\omega^2)+\cdots \tag{21.57}$$

$\delta(\omega^2)$称为 ω^2 的一阶变分，$\delta^2(\omega^2)$称为 ω^2 的二阶变分，等等。

如果 ω^2 的一阶变分为零，那么 ω^2 的公式就是静止的，也就是说

$$\frac{\partial}{\partial p}(\omega^2)\bigg|_{p=0}=0 \tag{21.58}$$

如果将式(21.55)看做$\dfrac{N}{D}$，那么式(21.58)可以由下式计算

$$\frac{\partial}{\partial p}(\omega^2)\bigg|_{p=0}=\frac{D(0)N'(0)-N(0)D'(0)}{D^2(0)}$$

$$N'(0)=\iiint_\tau(\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}}+\widetilde{\boldsymbol{e}}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau \tag{21.59}$$

根据矢量恒等式，有

$$\iiint_\tau(\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\mathrm{d}\tau=\iiint_\tau(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\cdot(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau+\oint\!\!\!\oint_S[(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\times\widetilde{\boldsymbol{E}}]\mathrm{d}S$$

右端的最后一项是零，因为

$$\oint\!\!\!\oint_S(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\times\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_S(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{E}}\times\hat{n})\mathrm{d}S$$

上的理想导体边界条件是$\hat{n}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=0$。

右端的第一项是

$$\iiint_\tau(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{e}})\cdot(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau=\iiint_\tau(\boldsymbol{e}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau-\oint\!\!\!\oint_S(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\times\widetilde{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S$$

由式(21.52)注意到，$\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=\omega_\mathrm{r}^2\mu\varepsilon$。

综合上面的结果，可以得到

$$N'(0)=2\omega_\mathrm{r}^2\mu\iiint_\tau\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{e}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau-\iiint(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{e}}\times\hat{n})\mathrm{d}S \tag{21.60}$$

我们也可以证明

$$D'(0)=2\mu\iiint\varepsilon\,\widetilde{\boldsymbol{e}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$$

由式(21.59)[1]，有

$$\frac{\partial}{\partial p}(\omega^2)\bigg|_{p=0}=\frac{D(0)N'(0)-N(0)D'(0)}{D^2(0)}$$

$$=-\frac{\oint\!\!\!\oint_S(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{n})\mathrm{d}S}{\mu\iiint_\tau\varepsilon E^2\mathrm{d}\tau} \tag{21.61}$$

当在 S 面上$\hat{n}\times\widetilde{\boldsymbol{e}}=0$ 时，上式就变为零，这反过来也意味着在 S 面上$\hat{n}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_{试探}=0$。因此，如果试探电场$\widetilde{\boldsymbol{E}}$的切向分量在空腔壁上为零，那么式(21.53)就是谐振频率的一

个静态公式。

注意，式(21.53)可以写为更对称的形式：

$$\omega_r^2=\frac{\iiint_\tau |\nabla\times \widetilde{\boldsymbol{E}}|^2 d\tau}{\mu\iiint_\tau \varepsilon E^2 d\tau} \tag{21.62}$$

例 21.3[1] 如图 21.6 所示，有一个高度为 d、半径为 a 的圆柱形空腔。当 $d<2a$ 时，主模式是 TM_{010} 模式，具有

$$E_z=c_1 J_0\left(\frac{2.405\rho}{a}\right)$$

$$H_\varphi=c_2\frac{2.405}{a}J_1\left(\frac{2.405\rho}{a}\right)$$

$$\omega_r=\frac{2.405}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

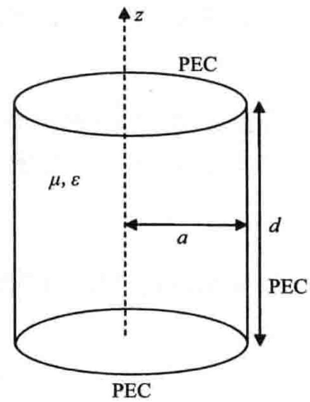


图 21.6 圆柱形空腔

利用变分原理求 ω_r 的估计值。

选择

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{试探}=\hat{z}\left(1-\frac{\rho}{a}\right)$$

注意，试探函数满足空腔壁上的边界条件 $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{tan}=0$。

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_{试探}=\frac{1}{a}\hat{\varphi}$$

由式(21.61)，有

$$\omega_r^2=\frac{\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{d}\frac{1}{a^2}\rho d\rho d\varphi dz}{\mu\varepsilon\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{d}\left(1-\frac{\rho}{a}\right)^2\rho d\rho d\varphi dz}$$

$$=\frac{\int_0^a\frac{\rho}{a^2}d\rho}{\int_0^a\left(1-\frac{\rho}{a}\right)^2\rho d\rho}=\frac{6}{\mu\varepsilon a^2}$$

$$\omega_r=\frac{\sqrt{6}}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{2.449}{a\sqrt{\mu\varepsilon}};\quad 误差=\frac{2.449-2.405}{2.405}$$

使用这个试探函数的误差是 1.8%。 ◀

参考文献

1. Harrington, R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, NY, 1968.
2. Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, NY, 1964.
3. Khalifeh, A. F., *Perturbation technique as applied to space-varying and time-varying electromagnetic systems*, Doctoral thesis, University of Massachusetts Lowell, Lowell, MA, 2005.
4. Ji, C., *Approximate analytical techniques in the study of quadruple-ridged waveguide (QRW) and its modifications*, Doctoral thesis, University of Massachusetts Lowell, Lowell, MA, 2007.

第四部分

附　录

附录1A

矢量公式和坐标系

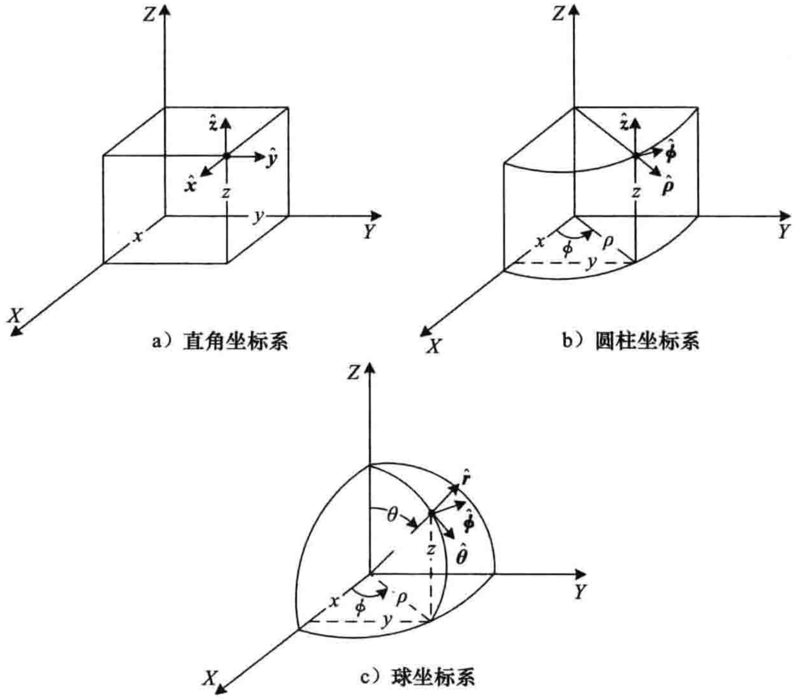
1A.1 矢量变换

本附录将按照文献[1]中给出的材料顺序进行编写，在许多教教材中都是按照参考文献[1]的顺序编写的。图 1A.1 所示为 3 种坐标系，(a)直角坐标系，(b)圆柱坐标系和(c)球坐标系。

1A.1.1 直角坐标到圆柱坐标(和圆柱坐标到直角坐标)变换

参考图 1A.1b，由直角坐标系(x，y，z)到圆柱坐标系(ρ，φ，z)的坐标变换由下式给出

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi \\
y &= \rho\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
\tag{1A.1}
$$



a) 直角坐标系　b) 圆柱坐标系　c) 球坐标系

图 1A.1　三种坐标系

在直角坐标系中，矢量 **A** 可以写为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \tag{1A.2}$$

式中，$\hat{x}$、$\hat{y}$和$\hat{z}$是直角坐标系中的单位矢量，A_x、A_y 和 A_z 是矢量 **A** 在直角坐标系中的各个分量。我们也可以将 **A** 写为

$$\mathbf{A} = \hat{r}A_\rho + \hat{j}A_\varphi + \hat{z}A_z \tag{1A.3}$$

式中，$\hat{r}$、$\hat{j}$和$\hat{z}$是单位矢量，A_ρ、A_φ 和 A_z 是圆柱坐标系中的矢量分量。可以证明

$$\hat{x} = \hat{r}\cos\varphi - \hat{j}\sin\varphi$$
$$\hat{y} = \hat{r}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$$
$$\hat{z} = \hat{z} \tag{1A.4}$$

因此，由

$$\mathbf{A} = (\hat{r}\cos\varphi - \hat{j}\sin\varphi)A_x + (\hat{r}\cos\varphi - \hat{j}\sin\varphi)A_y + \hat{z}A_z$$
$$\mathbf{A} = \hat{r}(A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi) - \hat{j}(A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi) + \hat{z}A_z \tag{1A.5}$$

这样

$$A_\rho = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$$
$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$$
$$A_z = A_z \tag{1A.6}$$

上式可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = [A]_{\mathrm{rc}} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1A.7}$$

其中，下列矩阵

$$[A]_{\mathrm{rc}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1A.8}$$

是从直角坐标系到圆柱坐标系的变换矩阵。因为$[A]_{\mathrm{rc}}$是一个正交单位矩阵(它的逆矩阵等于其转置矩阵)，所以从圆柱坐标系到直角坐标系的变换矩阵可以写成如下形式

$$[A]_{\mathrm{cr}} = [A]_{\mathrm{rc}}^{-1} = [A]_{\mathrm{rc}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1A.9}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1A.10}$$

$$A_x = A_\rho\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$$
$$A_y = A_\rho\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$$
$$A_z = A_z \tag{1A.11}$$

1A.1.2 圆柱坐标系到球坐标系(和球坐标系到圆柱坐标系)的变换

由图 1A.1c，可以看到圆柱坐标系和球坐标系之间的关系为

$$\rho = r\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta \tag{1A.12}$$

用与前一节相似的方法，可以证明

$$A_r = A_\rho\sin\theta + A_z\cos\theta$$
$$A_\theta = A_\rho\cos\theta - A_z\sin\theta \tag{1A.13}$$

因此

$$A_\varphi = A_\varphi$$

或者，用矩阵的形式可以记为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1A.14}$$

$$[\boldsymbol{A}]_{cs} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1A.15}$$

由于矩阵$[\boldsymbol{A}]_{cs}$是正交单位矩阵，所以它的逆矩阵为

$$[\boldsymbol{A}]_{sc} = [\boldsymbol{A}]_{cs}^{-1} = [\boldsymbol{A}]_{cs}^{T} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{1A.16}$$

由球坐标系到圆柱坐标系的变换可以由下式来表示

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \tag{1A.17}$$

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta \\ A_\varphi &= A_\varphi \\ A_z &= A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \end{aligned} \tag{1A.18}$$

1A.1.3 直角坐标系到球坐标系(球坐标系到直角坐标系)的变换

由图 1A.1c，可以看到直角坐标系和球坐标系之间的联系为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \tag{1A.19}$$

或者

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$x = r\cos\theta$$

以及球坐标系中的各个分量和直角坐标系中的各个分量之间的关系由下式给出

$$\begin{aligned} A_r &= A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta \\ A_\varphi &= -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \end{aligned} \tag{1A.20}$$

写为矩阵的形式，有

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1A.21}$$

$$[\boldsymbol{A}]_{rs} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{1A.22}$$

因为矩阵$[\boldsymbol{A}]_{rs}$是正交单位矩阵，所以它的逆矩阵由下式给出

$$[\boldsymbol{A}]_{sr} = [\boldsymbol{A}]_{rs}^{-1} = [\boldsymbol{A}]_{rs}^{T} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{1A.23}$$

而由球坐标系到直角坐标系的变换可以由下式来表示

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \tag{1A.24}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \\ A_y &= A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \\ A_z &= A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \end{aligned} \tag{1A.25}$$

1A.2 矢量微分算子

微分算子通常包括一个标量函数的梯度($\nabla\psi$)，一个矢量函数的散度($\nabla\cdot\mathbf{A}$)，一个矢量函数的旋度($\nabla\times\mathbf{A}$)，一个标量函数的拉普拉斯算子($\nabla^2\psi$)，和一个矢量函数的拉普拉斯算子($\nabla^2\mathbf{A}$)。下面将分别在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中给出这些算子的展开形式。

1A.2.1 直角坐标系

$$\nabla\psi=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1A.26}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1A.27}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1A.28}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi=\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1A.29}$$

$$\nabla^2 A=\hat{\boldsymbol{x}}\nabla^2 A_x+\hat{\boldsymbol{y}}\nabla^2 A_y+\hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 A_z \tag{1A.30}$$

1A.2.2 圆柱坐标系

$$\nabla\psi=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\hat{\boldsymbol{j}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1A.31}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1A.32}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) \tag{1A.33}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1A.34}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \tag{1A.35}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A}=&\,\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}-\frac{A_\rho}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2}\right)\\&+\hat{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-\frac{A_\varphi}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}\right)\\&+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{1A.36}$$

1A.2.3 球坐标系

$$\nabla\psi=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{q}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{j}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{1A.37}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1A.38}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\frac{\hat{\boldsymbol{q}}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]$$

$$+\frac{\hat{\boldsymbol{j}}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \tag{1A.39}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{1A.40}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \tag{1A.41}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A}=\ &\hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial^2A_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}A_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2A_r}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_r}{\partial\varphi^2}\right.\\&\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta-\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\&+\hat{\boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial^2A_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right.\\&\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\&+\hat{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right.\\&\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\end{aligned} \tag{1A.42}$$

1A.3 矢量恒等式

1A.3.1 加法和乘法

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=\boldsymbol{A}^2 \tag{1A.43}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|^2=A^2 \tag{1A.44}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1A.45}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1A.46}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1A.47}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1A.48}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \tag{1A.49}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1A.50}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1A.51}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\\&=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned} \tag{1A.52}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D} \tag{1A.53}$$

1A.3.2 微分

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0} \tag{1A.54}$$

$$\nabla\times\nabla\psi=\boldsymbol{0} \tag{1A.55}$$

$$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi \tag{1A.56}$$

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi \tag{1A.57}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{1A.58}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1A.59}$$

$$\nabla\cdot(\psi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{1A.60}$$

$$\nabla\times(\psi\boldsymbol{A})=\nabla\psi\times\boldsymbol{A}+\psi\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1A.61}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{1A.62}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1A.63}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\nabla \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\nabla \cdot \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{1A.64}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1A.65}$$

1A. 3. 3 积分

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{（斯托克斯定理）} \tag{1A.66}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{d}V \quad \text{（散度定理）} \tag{1A.67}$$

$$\oiint_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}S = \iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}V \tag{1A.68}$$

$$\oiint_S \psi\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\psi\,\mathrm{d}V \tag{1A.69}$$

$$\oint_C \psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\psi\,\mathrm{d}S \tag{1A.70}$$

参考文献

1. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, 1989.

附录 1B

滞后位和静态位

1B.1 静电学

基本方程是

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{1B.1}$$

众所周知，任何一个标量函数的梯度的旋度恒等于 0，即

$$\nabla\times[\text{任意标量函数的梯度}] \equiv \boldsymbol{0} \tag{1B.2}$$

因此，$\boldsymbol{E}$ 可以表示为一个标量函数 ψ 的梯度（静电场中的电位）。令

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi \tag{1B.3}$$

式中的 ψ 满足泊松方程

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{1B.4}$$

在任意一点 P，方程式式(1B.4)的解是

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1B.5}$$

式中，ρ_v 是体积 v' 中的体电荷密度，如图 1B.1 所示。

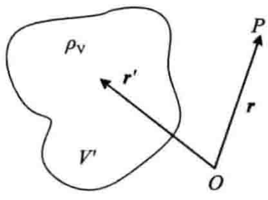


图 1B.1 静电场问题

1B.2 静磁学

基本方程是

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1B.6}$$

众所周知，任何一个矢量函数的旋度的散度恒等于 0，即

$$\nabla\cdot[\text{任意矢量函数的旋度}] \equiv \boldsymbol{0} \tag{1B.7}$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 可以表示为一个矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，如下式所示

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A} \tag{1B.8}$$

磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 满足矢量泊松方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J} \tag{1B.9}$$

在导出式(1B.9)时，我们利用了安培定律 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，并选择 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。在任意一点 P，方程式式(1B.9)的解是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} \frac{\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1B.10}$$

且

$$\nabla\cdot \boldsymbol{A} = \mathbf{0} \tag{1B.11}$$

1B.3 时变场情况

我们知道

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0} \tag{1B.12}$$

和

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A} \tag{1B.13}$$

但是

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1B.14}$$

根据式(1B.13)和式(1B.14)，可以得到

$$\nabla\times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times \boldsymbol{A}) = \mathbf{0} \tag{1B.15}$$

$$\nabla\times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \tag{1B.16}$$

因此，由式(1B.2)知道，$\boldsymbol{E}+(\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$可以表示为一个标量函数 ψ(电位)的梯度

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1B.17}$$

现在，我们推导 $\boldsymbol{A}$ 和 ψ 所满足的方程，并且我们希望在这些方程中不包含 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。我们希望时变情况下的方程与式(1B.4)和式(1B.9)相对应。从下式开始

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1B.18}$$

利用式(1B.18)和式(1B.17)及关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，可以得到

$$\nabla\cdot \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon\nabla\cdot \left[-\nabla\psi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1B.19}$$

$$\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon} \tag{1B.20}$$

类似地，从下式开始

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1B.21}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \mu\boldsymbol{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu\boldsymbol{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\psi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{1B.22}$$

由于

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1B.23}$$

$$\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \tag{1B.24}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = -\mu\boldsymbol{J} \tag{1B.25}$$

方程式式(1B.20)和式(1B.25)是相互耦合的，即在每一个方程中均会出现函数 ψ 和 $\boldsymbol{A}$。在静态情况下，得到了对于 ψ 和 $\boldsymbol{A}$ 的无耦合方程(式(1B.4)和式(1B.9))。仅当一个矢量的旋度和散度在每一点都确定时，这个矢量才是唯一确定的。在静态情况下，规定 $\boldsymbol{A}$ 的旋度等于 $\boldsymbol{B}$，即$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的散度等于 0，即$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，才使得 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定。在时变情况中，规定 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为 $\boldsymbol{B}$，但是没有确定它的散度。从式(1B.25)可以看到，如果规定(洛伦兹条件)

$$\nabla\cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \tag{1B.26}$$

那么，方程式式(1B.25)就变为无耦合的方程(ψ不再出现在方程中)：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{1B.27}$$

进一步地，如果将式(1B.26)代入式(1B.20)中，就可以消去 $\boldsymbol{A}$，此时得到

$$\nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\mu \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{1B.28}$$

即

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{1B.29}$$

这也是一个无耦合的方程。

方程式式(1B.27)和式(1B.29)称为波动方程。虽然泊松方程是静态情况中的控制方程，但是波动方程却是时变现象中的控制方程。

在自由空间中，$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = (3\times10^8)^2 = c^2$，其中 c 是光速。注意，c 很大，但却是有限的。在自由空间中，式(1B.29)变为

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{1B.30}$$

如果让 $1/c^2 \to 0$，也即 $c \to \infty$，这个方程将趋于式(1B.4)。这一结果所隐含的意义稍后解释。如图1B.2所示，考虑在 A 点有一个电荷 Q。表1B.1中总结了静态和动态情况的对比关系。

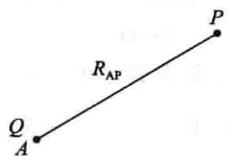


图1B.2 A 点处的一个电荷 Q 在静态和动态情况下的对比

表1B.1 静态和动态情况下的一个点电荷对比

静态情况	动态情况
$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$	$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$
对于一个静点电荷 Q，如果假定影响是瞬时的，可以写为 $\psi = \frac{Q}{4\pi R_{AP}}$。任意一点的影响都是瞬时感觉到的($c \to \infty$)	对于一个时变点电荷 $Q(t)$，$\psi(t) \neq \frac{Q}{4\pi R_{AP}}$ $\psi(t) = \frac{Q\left(t - \frac{R_{AP}}{c}\right)}{4\pi R_{AP}}$ 如果假定原因和效果不是瞬时联系的，P 点的电位是由前一时刻的电荷产生的。滞后时间是这个影响传播所经历的时间

对于一个密度为 ρ_V 的体积电荷，其解为

$$\psi(\mathrm{r}, t) = \iiint_{V'} \frac{\rho_V(t - R_{AP}/c)}{4\pi\varepsilon R_{AP}} \mathrm{d}V' = \iiint_{V'} \frac{[\rho_V]}{4\pi\varepsilon R_{AP}} \mathrm{d}V' \tag{1B.31}$$

式中，

$$[\rho_V] = \rho_V\left(t - \frac{R_{AP}}{c}\right)$$

是在滞后时间处的电荷密度。

例 1B.1 如图 1B.3 所示，有一根很短的细线电流(长度$=l$)，载有电流 $I=I_0\cos(\omega t)$。

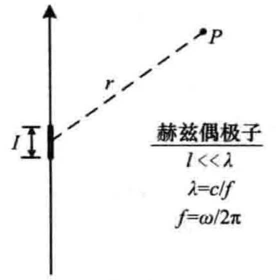


图 1B.3 赫兹偶极子

此时，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mu\iiint_{V'}\frac{[\boldsymbol{J}]}{4\pi r}\mathrm{d}V' = \mu_0\int\frac{[I]}{4\pi r}\mathrm{d}l' \tag{1B.32}$$

对于 $I=I_0\cos(\omega t)$，其中

$$[I] = I_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) = \mathrm{Re}(I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega r}{c}}) \tag{1B.33}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mu_0 I_0\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega r}{c}}}{4\pi r}\right]\mathrm{d}z'\,\hat{z} \tag{1B.34}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mu_0 I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\int\frac{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega r}{c}}}{4\pi r}\right]\mathrm{d}z'\,\hat{z} \tag{1B.35}$$

如果 $l\ll\lambda$，则有

$$A_z(r,t) \approx \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_0 I_0 l\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{4\pi r}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega r}{c}}\right] \tag{1B.36}$$

最后，得到 $\widetilde{A}_z$ 为

$$\widetilde{A}_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega r}{c}}$$ ◀

1B.4 一维波动方程的解

在解释迟后效应时，假定下式的解

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1B.37}$$

式中 c 是光速。对于一维情况 $\psi=\psi(z,\ t)$，让我们求解式(1B.37)，即

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1B.38}$$

令 ψ 的拉普拉斯变换为 F，它可以写为

$$\boldsymbol{L}[\psi] = \int_0^\infty\psi\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = F \tag{1B.39}$$

对式(1B.37)进行变换，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2F(z,s)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{1}{c^2}[s^2F - s\psi(z,0) - \psi'(z,0)] = 0 \tag{1B.40}$$

如果初始条件等于 0，则

$$\frac{d^2F}{dz^2}-\frac{s^2}{c^2}F=0 \tag{1B.41}$$

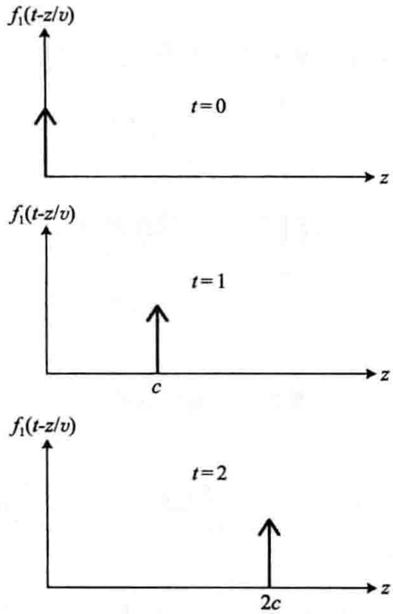


图 1B.4 $f_1(t-z/c)$是沿$+z$轴方向以速度$v=c$运动的脉冲$f_1(t)$

于是，有

$$F=F_1(s)e^{(-s/c)z}+F_2(s)e^{(+s/c)z} \tag{1B.42}$$

如果$f_1(t)=L^{-1}\{F_1(s)\}$和$f_2(t)=L^{-1}\{F_2(s)\}$，那么利用平移定理，即$L[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$，可以得到

$$\psi(z,t)=f_1\left(t-\frac{z}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{z}{c}\right) \tag{1B.43}$$

式(1B.43)就是方程式式(1B.38)的解。

考虑$f_1(t)=\delta(t)$的情况。此时，$f_1(t-z/c)$是一个相对于作者以速度v沿$+z$轴方向运动的脉冲$f_1(t)$，如图1B.4所描绘的那样。

附录1C

坡印廷定理

坡印廷定理是一个能量守恒定理。因为这个定理可以从麦克斯韦方程中导出，所以它表明了麦克斯韦方程与能量守恒的最普遍定理是一致的。

根据式(1.1)，可得

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1C.1}$$

根据式(1.2)，可得

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1C.2}$$

从式(1C.1)中减去式(1C.2)，并利用矢量恒等式

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{1C.3}$$

可以得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \tag{1C.4}$$

在体积 V 中对式(1C.4)两边进行积分，并利用散度定理(参见附录1A)，可以得到

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iiint_V\left[\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right]\mathrm{d}V+\iiint_V[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}]\mathrm{d}V \tag{1C.5}$$

式中，S 是包围体积 V 的闭合曲面。方程式式(1C.5)左端的第二项可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V \tag{1C.6}$$

对于各向同性媒质情况，因为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1C.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1C.8}$$

因此，式(1C.5)可以重新写为

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V+\iiint_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}V=0 \tag{1C.9}$$

对无源但是有损耗的简单媒质情况，让我们来解释式(1C.9)。如果 $\boldsymbol{S}$ 代表电磁功率密度，那么第一项就表示流出闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 的净功率。第二项是在闭合曲面内储存的电场能和磁场能增加的速率。第三项是由于电磁能转化为热能所引起的欧姆功率损耗。储存的电磁能量减小的速率提供了离开闭合曲面及由有损耗媒质产生的不可逆的功率损耗。

附录1D

麦克斯韦方程的低频近似：R、L、C和忆阻器M

1D.1 引言

广泛应用于低频电气工程中的电路理论是麦克斯韦方程的一种低频近似结果。电路理论系统地阐述了二端电路元件，例如，电阻(R)、电感(L)和电容(C)。Fano等人[1]根据时变参数α把电路理论看做一种准静态近似结果来加以讨论，时变参数α用于把电磁场展开成幂级数形式。可以证明，利用零阶和一阶解的某种组合就能得到典型元件R、L和C。Chua[2]指出，基于电荷$q(t)$和磁通$\Phi_m(t)$之间的关系，可以构造一个称为忆阻器(记忆＋电阻器)的新电路元件M。最近已经实现的这样一个二端元件[3]具有有趣的特性和应用。

1D.2 时变参数

在得到准静态解之前，首先考虑通过改变激励的时间尺度所能得到的解的集合。作为一个例子，假定激励是$\rho(x,y,z,t)$，现在考虑激励为$\rho(x,y,z,\alpha t)$时解的集合，其中α称为时变参数。可以利用下式的变量重新写出麦克斯韦方程

$$\tau = \alpha t \tag{1D.1}$$

此时，有

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \overline{B}}{\partial \tau} \tag{1D.2}$$

现在，麦克斯韦方程式(1.1)～式(1.4)可以写为

$$\overline{\nabla} \times \overline{E}(\overline{r},\tau) = -\alpha \frac{\partial \overline{B}}{\partial \tau}(\overline{r},\tau) \tag{1D.3}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H}(\overline{r},\tau) = \overline{J} + \alpha \frac{\partial \overline{D}}{\partial \tau}(\overline{r},\tau) \tag{1D.4}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{D}(\overline{r},\tau) = \rho_V(\overline{r},\tau) \tag{1D.5}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{B}(\overline{r},\tau) = 0 \tag{1D.6}$$

而式(1.5)变为

$$\overline{\nabla} \times \overline{J}(\overline{r},\tau) = -\alpha \frac{\partial \rho_V}{\partial \tau}(\overline{r},\tau) \tag{1D.7}$$

由于场量是$\overline{r}$、τ和参数α的函数，因此它们可以用α展开为幂级数的形式

$$\overline{E}(\overline{r},\tau,\alpha) = \overline{E}_0(\overline{r},\tau) + \alpha \overline{E}_1(\overline{r},\tau) + \alpha^2 \overline{E}_2(\overline{r},\tau) + \cdots \tag{1D.8a}$$

式中

$$\overline{E}_k(\overline{r},\tau) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k \overline{E}(\overline{r},\tau,\alpha)}{\partial \alpha^k}\right]_{\alpha=0}, \quad k = 1,2,\cdots \tag{1D.8b}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \overline{\nabla} \times \overline{E}_0 + \alpha\, \overline{\nabla} \times \overline{E}_1 + \alpha^2\, \overline{\nabla} \times \overline{E}_2 + \cdots$$

如果使用相同的幂级数表达式，并在式(1D.3)～式(1D.7)中利用幂级数形式，整理α的相同幂次项，例如，可以得到

$$\overline{\nabla} \times \overline{E}_0 + \alpha\left(\overline{\nabla} \times \overline{E}_1 + \frac{\partial \overline{B}_0}{\partial \tau}\right) + \alpha^2\left(\overline{\nabla} \times \overline{E}_2 + \frac{\partial \overline{B}_1}{\partial \tau}\right) + \cdots = 0 \tag{1D.9}$$

基于式(1D.4)～式(1D.9)，可以得到类似的方程。

对于所有的α，必须使方程式(1D.9)得到满足。仅当α的所有幂次项的系数都等于零时，这个条件才能得到满足。因此，可以得到如下的一系列方程

$$\overline{\nabla} \times \overline{E}_0 = 0 \tag{1D.10}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H}_0 = \overline{J}_0 \tag{1D.11}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{J}_0 = 0 \tag{1D.12}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{E}_1 = -\frac{\partial \overline{B}_0}{\partial \tau} \tag{1D.13}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H}_1 = \overline{J}_1 + \frac{\partial \overline{D}_0}{\partial \tau} \tag{1D.14}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{J}_1 = -\frac{\partial \rho_{V0}}{\partial \tau} \tag{1D.15}$$

我们可以得到像式(1D.13)～式(1D.15)一样的更高阶方程组。但是应该注意，由式(1D.5)和式(1D.6)，可以得到

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{D}_k = \rho_{Vk} \tag{1D.16}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{B}_k = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{1D.17}$$

1D.3 电路参数 R、L 和 C

电路元件R可以看成方程式(1D.10)和式(1D.11)的零阶解。对于电阻器R来说，与零阶场相比较，一阶电场和磁场是可以忽略的。零阶电场和零阶磁场之间关系的这种特点使得一个纯电阻器具有无记忆的瞬态关系式。它的集总参数描述形式就是如下式所示的欧姆定律

$$V(t) = RI(t) \tag{1D.18}$$

如果仅一阶磁场可以忽略不计，但一阶电场不可以忽略，那么这样的系统可看做一个电阻器与一个电感器的串联[2]。它的集总参数表示形式是

$$V(t) = RI(t) + L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{1D.19}$$

另一方面，仅当一阶电场可以忽略不计，但是一阶磁场不可以忽略时，这样的系统可看做一个电阻器(电导$G=1/R$)与一个电容器C的并联。在这种情况下，集总参数的表示形式是

$$I(t) = GV(t) + C\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{1D.20}$$

利用相关的麦克斯韦方程的积分形式和材料的本构关系式

$$\overline{J} = \sigma\overline{E} \tag{1D.21}$$

$$\overline{B} = \mu\overline{H} \tag{1D.22}$$

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E} \tag{1D.23}$$

可以得到式(1D.19)和式(1D.20)，并计算出R、G、L和C。

1D.4 忆阻器

Fano等人[1]没有考虑一阶场$\overline{E}_1$和$\overline{H}_1$不可以忽略的情况，即使说这样的情况是与电路理论无关的。在这样一种近似条件的情况下，Chua[2]认为会得到一个二端元件，这个元件的电荷$q(t)$(一阶电位移矢量$\overline{D}_1$的面积分)和磁通$\Phi_{\mathrm{m}}(t)$(一阶$\overline{B}_1$场的面积分)相关。这些近似条件是：(ⅰ)两个零阶场量相对于一阶场量都可以忽略不计；(ⅱ)元件的材料是非线性的。

非线性关系式是

$$\overline{J}_1 = g(\overline{E}_1) \tag{1D.24}$$

$$\overline{B}_1 = B(\overline{H}_1) \tag{1D.25}$$

$$\overline{D}_1 = D(\overline{E}_1) \tag{1D.26}$$

$$\nabla\times \overline{H}_1 = g(\overline{E}_1) \tag{1D.27}$$

$$\overline{E}_1 = f(\overline{H}_1) \tag{1D.28}$$

由此得到

$$\overline{D}_1 = g(\overline{B}_1) \tag{1D.29}$$

式(1D.29)给出了 $\overline{D}_1$ 和 $\overline{B}_1$ 之间的瞬时(无记忆的)关系式。

从物理本质上来看,实际的忆阻器元件应该是交流元件;否则,直流电磁场将会产生不可忽略的零阶场。

用集总变量和参数,可以写出

$$V(t) = RI(t) = f_R(I) \tag{1D.30}$$

$$q(t) = CV(t) = f_C(V) \tag{1D.31}$$

$$\Phi_{\mathrm{m}}(t) = LI(t) = f_L(I) \tag{1D.32}$$

对于忆阻器,可以写出

$$\Phi_{\mathrm{m}}(t) = f_{\mathrm{M}}(q) \tag{1D.33}$$

对于电荷控制型忆阻器,可以写出

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1D.34}$$

$$V(t) = \frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}q}i(t) \tag{1D.35}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}q} = M(q) \tag{1D.36}$$

是增量忆阻(单位是欧姆)。

对于基于蚀刻技术的 HP 忆阻器[3,4],其数学模型为

$$M(q) = R_{\mathrm{OFF}}\left(1 - \frac{R_{\mathrm{ON}}}{\beta}q(t)\right)$$

式中

$$\beta = \frac{D^2}{\mu_{\mathrm{D}}} \quad (\mathrm{Wb})$$

这里,μ_{D} 是平均漂移迁移率,D 是薄膜(二氧化钛)厚度。R_{OFF} 和 R_{ON} 分别是电阻的"关"与"开"两种状态。元件是一个 $\mathrm{TiO_2}$ 结,其中在一边掺杂了正离子,而在另一边没有掺杂。掺杂区域的厚度 w 取决于流过元件的电荷。描述电荷流动过程的状态方程可以写为

$$\frac{1}{D}\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{R_{\mathrm{ON}}}{\beta}i(t)$$

$$\frac{w(t)}{D} = \frac{w(t_0)}{D} + \frac{q(t)}{Q_{\mathrm{D}}}$$

式中

$$Q_{\mathrm{D}} = \frac{\beta}{R_{\mathrm{ON}}} = i \times t$$

图 1D.1 给出了在文献[1]中建议使用的符号及 q 和 Φ_{m} 的关系曲线。

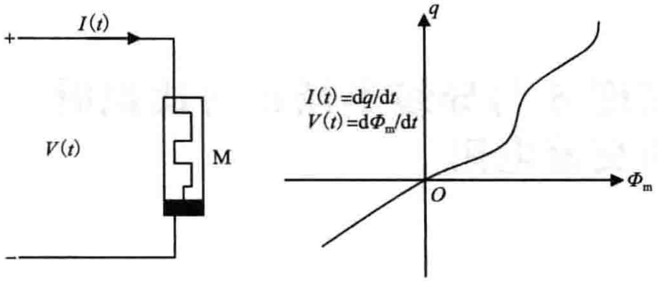


图 1D.1 忆阻器及其 q 和 Φ_m 的关系曲线

忆阻器是一个无源二端元件。当 $V(t)=0$ 和 $I(t)=0$ 时，它不能储存能量。当频率趋于无穷大时，忆阻器就像是一个线性电阻器，而在低频时，它就像是一个非线性电阻器。

当电流的时间积分保持在一定的范围内时，忆阻器有一个近似线性的电荷-电阻关系的工作区域。忆阻器在纳米电子存储器、计算机逻辑和神经形态(neuromorphic)计算机组织结构方面都有许多应用。

理想地说，忆阻器元件记忆过去流过它的电荷量。当电流中止时，忆阻器元件记住它最后状态所具有的电阻。当电荷流动又重新开始时，电路的电阻将是它最后一次工作时的电阻值。

总而言之，不像电阻那样其值取决于瞬时电压和电流的比值，忆阻器的电阻取决于输入电压的积分与输入电流的积分的比值。

由于 $\int V\mathrm{d}t=\Phi_m$ 和 $\int I\mathrm{d}t=q$，它是决定忆阻器性能的 Φ_m 和 q 之间的函数关系式。如果这个关系式是线性的，它就与电阻器 R 相同。

这是一个有很多潜在应用和发展的研究领域。

参考文献

1. Fano, R. M., Chu, L, N., and Adler, R. B., *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, Wiley, New York, 1960.
2. Chua, L. O., Memristor, the missing circuit element, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-18(5), 507–519, 1971.
3. Strukov, D. B., Snider, G. S., Steward D. R., and Williams, R. S., The missing memristor found, *Nature*, 453(7191), 80–83, 2008.
4. Kavehei, O., Iqbal, A., Kim, Y. S., Eshraghiam, K., Al-Sarawi, S. F., and Abbott, D., The fourth element: Characteristics, modeling and electromagnetic theory of the memristor,. *Proc. R. Soc. A*, 466(2120), 2175–2202, 2010.

附录2A

当趋肤深度 δ 与导线半径 a 可比拟时圆导线的交流电阻

我们已经在2.2节中证明过，在良导体中，参数 α 和 β 由 δ^{-1} 所决定。在得到这个结果时，假定损耗正切 $T=\sigma_c/\omega\varepsilon$ 很大。另一种表示近似的方法是，与传导电流密度 $\sigma_c\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 相比，位移电流密度 $\mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 可忽略不计。在这种情况下，忽略式(2.4)中右端的第一项，可以得到传播常数 $\gamma=\mathrm{j}k$

$$\gamma^2=-k^2=\mathrm{j}\omega\mu\sigma=2\pi f\mu\sigma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} \tag{2A.1}$$

电流密度 $\widetilde{\boldsymbol{J}}=\sigma_c\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 的波动方程为

$$\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{J}}-\mathrm{j}\omega\mu\sigma_c\widetilde{\boldsymbol{J}}=0 \tag{2A.2}$$

对于这里所考虑的一维圆柱体问题，有

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}=\hat{z}J(\rho) \tag{2A.3}$$

根据式(2A.2)，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\rho}-j\omega\mu\sigma_cJ=0 \tag{2A.4}$$

这个方程的解就是在2.15节中考虑过的贝塞尔函数，由于在原点处电流密度是有限的，因此舍弃函数 γ_0，而选择函数 J_0：

$$J=AJ_0(T\rho) \tag{2A.5}$$

式中

$$T=\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma_c}=\frac{\mathrm{j}^{-1/2}}{\sqrt{2}/\delta} \tag{2A.6}$$

因为 T 是复数，所以 $J_0(T\rho)$ 也是复数，并具有实部和虚部。在很多数学表中，都有关于如下称为 $\mathrm{Ber}(x)$ 和 $\mathrm{Bei}(x)$ 的特殊函数的定义：

$$\mathrm{Ber}(x)=\mathrm{Re}[J_0(\mathrm{j}^{-1/2}x)] \tag{2A.7}$$

$$\mathrm{Bei}(x)=\mathrm{lm}[J_0(\mathrm{j}^{-1/2}x)] \tag{2A.8}$$

如果在导体表面上的电流密度用 $\widetilde{J}_a$ 来表示，那么在导线内的电流密度可以写为

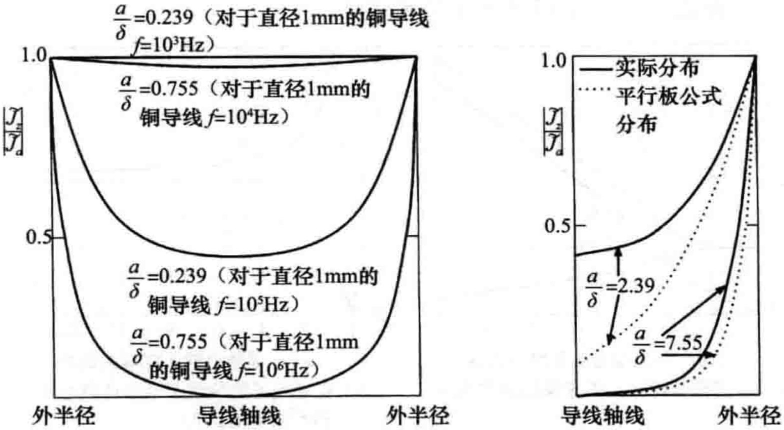
$$\widetilde{J}(\rho)=\widetilde{J}_a\frac{\mathrm{Ber}(\sqrt{2}\rho/\delta)+\mathrm{Bei}(\sqrt{2}\rho/\delta)}{\mathrm{Ber}(\sqrt{2}a/\delta)+\mathrm{Bei}(\sqrt{2}a/\delta)},\quad 0<\rho<a \tag{2A.9}$$

对于两个不同的 a/δ 值，图2A.1所示为 $|J(\rho)/J_a|$ 与半径之间的关系曲线。实线表示由式(2A.9)得到的计算结果。虚线是为了比较起见，它是在假定如下平行平面公式时得到的

$$\frac{\widetilde{J}(\rho)}{\widetilde{J}_a}=\mathrm{e}^{-(a-\rho)/\delta},\quad a\gg\delta \tag{2A.10}$$

当 $a\gg\delta$ 时，这是一个很好的近似。与所期望的一样，当 $a/\delta=7.55$ 时，实线和虚线很一致，然而当 $a/\delta=2.39$ 时，它们之间的差异就相当大，

根据式(1.40)，可以求出磁场强度 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$，它仅有 $\boldsymbol{\varphi}$ 分量



a）在不同频率时，圆柱导线内的电流分布

b）圆柱导线内的实际和近似（平行平板公式）分布

图 2A.1 圆柱导线内的电流分布和近似分布

（经许可转载，图片取自 Ramo，S.，Whinnery，J. R.，and Van Duzer，T.，*Fields and Waves in Communication Electronics*. *p*. 297. 1967. *Copyright Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA.*）

$$\widetilde{H}_\varphi = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\mathrm{d}\widetilde{E}_z}{\mathrm{d}\rho} \tag{2A.11}$$

且

$$\widetilde{E}_z = \frac{J}{\sigma_c} = \frac{A}{\sigma_c}J_0(T\rho) = \frac{\widetilde{J}_a}{\sigma_c}\frac{J_0(T\rho)}{J_0(Ta)} \tag{2A.12}$$

因此，

$$\widetilde{H}_\varphi = \frac{\widetilde{J}_a}{\sigma_c}\frac{T}{\mathrm{j}\omega\mu} = \frac{J'_0(T\rho)}{J_0(Ta)} = \frac{-\widetilde{J}_a}{T}\frac{J'_0(T\rho)}{J_0(Ta)} \tag{2A.13}$$

由安培环路定律，可得

$$2\pi a\widetilde{H}_\varphi\big|_{\rho=a} = -2\pi a\frac{\widetilde{J}_a}{T}\frac{J'_0(T\rho)}{J_0(Ta)} = \widetilde{I} \tag{2A.14}$$

单位长度导体上的内阻抗为

$$Z'_i = \frac{\widetilde{E}_z\big|_{\rho=a}}{\widetilde{I}} = \frac{\widetilde{J}_a/\sigma}{\widetilde{I}} = \frac{TJ_0(Ta)}{2\pi a\sigma J'_0(Ta)} \tag{2A.15}$$

式(2A.15)可以分别用式(2A.7)和式(2A.8)定义的 Ber 与 Bei 函数来表示，有

$$R' = \mathrm{Re}[Z'_i] = \frac{R_s}{\sqrt{2}\pi a}\left[\frac{\mathrm{Ber}q\mathrm{Ber}'q - \mathrm{Bei}q\mathrm{Bei}'q}{(\mathrm{Ber}'q)^2 + (\mathrm{Bei}'q)^2}\right] \quad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{2A.16}$$

$$\omega L'_i = \frac{R_s}{\sqrt{2}\pi a}\left[\frac{\mathrm{Ber}q\mathrm{Ber}'q + \mathrm{Bei}q\mathrm{Bei}'q}{(\mathrm{Ber}'q)^2 + (\mathrm{Bei}'q)^2}\right] \quad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{2A.17}$$

式中

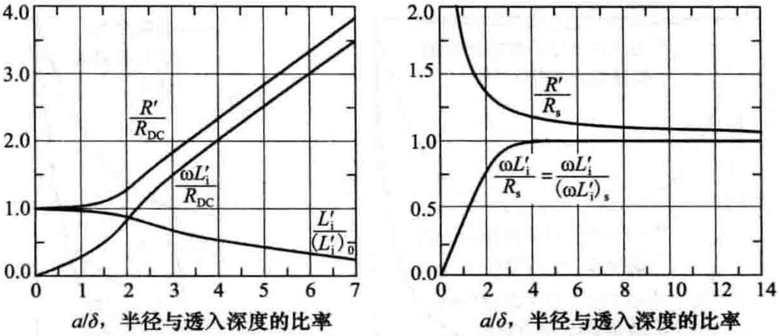
$$q = \frac{\sqrt{2}a}{\delta} \tag{2A.18}$$

且

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c\delta} = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma_c}} \tag{2A.19}$$

图 2A.2 所示为 R'/R_s 和 $\omega L'_i/R_s$ 随 a/δ 变化的关系曲线。与所期望的一样，当 a/δ 趋

于无穷大时，它们都趋近于一条值等于 1 的水平线。



a）与直流值相比，实导线的趋肤效应

b）实导线的趋肤效应与由高频公式得到的值的比较

图 2A.2 实导线的趋肤效应关系曲线

（经许可转载，图片取自 Ramo，S.，Whinnery，J. R.，and Van Duzer，T.，*Fields and Waves in Communication Electronics*. p. 297. 1967. Copyright Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA.）

参考文献

1. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, 1967.

附录 2B

传输线：功率计算

2B.1 传输线：功率计算

如图 2B.1a 所示，有一段长度为 d 的传输线。其等效电路如图 2B.1b 所示。

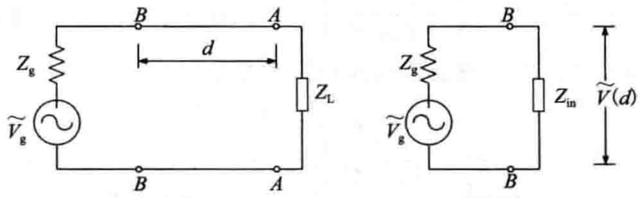


图 2B.1　传输线

一段长度为 d，终端接有负载 Z_L 的传输线的输入阻抗为

$$Z_{in}=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan(\beta d)}{Z_0+jZ_0\tan(\beta d)}=Z_0\frac{(1+\Gamma_0 e^{-j2\beta d})}{(1-\Gamma_0 e^{-j2\beta d})} \tag{2B.1}$$

可以求出，在传输线输入端的电压为

$$\widetilde{V}(d)=\frac{\widetilde{V}_g Z_{in}}{Z_g+Z_{in}}=\widetilde{V}_0^+ e^{j\beta d}+\widetilde{V}_0^- e^{-j\beta d}=\widetilde{V}_0^+ e^{j\beta d}[1+\Gamma_0 e^{-j2\beta d}] \tag{2B.2}$$

式中，$\widetilde{V}_0^+$ 代表正向行波，$\widetilde{V}_0^-$ 代表反射波。重新整理上式后，可以得到

$$\widetilde{V}_0^+=\frac{\widetilde{V}_g Z_{in}}{(Z_g+Z_{in})e^{j\beta d}(1+\Gamma_0 e^{-j2\beta d})} \tag{2B.3}$$

$$\widetilde{V}_0^+=\widetilde{V}_g\frac{Z_{in}}{(Z_g+Z_{in})(e^{j\beta d}+\Gamma_0 e^{-j\beta d})} \tag{2B.4}$$

在上式中，

$$\Gamma=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{2B.5}$$

平均入射功率为

$$P_{av}^i=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\widetilde{V}_0^+(\widetilde{I}_0^+)^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\widetilde{V}_0^+\frac{(\widetilde{V}_0^+)^*}{Z_0}\right]$$

$$P_{av}^i=\frac{1}{2}\frac{|\widetilde{V}_0^+|^2}{Z_0} \tag{2B.6}$$

平均反射功率为

$$P_{av}^r=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\widetilde{V}_0^-(\widetilde{I}_0^-)^*\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\widetilde{V}_0^-\frac{(\widetilde{V}_0^-)^*}{Z_0}\right] \tag{2B.7}$$

$$P_{av}^r=-\frac{1}{2}\frac{|\Gamma_0|^2|\widetilde{V}_0^+|^2}{Z_0}$$

负载消耗的总功率为

$$P_{av}^{tot}=P_{av}^i+P_{av}^r=\frac{1}{2}\frac{|\widetilde{V}_0^+|^2}{Z_0}[1-|\Gamma_0|^2] \tag{2B.8}$$

$$P_{av}^{tot} = P_{av}^{i}[1 - |\Gamma_0|^2]$$

负载消耗的总功率如图 2B.2 所示。

2B.2 传输线：特殊情况 $Z_g = Z_0$

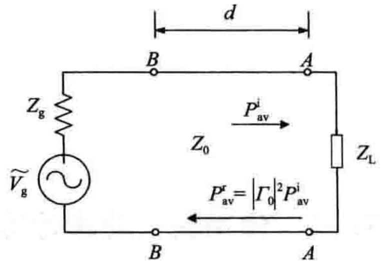


图 2B.2 传输线电路中的入射功率和反射功率

考虑图 2B.1a 中所示传输线电路的特殊情况，即有 $Z_g = Z_0$，其中 Z_0 是传输线的特性阻抗。我们将证明，如果 $Z_g = Z_0$，那么$\widetilde{V}_0^+$ 将不依赖于 Z_L。当 $Z_g = Z_0$ 时，根据式(2B.1)，可以得到

$$Z_g + Z_{in} = Z_0 + Z_0 \frac{(1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta d})}{(1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta d})} \tag{2B.9}$$

将式(2B.1)和式(2B.9)代入$\widetilde{V}_0^+$ 的表达式式(2B.3)中：

$$\widetilde{V}_0^+ = \frac{\widetilde{V}_g Z_0 \dfrac{(1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta d})}{(1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta d})}}{Z_0 \left[1 + \dfrac{(1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta d})}{(1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta d})}\right] e^{j\beta d}(1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta d})} \tag{2B.10}$$

经过整理后，上式可以写成

$$\widetilde{V}_0^+ = \frac{\widetilde{V}_g}{2} e^{-j\beta d} \tag{2B.11}$$

可以看出，无论 Z_L 的值为多少，只要 $Z_g = Z_0$，上式都成立。

附录 2C
史密斯圆图简介

史密斯圆图是一种图解辅助方法或计算图表[1]，作为一种辅助方法，在无线电工程中用于帮助求解传输线和匹配电路的问题。基于反射系数这个关系式可以建立史密斯圆图：

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{2C.1}$$

若让 x 轴是反射系数的实部(Γ_r)，y 轴是反射系数的虚部(Γ_i)，这里就有

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \tag{2C.2}$$

在史密斯圆图中，所画出的负载阻抗是用特性阻抗 Z_0 进行归一化后的结果：

$$z_L = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0} \tag{2C.3}$$

反射系数可以表示为

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \tag{2C.4}$$

以及负载阻抗可以表示为

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \tag{2C.5}$$

如果采用极坐标表示形式，$|\Gamma|$ 和 φ 将分别是 Γ 的幅值和相角，如图 2C.1 所示。

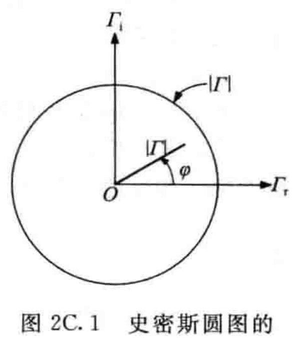


图 2C.1 史密斯圆图的极坐标表示

利用式(2C.2)和式(2C.3)，经过整理后，可以得到 z_L 的实部和虚部分别为

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{2C.6}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{2C.7}$$

在进行进一步的代数运算后，可以得到

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{2C.8}$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2C.9}$$

式(2C.8)是由电阻 r 所确定的一簇偏心圆的方程。这些圆的圆心位于点 $\Gamma_r = r/(1+r)$ 和 $\Gamma_i = 0$（在 x 轴上），圆的半径等于 $1/(1+r)$。当 $r=0$ 时，这是一个圆心在原点，而半径为 1 的圆（单位圆）。另一方面，如果 $r=\infty$，则圆心位于(1，0)，半径等于 0。因此，当 $r=\infty$时，式(2C.8)表示在 Γ 实轴上的一个点，这个点位于单位圆的最右端。如果 $r=1$，式(2C.8)表示一个圆心在(1/2，0)，半径等于 1/2 的圆。在图 2C.2 中，画出了这些圆以及半径 $r=1/2$ 和 2 这两个圆。注意，这些圆的圆心都在正 Γ_r 轴上，并通过 $\Gamma_r=1$ 和 $\Gamma_i=0$ 的点。

式(2C.9)也是一簇偏心圆的方程，此时圆心位于 $\Gamma_r=1$ 和 $\Gamma_i=1/x$，圆的半径等于 $1/x$。当 $x=\pm\infty$时，这个方程表示一个圆心在(1，0)点和半径等于 0 的圆，这也是位于单位圆最右端的一个点。如果 $x=1$，这是一个圆心在 $\Gamma=1+j1$ 和半径为 1 的圆。由于$|\Gamma|$总是小于或等于 1，我们仅画出了这些圆在图 2C.2 中所示单位圆内的那一部分。图 2C.3 所示是许多条对应不同x 值的这些圆在单位圆内的部分。注意，表示$x=0$ 的圆是沿 x 轴的，因为这个圆的

圆心沿 $\Gamma_r=1$ 轴向 ∞ 移动，且半径也成为无穷大。从图 2C.4 中可以看到，式(2C.8)和式(2C.9)所表示的这两簇圆都同时画在了史密斯圆图中。如果给定 Z_L，首先除以 Z_0 分别得的 r 和 x，然后找到相应 r 圆和 x 圆的交点，就可以从图中确定出 Γ。

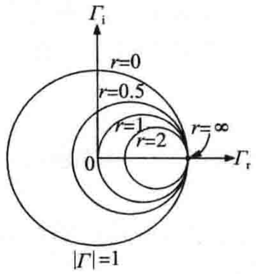


图 2C.2 对于固定的、归一化的负载电阻，与反射系数相应的史密斯圆图上的一簇圆

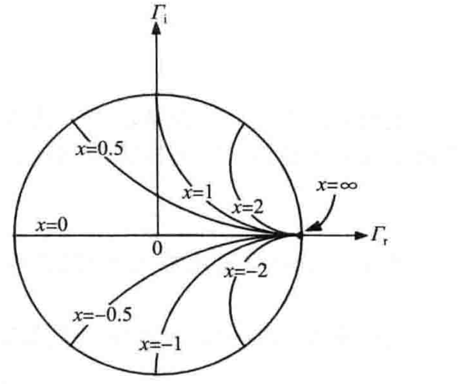


图 2C.3 对于固定的、归一化的电抗，与反射系数相应的史密斯圆图上的一簇圆

为了使图看起来清楚起见，在史密斯圆图中没有画出 $|\Gamma|$ 的同心圆和 φ 的径向线。但是，在史密斯圆图下面给出了刻度线，在外圆上刻有角度，如图 2C.4 所示。例如，考虑一条 50Ω 传输线上的一点 $Z_L=50+\mathrm{j}100\Omega$。此时，因为 $z_L=Z_L/50=1+\mathrm{j}2$，所以有 $r=1$，$x=2$。在图 2C.4 中所画出的 P 点就是这个点，从这一个点处可以看到 $|\Gamma|=0.7$，$\varphi=45°$。

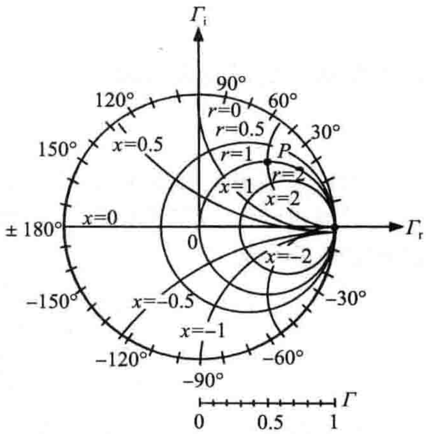


图 2C.4 史密斯圆图上的等电阻(r)圆和等电抗(x)圆

在圆周上加上史密斯圆图中的最后一个刻度，用于计算沿一传输线上的距离。这个刻度是以波长为单位的，它的零点可以任意地取在左侧。已知传输线上任意点的电压和电流分别由下式给出

$$V_s=V_0^+(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}) \tag{2C.10}$$

和

$$I_s=\frac{V_0^+}{Z_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}) \tag{2C.11}$$

用式(2C.10)除以式(2C.11)，并进行归一化后，得到归一化输入阻抗：

$$Z_{in}=\frac{V_s}{Z_0 I_s}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}} \tag{2C.12}$$

用 $-d$ 替换 z，且分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d}$，可以得到归一化输入阻抗、反射系数和传输线长度($d$)之间的一般关系式：

$$Z_{in}=\frac{1+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta d}}{1-\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta d}}=\frac{1+|\Gamma|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-2\beta d)}}{1-|\Gamma|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-2\beta d)}} \tag{2C.13}$$

式(2C.13)表明，用 $\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta d}$ 来替换负载端的反射系数 Γ，就可以得到在任意一点 $z=-d$ 处的输入阻抗。当我们从负载端移动到传输线的输入端时，这相当于 Γ 的角度减小了 $2\beta d$ 弧度。仅仅是 Γ 的角度发生了变化，而其幅值大小保持不变，因此这个运动是在一个半径恒定的圆弧上发生的。当从负载 z_L 点移动到输入阻抗 z_{in} 点时，就相当于在传输线上向电源端移动了一段长度为 d 的距离，而在史密斯圆图上则顺时针转过了 $2\beta d$ 角度。在史密斯圆图上旋转一周，或者 d 改变了半个波长，就相当于一个 π 弧度的相移。

因此，在史密斯圆图中标出了表明在单位圆上环绕一周时改变 0.5λ 的刻度。一般会给出两个刻度，一个表明在顺时针旋转时所增加的距离，另一个表示在逆时针旋转时所增加的距离。在图 2C.5所示的史密斯圆图中可以看到这两个刻度。一个刻度表示沿顺时针方向旋转时朝向电源端增大的波长数(wtg)，另一个表示沿逆时针方向旋转时朝向负载端增大的波长数。

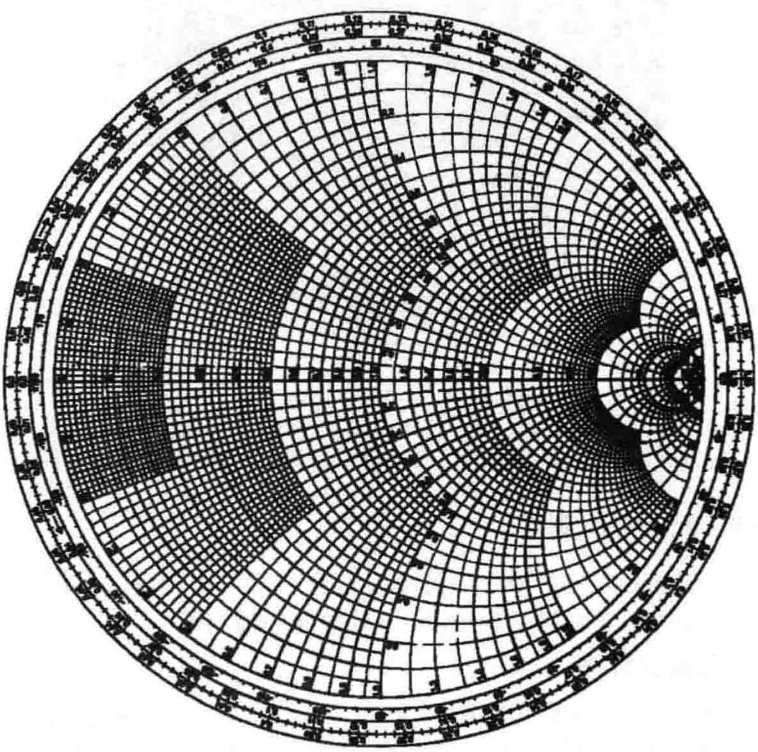


图 2C.5 史密斯圆图(这里没有画出在下面的刻度线部分)

例 2C.1 在这个例题中，考虑如图 2C.6 所示的问题。图 2C.7 所示为这个例子的史密斯圆图分析过程。

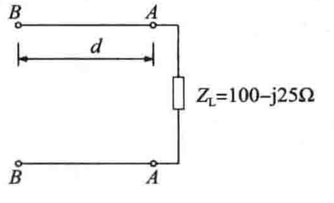


图 2C.6 史密斯圆图的例子(Z_L＝100－j25，d＝0.6λ)

1) 在负载点 A：$z_L = Z_L/Z_0 = 2 - j0.5$。$|\Gamma| = 0.37$，$\varphi = -17°$。点 A 位于 0.274wtg。

2) 在 B 点，$d = 0.6\lambda$，0.374wtg。

$z(0.6\lambda) = 0.77 - j0.65$(点 B)

$Z(0.6\lambda) = 50(0.77 - j0.65) = (38.5 - j32.5)\Omega$

3) $|z(d)|_{max}$ 位于 C 点，并等于 2.2＝s(电压驻波比)。这也是电压的最大值点。当 $d = [(0.5 - 0.274) + 0.25]\lambda = 0.476\lambda$ 时，电压达到最大值。

4) $|z(d)|_{min}$ 位于 D 点，并等于 1/2.2＝0.45。这也是电压的最小值点。当 $d = (0.5 - 0.274)\lambda = 0.226\lambda$ 时，电压达到最小值。

5) E 点表示开路点。

6) F 点表示短路点。

7) G 点表示阻抗 $z = 4 + j0$ 的点。

8) H 点表示阻抗 $z = 0 + j2$ 的点。

◀

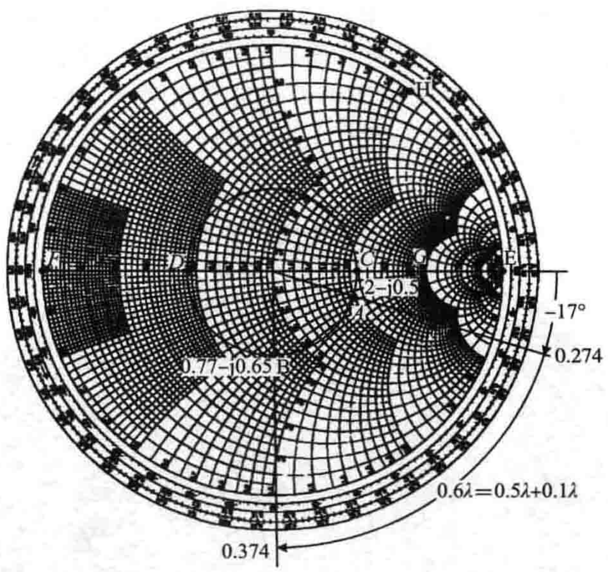


图 2C.7 史密斯圆图的例子

A 点是负载为(100−j25)Ω 的点，*B* 点是在 $d=0.6\lambda$ 线上的负载，*C* 点是电压的最大值点，*D* 点是电压的最小值点，*E* 点是开路点，*F* 点是短路点，*G* 点是负载为(4+j0)Ω 的点，*H* 点是负载为(0+j2)Ω 的点。

2C.1 均匀平面波的反射

必须注意，上面加有波浪符号(～)的书写符号表示一个相量。上标是加号表示沿 $+z$ 轴方向传播的波，而上标是减号则表示沿 $-z$ 轴方向传播的波。

自由空间：理想导体分界面

现在考虑如图 2C.8 所描述的问题。

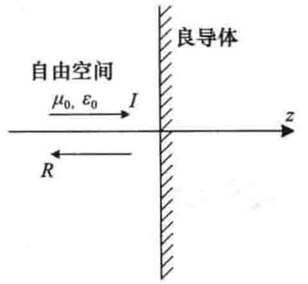


图 2C.8 在自由空间与理想导体分界上的均匀平面波反射

在空间 $z>0$ 内是一个理想导体，而在空间 $z<0$ 内是自由空间。让在自由空间中沿 $+z$ 轴方向传播的正弦电磁场从左边垂直入射到分界面上。该波的电场仅有沿 x 轴方向的分量，即有

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{I}}(z)=\widetilde{E}_0^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2C.14}$$

式中，$\beta=\omega/c=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 和 $\omega=2\pi f$。入射波的磁场为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{I}}(z)=\frac{\widetilde{E}_0^{+}}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2C.15}$$

式中，$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=120\pi$。上标 I 表示入射波。在 $z=0$ 处，入射波的电场为 $\widetilde{E}_0^{+}$。但是，在 $z=0$ 处的边界条件要求电场应该等于 0。如果假定在自由空间中存在一个反射波(沿 $-z$ 轴方向传播)，这样就能满足边界条件，反射波的电场和磁场的表达式分别为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{R}}(z)=\widetilde{E}_0^{-}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2C.16}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{R}}(z)=-\frac{\widetilde{E}_0^{-}}{\eta_0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2C.17}$$

且

$$\widetilde{E}_0^{+}+\widetilde{E}_0^{-}=0 \tag{2C.18}$$

最后得到

$$\Gamma_0 = \frac{\widetilde{E}_0^-}{\widetilde{E}_0^+} = -1 \tag{2C.19}$$

2C.2 与传输线问题的比较

图 2C.9 所示为一垂直入射平面波的反射(从自由空间入射到一个理想电导体上)与传输线模拟的比较，并在表 2C.1 中对比较结果进行了总结。

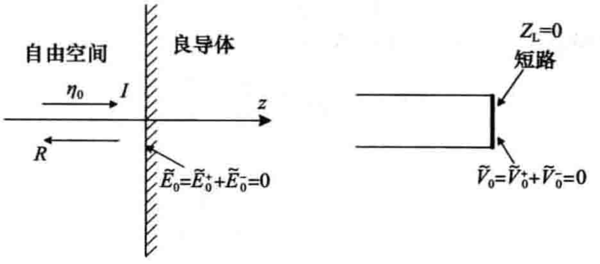


图 2C.9 垂直入射平面波的反射与传输线的对比

电介质-电介质分界面

现在，考虑一平面波在两种电介质分界面上的反射问题，如图 2C.10 所示。

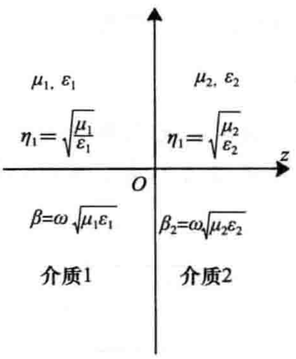


图 2C.10 两种电介质之间的分界面

表 2C.1 平面波反射与传输线模拟的比较

平面波	传输线
$\Gamma_0=\frac{\widetilde{E}_0^-}{\widetilde{E}_0^+}=-1$	$\Gamma_0=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=-1$
E_x	V
H_y	I
$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi$	$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$
$\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$	$\beta=\omega\sqrt{LC}$

让入射波在媒质 1 中沿 $+z$ 轴方向传播，那么当 $z<0$ 时：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{I}}(z) = \widetilde{E}_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2C.20}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{I}}(z) = \frac{\widetilde{E}_0^+}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}, \quad \hat{\boldsymbol{y}} = \widetilde{H}_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2C.21}$$

这会产生一个反射波，

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{R}}(z) = \widetilde{E}_0^- \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_1 z}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2C.22}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{R}}(z) = -\frac{\widetilde{E}_0^-}{\eta_1}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_1 z}\hat{y} = \widetilde{H}_0^- \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta_1 z}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2C.23}$$

和一个折射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(z) = \widetilde{E}_0^{(2)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2C.24}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}(z) = \frac{\widetilde{E}_0^{(2)}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\hat{\boldsymbol{y}} = \widetilde{H}_0^{(2)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2C.25}$$

现在的问题就是求出反射系数 $\Gamma_0=\widetilde{E}_0^-/\widetilde{E}_0^+$ 和折射系数 $T_0=\widetilde{E}_0^{(2)}/\widetilde{E}_0^+$。边界条件给出

了求解 Γ_0 和 T_0 所需要的两个方程。在电介质-电介质分界面上的边界条件是$\widetilde{E}$和$\widetilde{H}$的切向分量分别连续：

$$\widetilde{E}_0^+ + \widetilde{E}_0^- = \widetilde{E}_0^{(2)} \tag{2C. 26}$$

$$\widetilde{H}_0^+ + \widetilde{H}_0^- = \widetilde{H}_0^{(2)} \tag{2C. 27}$$

或者

$$\frac{\widetilde{E}_0^+}{\eta_1} - \frac{\widetilde{E}_0^-}{\eta_1} = \frac{\widetilde{E}_0^{(2)}}{\eta_2} \tag{2C. 28}$$

利用式(2C. 26)和式(2C. 28)，可以得到

$$\Gamma_0 = \frac{\widetilde{E}_0^-}{\widetilde{E}_0^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{2C. 29}$$

和

$$T_0 = \frac{\widetilde{E}_0^{(2)}}{\widetilde{E}_0^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{2C. 30}$$

2C. 3 与传输线问题的比较

图 2C. 11a 所示为一平面波从电介质 1 垂直入射到电介质-电介质分界面上，分界面左侧和右侧分别为电介质 1 和电介质 2。图 2C. 11b 和 c 分别为传输线模拟与等效的传输线电路。传输线 2 延伸至无穷远。在这条线上，波沿$+z$ 轴方向传播，不存在反射波。在 $z=\infty$处的反射系数等于 0，即 $\Gamma_\infty=0$，因此 $Z_{in}=Z_{02}$(参见图 2C. 11c)。现在，可以得到反射系数为：

$$\Gamma_0 = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{2C. 31}$$

进行传输线模拟的目的就是利用解决传输线问题的有效工具来求解与平面波有关的相似边值问题。史密斯圆图就是其中的一种方法。下面将通过几个例子来加以说明。

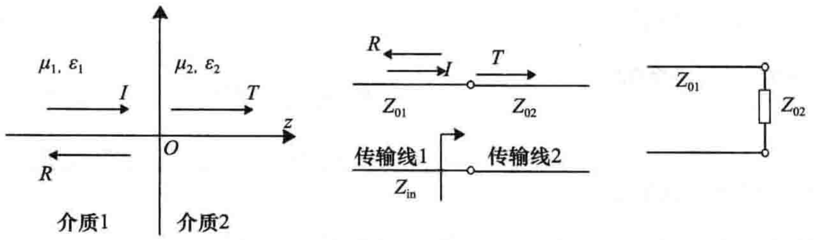


图 2C. 11 电介质-电介质分界面上的反射与传输线的比较

例 2C. 2 一个 4GHz 的均匀平面波从区域 1($z<0$，$\varepsilon_1=5$，$\mu_1=1$，$\sigma_1=0$)垂直地入射到区域 2($z>0$，$\varepsilon_2=2$，$\mu_2=10$，$\sigma_2=0$)(见图 2C. 12)。求出区域 1 和区域 2 的电压驻波比 s，及在$z=-0.6$cm处的特征阻抗 η_{in}。

在区域 2 中，因为没有反射波，因为 $\Gamma_\infty=0$，$S=(1+\Gamma)/(1-\Gamma)=1$。为了求出在区域 1 中的解，让我们画出一个等效的传输线(见图 2C. 13)。负载是纯阻性的，且 $Z_L=R_L>Z_0$。因此，在区域 1 中，s 是 $Z_L/Z_0=5$。为了求出在-0.6cm 处的 η_{in}，可以利用如图 2C. 14 所示的等效传输线和如图 2C. 15 所示的史密斯圆图。在这种情况下，有

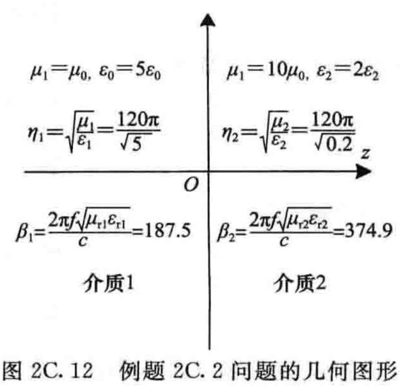


图 2C. 12 例题 2C. 2 问题的几何图形

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{2\pi\times4\times10^9}{3\times10^8}\sqrt{5} \tag{2C.32}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = \frac{2\pi\times3\times10^8}{2\pi\times4\times10^9\sqrt{5}} = \frac{0.075}{\sqrt{5}}(\mathrm{m}) = \frac{7.5}{\sqrt{5}}(\mathrm{cm}) \tag{2C.33}$$

$$\frac{d}{\lambda_1} = \frac{0.6\sqrt{5}}{7.5} = 0.1789 \tag{2C.34}$$

在史密斯圆图上，A 点位于 $r=5$，$x=0$ 处(0.25wtg)。为了到达 $|\Gamma|$ 圆上的 B 点，必须从 $|\Gamma|$ 圆上的 A 点移动 0.1789wtg，即到达(0.25＋0.1789)wtg＝0.4289wtg 处。从史密斯圆图中可以读出 $z_B=0.25-\mathrm{j}0.45$。因此，

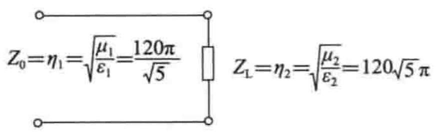


图 2C.13 例 2C.2 题的等效传输线电路

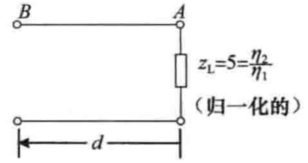


图 2C.14 长度为 d 的等效传输线电路

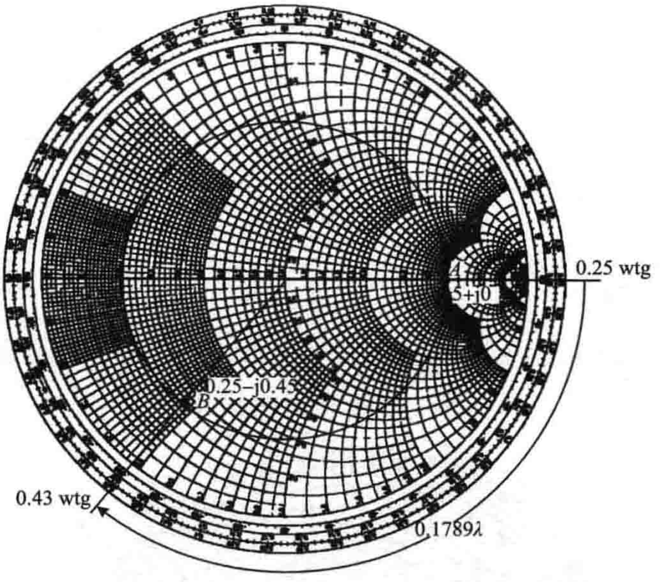


图 2C.15 用于求解例 2C.2 电介质分界面问题的史密斯圆图

$$\begin{aligned}\eta_{\mathrm{in}}(z=-0.6\mathrm{cm}) &= \frac{120\pi}{\sqrt{5}}(0.25-\mathrm{j}0.45) \\ &= 42.15-\mathrm{j}75.87 = 86.8\angle-60.9^\circ\end{aligned} \tag{2C.35}$$

◀

例 2C.3 设计一个雷达天线罩。雷达天线罩是覆盖在天线上的一种电介质材料，防止天线受天气影响。材料的厚度应使得不产生反射波(参见图 2C.16)。

从传输线模拟(见图 2C.17)中，可以明显地看出如果 $d=\lambda/2$，则 $\eta_{输入}=\eta_0$。如果 $\eta_{输入}=\eta_0$，在分界面 1 上是完全匹配的，那么在分界面 1 上将不会产生反射。

考虑一个有具体数值的例子，在自由空间中 $\lambda=3\mathrm{cm}$ 的一个均匀平面波垂直入射在玻璃纤维($\varepsilon_r=4.9$，$\sigma=0$)雷达天线罩上。a)玻璃纤维厚度为多少时将没有反射？b)如果入射波的频率减少了 10%，问折射到玻璃纤维内的入射能量百分比是多少？

在这个问题中，$\varepsilon_1=4.9\varepsilon_0$，$f=c/\lambda=3\times10^8/3\times10^{-2}=10\text{GHz}$。

$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\dfrac{2\pi\times10\times10^9}{3\times10^8}\sqrt{4.9}$ 且 $\lambda_1=\dfrac{2\pi}{\beta_1}=1.355\text{cm}$。

a）$d=\lambda_1/2=0.678\text{cm}$ 时，没有反射。

b）如果 $f_{新}=0.9f$，那么 $\lambda_0(新)=c/f_{新}=\lambda_0/0.9$。

$\beta_1(新)=\omega_{新}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=2\pi f_{新}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=2\pi\times0.9\times f\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=0.9\beta_1$，$\lambda_1(新)=\dfrac{2\pi}{\beta_1(新)}=\dfrac{\lambda_1}{0.9}$

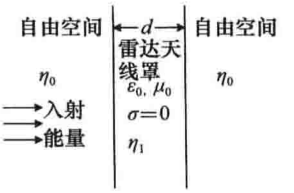


图 2C.16 雷达天线罩分析的几何图形

由于物理宽度 d 是相同的，因此有

$$\frac{d}{\lambda_1(新)}=\frac{0.9d}{\lambda_1}=\frac{\frac{\lambda_1}{2}\times0.9}{\lambda_1}=0.45$$

这里可以通过求解下面的传输线问题(见图 2C.18)得到 $\eta_{输入}$。

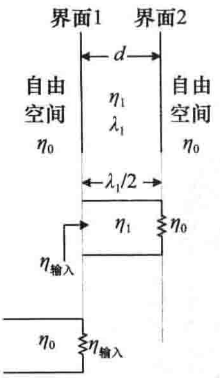


图 2C.17 雷达天线罩的模拟传输线电路

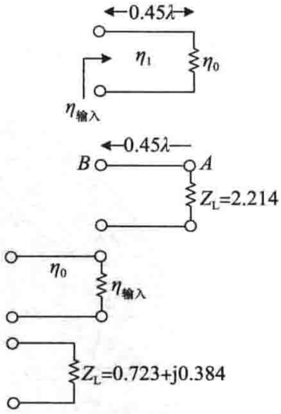


图 2C.18 雷达天线罩的等效传输线电路

为了利用史密斯圆图(见图 2C.19)，使用归一化的值：

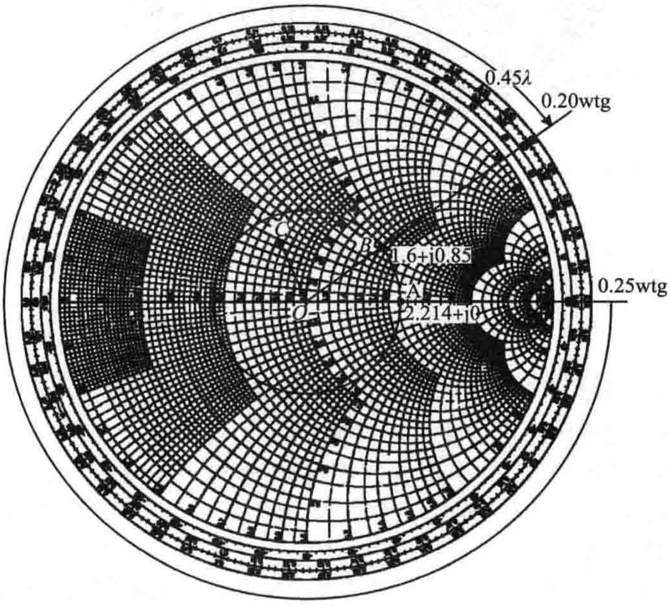


图 2C.19 用于求解雷达天线罩问题的史密斯圆图(例 2C.3)

$$Z_0 = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4.9}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{4.9}}$$

但是因为 $Z_L = \eta_0$，所以 $z_L = \sqrt{4.9}$。这是史密斯圆图($r=2.214$，$x=0$)上的 A 点。现在画出 $|\Gamma|$ 圆，移动 0.45wtg 到达 $|\Gamma|$ 圆上的 B 点。读出 $z_B = 1.6 + \text{j}0.85$。

$\eta_{输入} = \eta_1(1.6+\text{j}0.85)$。等效传输线负载等于 $\eta_1(1.6+\text{j}0.85)/\eta_0 = 0.723+\text{j}0.384$。在史密斯圆图中用 C 点来标出这个 $z_L = 0.723+\text{j}0.384$ 的归一化负载。为了求出反射系数的大小，测量到 OC＝0.26，$|\Gamma|^2 = 0.0676$。折射能量等于 $1-|\Gamma|^2 = 0.9324 = 93.24\%$。◀

2C.4 利用史密斯圆图求解斜入射问题的例子[2]

表 2C.2 总结了斜入射时的平面波斜入射(反射)问题和传输线之间的比较结果。

考虑如图 2C.20 所示的例子，一频率为 10GHz 的垂直极化波从自由空间斜入射到多层电介质的分界面上，入射角为 40°。

表 2C.2 平面波反射(斜入射)与传输线模拟之间的比较

平行极化平面波	传输线
$E_x = E\cos\theta_m$	V
$H_y = H$	I
$Z_{0m} = \eta_m\cos\theta_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}}\cos\theta_m$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
$q_m = k_m\cos\theta_m = \omega\sqrt{\mu_m\varepsilon_m}$	$q = \omega\sqrt{LC} = \beta$
垂直极化平面波	**传输线**
$E_y = E$	V
$\lvert H_x \rvert = H\cos\theta_m$	I
$Z_{0m} = \frac{\eta_m}{\cos\theta_m} = \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}}\frac{1}{\cos\theta_m}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
$q_m = k_m\cos\theta_m = \omega\sqrt{\mu_m\varepsilon_m}$	$q = \omega\sqrt{LC} = \beta$

入射波的自由空间波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{10\times10^9} = 3\text{cm} \quad (2C.36)$$

根据斯涅尔定理，

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin40^\circ}{\sqrt{2.54}}\right) = 23.79^\circ \quad (2C.37)$$

$$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{\sin40^\circ}{\sqrt{4}}\right) = 18.73^\circ \quad (2C.38)$$

$$\theta_4 = \arcsin\left(\frac{\sin40^\circ}{\sqrt{1}}\right) = 40^\circ \quad (2C.39)$$

对于垂直极化，有

$$Z_{01} = \frac{120\pi}{\cos40^\circ} = 492\Omega$$

$$Z_{02} = \frac{120\pi/\sqrt{2.54}}{\cos\theta_2} = 258.5\Omega \quad (2C.40)$$

$$Z_{03} = \frac{120\pi/\sqrt{4}}{\cos\theta_3} = 199\Omega$$

用波长表示的每一个区域的长度

$$\lambda_{mz} = \frac{2\pi}{q_m} = \frac{2\pi}{k_m\cos\theta_m} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_m\varepsilon_m}\cos\theta_m} \quad (2C.41)$$

$$\lambda_{mz} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_m} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_m} \quad (2C.42)$$

因此，

$$\frac{d_2}{\lambda_{2z}} = \frac{0.2\sqrt{2.54}\cos23.79^\circ}{3} = 0.097$$

$$\frac{d_3}{\lambda_{3z}} = \frac{0.3\sqrt{4}\cos18.73^\circ}{3} = 0.189 \quad (2C.43)$$

现在从分界面 AA 开始，我们有如图 2C.21a 所示的等效传输线，它位于图 2C.22 所示史密斯圆图上的 A 点。

$$Z_A = Z_{L3} = \frac{120\pi}{\cos 40°} = 492\Omega \tag{2C.44}$$

式中

$$Z_{03} = 199\Omega$$

$$z_A = \frac{492}{199} = 2.47$$

而且，从图 2C.22 所示的史密斯圆图中可以看出，从 A 点向电源端移动 0.189 个波长时，可以读出(B 点)：

$$z_B = 0.48 - \mathrm{j}0.325 \tag{2C.45}$$

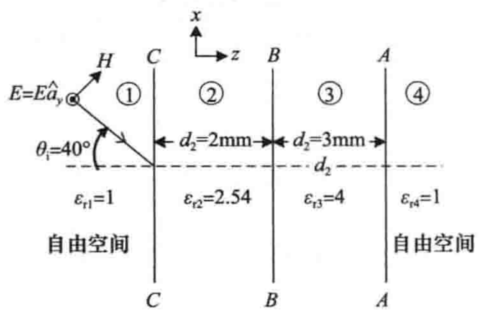


图 2C.20 利用史密斯圆图求解斜入射问题的例子

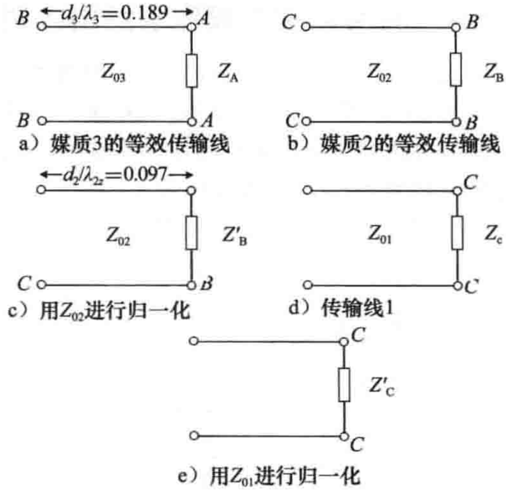


图 2C.21 该例子的等效传输线

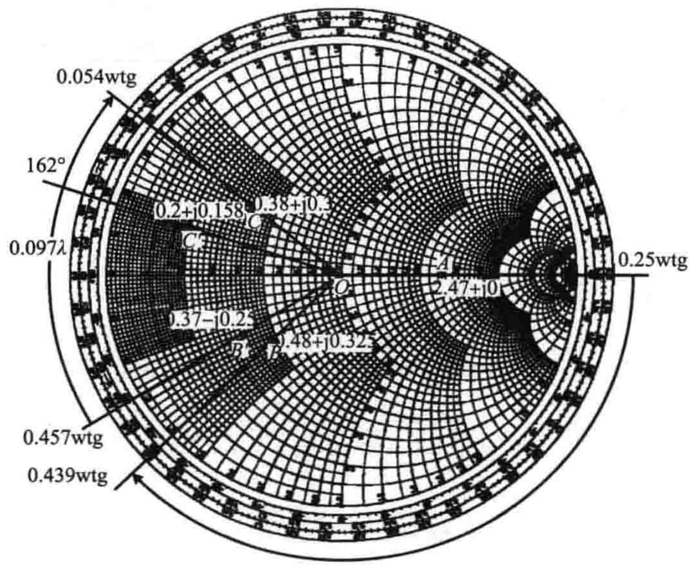


图 2C.22 用于求解多层电介质对斜入射平面波反射的史密斯圆图

因此，

$$Z_B = (0.48 - \mathrm{j}0.325) \times 199 \tag{2C.46}$$

这可以看做史密斯圆图上的 B 点和图 2C.21b 所示的传输线。

重新进行归一化，有

$$z_{B'} = (0.48 - j0.325) \times \frac{199}{258.5} = 0.37 - j0.25 \tag{2C.47}$$

这是史密斯圆图上的 B' 点和图 2C.21c 所示的传输线。现在，如果向电源端移动 0.097 个波长，就可以得到图 2C.21d 所示的传输线模拟和史密斯圆图上的 C 点。

$$z_C = 0.38 + j0.3 \tag{2C.48}$$

因此

$$Z_C = (0.38 + j0.3) \times 258.5 \tag{2C.49}$$

重新归一化，可以得到

$$z_{C'} = (0.38 + j0.3) \times \frac{258.5}{492} = 0.2 + j0.158 \tag{2C.50}$$

这是史密斯圆图上的 C' 点和图 2C.21e 所示的等效传输线。从史密斯圆图上，可以读出反射系数为

$$R_s = 0.66\angle 162^\circ \tag{2C.51}$$

以及功率反射系数为

$$|R_s|^2 = 0.435 \tag{2C.52}$$

参考文献

1. Hayt, W. H., Jr., *Engineering Electromagnetics*, 5th Edition, McGraw-Hill, New York, 1989.
2. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, 1967.

附录 2D

非均匀传输线

2D.1 非均匀传输线

非均匀传输线可以表示非均匀媒质中的很多物理现象，其中非均匀媒质的媒质特性是位置的函数。一个一维等效理想非均匀传输线的单位长度串联电感 L' 和单位长度并联电容 C' 是一维空间坐标的函数。

令

$$L' = L'(z) \tag{2D.1a}$$

$$C' = C'(z) \tag{2D.1b}$$

如果 ε 和 μ 在横截面上是均匀的，则有

$$\frac{1}{\sqrt{L'C'1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = u_{\mathrm{p}} \tag{2D.2}$$

式中，u_{p} 是相速度。

一阶耦合微分方程是

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = L'(z)\frac{\partial I}{\partial t} \tag{2D.3a}$$

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = C'(z)\frac{\partial V}{\partial t} \tag{2D.3b}$$

把上式写为相量形式，有

$$-\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial z} = L'(z)j\omega\widetilde{I} \tag{2D.4a}$$

$$-\frac{\partial \widetilde{I}}{\partial z} = C'(z)j\omega\widetilde{V} \tag{2D.4b}$$

由式(2D.3a)和式(2D.3b)，可以得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{L'(z)}\frac{\partial L'}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} - L'(z)C'(z)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{2D.5a}$$

类似地，可以得到 I 的方程为

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{1}{C'(z)}\frac{\partial C'}{\partial z}\frac{\partial I}{\partial z} - L'(z)C'(z)\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \tag{2D.5b}$$

式(2D.5a)和式(2D.5b)的相量形式分别为

$$\frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial z^2} - \frac{1}{L'(z)}\frac{\partial L'}{\partial z}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial z} + \omega^2 L'(z)C'(z)\widetilde{V} = 0 \tag{2D.6a}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{I}}{\partial z^2} - \frac{1}{C'(z)}\frac{\partial C'}{\partial z}\frac{\partial \widetilde{I}}{\partial z} + \omega^2 L'(z)C'(z)\widetilde{I} = 0 \tag{2D.6b}$$

我们可以得到一个指数传输线的解析解，下一节将专门讨论这个问题。

2D.2 指数传输线

这一节定义一个指数传输线，它的电感和电容都是下式所示的指数函数。

令

$$L' = L_0' e^{qz} \tag{2D.7a}$$

$$C' = C_0' e^{-qz} \tag{2D.7b}$$

如果注意，

$$L'C' = L_0'C_0' = \varepsilon\mu \tag{2D.7c}$$

那么，方程式(2D.5a)和式(2D.5b)将分别具有下列形式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - q\frac{\partial V}{\partial z} - L_0'C_0'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{2D.8}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + q\frac{\partial I}{\partial z} - L_0'C_0'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \tag{2D.9}$$

对于在空间中和时间中都做正弦变化的情况，可以假设

$$V(z,t) = V_0 e^{j(\omega t - k_v z)} \tag{2D.10}$$

由式(2D.8)和式(2D.10)，可以得到

$$(-jk_v)^2 - q(-jk_v) - L_0'C_0'(j\omega)^2 = 0$$

$$-k_v^2 + jk_v q + \omega^2 L_0'C_0' = 0$$

$$\omega^2 L_0'C_0' = k_v^2 - jk_v q \tag{2D.11}$$

当 ω 为实数时，k_v 将为复数，因此

$$k_v = \beta_v - j\alpha_v \tag{2D.12}$$

将式(2D.12)代入式(2D.11)中，可以得到

$$\omega^2 L_0'C_0' = (\beta_v - j\alpha_v)^2 - j(\beta_v - j\alpha_v)q$$

$$\omega^2 L_0'C_0' = \beta_v^2 - \alpha_v^2 - \alpha_v q \tag{2D.13a}$$

$$-\beta_v(2\alpha_v + q) = 0 \tag{2D.13b}$$

这样，可以得到

$$\alpha_v = \frac{-q}{2} \tag{2D.14}$$

将式(2D.14)代入式(2D.13a)中，可以得到

$$\beta_v^2 - \frac{q^2}{4} + \frac{q^2}{2} = \omega^2 L_0'C_0' \tag{2D.15a}$$

$$\beta_v = \pm\beta$$

式中

$$\beta = \sqrt{\omega^2 L_0'C_0' - \frac{q^2}{4}} \tag{2D.15b}$$

因此，得到 $k_v = \pm\beta - j\alpha_v = \pm\beta + j(q/2)$，

$$e^{-jk_v z} = e^{\pm j\beta z} e^{\frac{q}{2}z} \tag{2D.16}$$

令

$$\omega_c = \frac{q}{2\sqrt{L_0'C_0'}} \tag{2D.17a}$$

$$\beta_0 = \omega\sqrt{L_0'C_0'} \tag{2D.17b}$$

则

$$\beta_v = \beta_0\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \tag{2D.18}$$

且

$$e^{-jk_v z} = e^{\left[\pm j\beta_0\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} + \frac{q}{2}\right]z} \tag{2D.19}$$

因此，指数传输线方程式(2D.8)的正弦稳态解为

$$\widetilde{V}(z) = V_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{(q/2)z} e^{+j\beta z} \tag{2D. 20}$$

上式右端的第一项是一个正向行波，第二项是反向行波，分别由下式给出

$$\widetilde{V}^+(z) = V_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z}\text{（正向行波）} \tag{2D. 21}$$

$$\widetilde{V}^-(z) = V_0^- e^{(q/2)z} e^{+j\beta z}\text{（反向行波）} \tag{2D. 22}$$

应用同样的方法，由方程式(2D. 9)可以得到电流的解为

$$\widetilde{I}(z) = I_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z} + I_0^- e^{-(q/2)z} e^{+j\beta z} \tag{2D. 23a}$$

$$\widetilde{I}^+(z) = I_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z}\text{（正向行波）} \tag{2D. 23b}$$

$$\widetilde{I}^-(z) = I_0^- e^{-(q/2)z} e^{+j\beta z}\text{（反向行波）} \tag{2D. 23c}$$

从式(2D. 4a)、式(2D. 21)和式(2D. 7a)中，可以得到$\widetilde{V}_0^+$与$\widetilde{I}_0^+$以及$\widetilde{V}_0^-$与$\widetilde{I}_0^-$之间的关系。

$$\widetilde{I}^+(z) = -\frac{1}{j\omega L'(z)}\frac{\partial \widetilde{V}^+(z)}{\partial z}$$

$$\widetilde{I}^+(z) = -\frac{1}{j\omega L'(z)}\left(\frac{q}{2} - j\beta\right)V_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{I}^+(z) = -\frac{q/2 - j\beta}{j\omega L'_0 e^{qz}}V_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{I}^+(z) = -\frac{V_0^+(q/2 - j\beta)}{j\omega L'_0} e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{I}^+(z) = \widetilde{I}_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z}$$

$$Z_0^+ = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{-j\omega L'_0}{q/2 - j\beta} = \frac{\omega L'_0}{\beta + j(q/2)} \tag{2D. 24}$$

类似地，

$$Z_0^- = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{\omega L'_0}{\beta - j(q/2)} \tag{2D. 25}$$

应当注意，在非均匀传输线中，反向行波的特性阻抗与正向行波的特性阻抗是不相等的，即

$$Z_0^+ \neq Z_0^- \tag{2D. 26}$$

进一步分析，有

$$Z^+(z) = \frac{V^+(z)}{I^+(z)} = \frac{V_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z}}{I_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z}}$$

$$Z^+(z) = Z_0^+ e^{qz} \tag{2D. 27}$$

类似地，

$$Z^-(z) = Z_0^- e^{qz} \tag{2D. 28}$$

如果将式(2D. 18)中的β代入，那么式(2D. 24)可以写为

$$Z_0^+ = \frac{\omega L'_0}{\beta + j\left(\frac{q}{2}\right)} = \frac{\omega L'_0}{\beta_0\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} + j\omega_c\sqrt{L'_0 C'_0}}$$

$$Z_0^+ = \frac{\omega L'_0}{\beta_0[(1 - \omega_c^2/\omega^2]^{1/2} + j(\omega_c/\omega)]}$$

$$Z_0^+ = \sqrt{\frac{L'_0}{C'_0}}\frac{[(1 - \omega_c^2/\omega^2)^{1/2} + j(\omega_c/\omega)]}{1 - \omega_c^2/\omega^2 + \omega_c^2/\omega^2}$$

$$Z_0^+ = Z_0\left[\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} - j\frac{\omega_c}{\omega}\right] \tag{2D. 29a}$$

类似地，可以证明

$$Z_0^- = Z_0\left[\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} + j\frac{\omega_c}{\omega}\right] \tag{2D. 29b}$$

式中，Z_0 是由下式给出的名义上的特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'_0}{C'_0}} \tag{2D.30}$$

对于一个均匀传输线，有 $q=\omega_c=0$，均匀传输线的所有公式都可以从下式中求得

$$Z_0^+ = Z_0^- = \sqrt{\frac{L'}{C'}}(\text{均匀传输线 } \omega_c = 0) \tag{2D.31}$$

2D.3 输入阻抗

$$Z(z) = \frac{\widetilde{V}(z)}{\widetilde{I}(z)} = \frac{\widetilde{V}^+(z) + \widetilde{V}^-(z)}{\widetilde{I}^+(z) + \widetilde{I}^-(z)}$$

$$Z(z) = \frac{\widetilde{V}_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z} + \widetilde{V}_0^- e^{(q/2)z} e^{+j\beta z}}{\widetilde{I}_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z} + \widetilde{I}_0^- e^{-(q/2)z} e^{+j\beta z}}$$

$$Z(z) = \frac{\widetilde{V}_0^+ e^{(q/2)z} e^{-j\beta z}(1 + \Gamma_{0V} e^{j2\beta z})}{\widetilde{I}_0^+ e^{-(q/2)z} e^{-j\beta z}(1 + \Gamma_{0I} e^{j2\beta z})}$$

$$Z(z) = Z_0^+ e^{qz} \frac{(1 + \Gamma_{0V} e^{j2\beta z})}{(1 + \Gamma_{0I} e^{j2\beta z})} \tag{2D.32}$$

式中

$$\Gamma_{0V} = \frac{V_0^-}{V_0^+} \tag{2D.33}$$

$$\Gamma_{0I} = \frac{I_0^-}{I_0^+} \tag{2D.34}$$

注意

$$\Gamma_{0V} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = -\frac{Z_0^- I_0^-}{Z_0^+ I_0^+}$$

$$\Gamma_{0V} = -\frac{Z_0^-}{Z_0^+}\Gamma_{0I}$$

$$\Gamma_{0I} = -\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\Gamma_{0V} \tag{2D.35}$$

2D.4 $z=0$ 处的任意负载

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{I_0^+ + I_0^-}$$

$$Z_L = \frac{V_0^+}{I_0^+}\left(\frac{1 + \Gamma_{0V}}{1 + \Gamma_{0I}}\right)$$

$$Z_L = Z_0^+\left(\frac{1 + \Gamma_{0V}}{1 + \Gamma_{0I}}\right)$$

$$Z_L = Z_0^+\left[\frac{1 + \Gamma_{0V}}{1 + \left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)\Gamma_{0V}}\right]$$

$$Z_L = Z_0^+ Z_0^-\left(\frac{1 + \Gamma_{0V}}{Z_0^- - Z_0^+\Gamma_{0V}}\right)$$

$$Z_L(Z_0^- - Z_0^+\Gamma_{0V}) = Z_0^+ Z_0^-(1 + \Gamma_{0V})$$

$$\Gamma_{0V}(Z_0^+ Z_0^+ + Z_L Z_0^+) = Z_L Z_0^- - Z_0^+ Z_0^-$$

$$\Gamma_{0V} = \frac{Z_0^-(Z_L - Z_0^+)}{Z_0^+(Z_L + Z_0^-)} \tag{2D.36}$$

类似地，

$$\Gamma_{0I} = -\frac{Z_L - Z_0^+}{Z_L + Z_0^-} \tag{2D. 37}$$

由式(2D. 32)可知，在 $z=-h$ 处的输入阻抗为

$$Z(h) = Z_0^+ e^{-qh}\left(\frac{1+\Gamma_{0V} e^{-j2\beta h}}{1+\Gamma_{0I} e^{-j2\beta h}}\right)$$

$$Z(h) = Z_0^+ e^{-qh}\left(\frac{e^{j\beta h}+\Gamma_{0V} e^{-j\beta h}}{e^{j\beta h}+\Gamma_{0I} e^{-j\beta h}}\right)$$

$$Z(h) = \frac{Z_0^+ e^{-qh}(Z_L + Z_0^-)}{Z_0^+(Z_L + Z_0^-)}\frac{Z_0^+(Z_L+Z_0^-)e^{j\beta h} + Z_0^-(Z_L - Z_0^+)e^{-j\beta h}}{(Z_L+Z_0^-)e^{j\beta h} - (Z_L - Z_0^+)e^{-j2\beta h}} \tag{2D. 38}$$

上式可以写为

$$Z(h) = e^{-qh}\frac{N}{D}$$

$$N = \cos\beta h[Z_0^+(Z_L+Z_0^-) + Z_0^-(Z_L - Z_0^+)] + j\sin\beta h[Z_0^+(Z_L+Z_0^-) - Z_0^-(Z_L - Z_0^+)]$$

$$N = \cos\beta h[Z_L(Z_0^+ + Z_0^-)] + j\sin\beta h[Z_0^+ Z_L - Z_0^- Z_L + 2Z_0^+ Z_0^-]$$

$$D = \cos\beta h[Z_L + Z_0^- - Z_L + Z_0^+] + j\sin\beta h[Z_L + Z_0^- + Z_L - Z_0^+]$$

$$D = \cos\beta h[Z_0^+ + Z_0^-] + j\sin\beta h[2Z_L + Z_0^- - Z_0^+]$$

$$Z(h) = e^{-qh}\frac{Z_L(Z_0^+ + Z_0^-)}{(Z_0^+ + Z_0^-)}\left\{\frac{1 + j\tan\beta h\left[\frac{(Z_0^+ Z_L - Z_0^- Z_L + 2Z_0^+ Z_0^-)}{Z_L(Z_0^+ + Z_0^-)}\right]}{1 + j\tan\beta h\left[\frac{(2Z_L + Z_0^- - Z_0^+)}{(Z_0^+ + Z_0^-)}\right]}\right\}$$

$$Z(h) = e^{-qh}\frac{(Z_0^+ + Z_0^-)}{2}\left\{\frac{Z_L + j\tan\beta h\left[\frac{(Z_0^+ Z_L - Z_0^- Z_L + 2Z_0^+ Z_0^-)}{(Z_0^+ + Z_0^-)}\right]}{\frac{(Z_0^+ + Z_0^-)}{2} + j\tan\beta h\left[\frac{(2Z_L + Z_0^- - Z_0^+)}{2}\right]}\right\} \tag{2D. 39}$$

附录4A

高频时良导体中的损耗计算：表面电阻 R_S

由式(2.14)可知，表面电阻 R_S 可以写为

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}$$

这个表面电阻是一个长1m和宽1m的矩形良导体材料在高频时的交流电阻。在图2.2中，如果 $l=1$ 和 $b=1$，由式(2.38)可知，$R_{AC}=1/\sigma\delta$。R_S 是单位面积的电阻，其单位为 Ω，但是它随 l 的增大而增大，随 b 的增大而减小。这是因为当 l 增大时，电压增大，($\widetilde{E}$ 是沿 z 轴方向的)；而当 b 增大时，电流 $\widetilde{I}$ 增大。在计算电介质-导体分界面的电介质一侧内的电磁场时，如果假设导体是一个理想电导体，那么就可以把导体内的电流理想化地看成在分界面上的一种面电流 $\widetilde{K}$。因此，如果 $b=1$，电流就等于 K，每单位面积上的功率损耗是

$$\frac{1}{2}I^2R_{AC} = \frac{1}{2}K^2R_S$$

由理想电导体表面上的边界条件，可以得到

$$|\widetilde{K}| = |\widetilde{H}|$$

因此，每单位面积的功率损耗是

$$S_R = \frac{1}{2}R_S|\widetilde{H}|^2 \quad (\text{W/m}^2)$$

在表面 S 上的总功率损耗为

$$W_L = \iint_S \frac{1}{2}R_S|\widetilde{H}|^2\,\mathrm{d}S$$

这就是式(4.14)的理论依据。

附录 6A

受限傅里叶级数的展开

一个由下式所表示的周期函数

$$f(t) = f(t+T) \tag{6A.1}$$

可以用傅里叶级数表示为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{6A.2}$$

式中，T 是周期。

在式(6A.2)中，有

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{6A.3}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \tag{6A.4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6A.5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6A.6}$$

在直角坐标系中，当试图求解给定边界条件下的拉普拉斯方程时，我们必须对定义在某一个区间上的任意函数进行傅里叶级数展开。边界条件可能仅需要利用正弦项、奇次正弦项等。下面的例子将说明如何确定一个函数的整个周期及其周期是多少。

例 6A.1 如图 6A.1 所示，定义在一有限范围 $0<t<t_1$ 内的一个函数 $x(t)$。

试画出函数 $x(t)$ 的各种可能的周期性延拓，使得其傅里叶级数具有如下性质：

A. 仅含奇次谐波项。

B. 仅含正弦项。

C. 仅含余弦项和奇次谐波项。

D. 仅含正弦项和奇次谐波项。

在一个周期内，通过调整函数的周期和延拓，使得其满足上面所给定的要求条件。

解 A. 当仅含奇次谐波项时，要求有旋转对称性，即

$$x(t) = -x\left(t \mp \frac{T}{2}\right) \tag{6A.7}$$

周期性延拓如图 6A.2 所示，周期是 $T=2t_1$。

B. 当仅含正弦项时，要求有奇对称性，即

$$x(t) = -x(-t) \tag{6A.8}$$

周期性延拓如图 6A.3 所示，周期是 $T=2t_1$，仅画出从 $-t_1$ 到 t_1 的部分。

C. 当仅含余弦项和奇次谐波项时，要求有偶对称性和旋转对称性，即

$$x(t) = x(-t)$$

$$x(t) = -x\left(t \mp \frac{T}{2}\right) \tag{6A.9}$$

周期性延拓如图 6A.4 所示，周期是 $T=4t_1$，仅画出从 $-t_1$ 到 $3t_1$ 的部分。

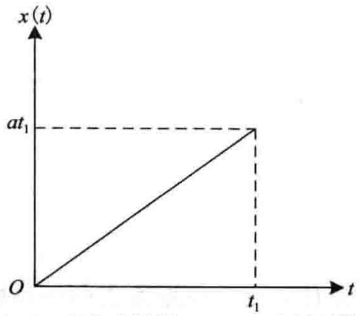


图 6A.1 定义在区间 $0<t<t_1$ 上的函数 $x(t)$

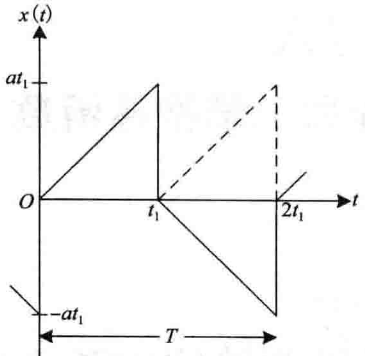


图 6A.2 仅含奇次谐波项的 $x(t)$。虚线表示 $x(t-T/2)$

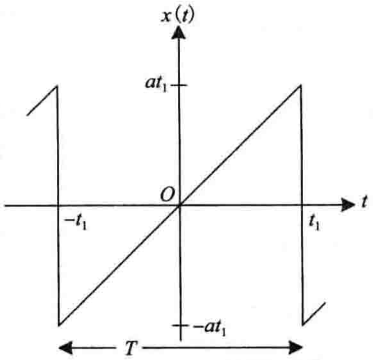


图 6A.3 仅含正弦项的 $x(t)$

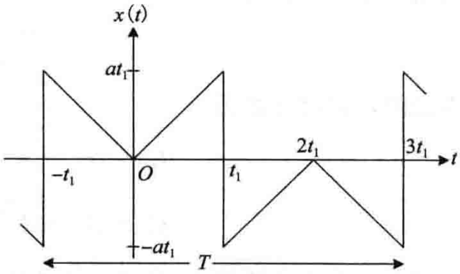


图 6A.4 仅含余弦项和奇次谐波项的 $x(t)$

D. 当仅含正弦项和奇次谐波项时，要求有奇对称性和旋转对称性，即

$$x(t)=-x(-t)$$

$$x(t)=-x\left(t\mp\frac{T}{2}\right) \tag{6A.10}$$

周期性延拓如图 6A.5 所示，周期是 $T=4t_1$，仅画出从 $-t_1$ 到 $3t_1$ 的部分

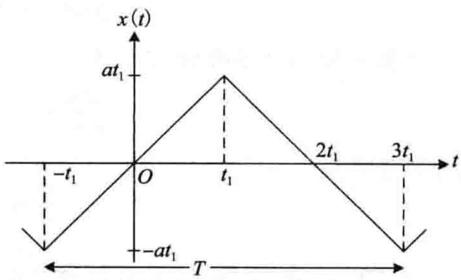


图 6A.5 仅含正弦项和奇次谐波项的 $x(t)$

作为周期性延拓对傅里叶系数计算的影响的一个例子，我们继续研究周期为 $2t_1$ 的情况 B。因此，有

$$b_n=\frac{2}{2t_1}\int_{-t_1}^{t_1}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6A.11}$$

式中，$\omega_0=2\pi/2t_1=\pi/t_1$。因为 $f(t)$是奇函数，$\sin(n\omega_0 t)$是奇函数，所以被积函数 $f(t)\sin(n\omega_0 t)$ 对所有积分值 n 都是偶函数，因此有

$$b_n=\frac{2}{2t_1}(2)\int_0^{t_1}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t=\frac{2}{t_1}\int_0^{t_1}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6A.12}$$

$$b_n=\frac{2}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6A.13}$$

◀

参考文献

1. Guillemin, E. A., *The Mathematics of Circuit Analysis*, Wiley, New York, NY, 1949.

附录 7A

二维和三维格林函数

7A.1 简介

7.2 节简要地讨论了格林函数。对于狄利赫里边界条件，拉普拉斯方程的一维格林函数是如下式所示微分方程的解

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\delta(x-x'),\quad 0<x<L \tag{7A.1a}$$

其给定的边界条件为

$$G=0,\quad x=0 \tag{7A.1b}$$

$$G=0,\quad x=L \tag{7A.1c}$$

可以证明，格林函数为

$$G=G_1=x\frac{L-x'}{L},\quad 0<x<x' \tag{7A.2a}$$

$$G=G_2=\frac{x'(L-x)}{L},\quad x'<x<L \tag{7A.2b}$$

对于一个任意的输入 $f(x)$，可以从下式的叠加积分得到响应 $y(x)$

$$y(x)=\int_0^L f(x')G(x,x')\mathrm{d}x' \tag{7A.3}$$

函数 y 所满足的微分方程是

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x),\quad 0<x<L \tag{7A.4a}$$

其边界条件是

$$y=0,\quad x=0 \tag{7A.4b}$$

$$y=0,\quad x=L \tag{7A.4c}$$

式(7A.3)所表示的 y 是方程式(7A.4)的解，其中的 G 由式(7A.2)给定。如果考虑在两个子区域 $0<x<x'$ 和 $x'<x<L$ 上的解，则可以更具体地写出式(7A.3)，有：

$$y(x)=\int_0^L \frac{x(L-x')}{L}f(x')\mathrm{d}x',\quad 0\leqslant x\leqslant x' \tag{7A.5a}$$

$$y(x)=\int_0^L \frac{x'(L-x)}{L}f(x')\mathrm{d}x',\quad x'\leqslant x\leqslant L \tag{7A.5b}$$

注意到：在一些书籍中，利用输入强度为一个单位脉冲函数来定义格林函数：

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-x') \tag{7A.6}$$

此时，所得到的解将与式(7A.2a)和式(7A.2b)的符号相反

$$G=G_1=x\frac{x'-L}{L},\quad 0<x<x' \tag{7A.7a}$$

$$G=G_2=x'\frac{x-L}{L},\quad x'<x<L \tag{7A.7b}$$

我们也可以考虑一下具有狄利赫里边界条件的一维亥姆霍兹方程，

$$\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=-\delta(x-x') \tag{7A.8a}$$

$$G=0,\quad x=0 \tag{7A.8b}$$

$$G=0,\quad x=L \tag{7A.8c}$$

$$G=G_1=\frac{1}{k}\frac{\sin kx\sin k(L-x')}{\sin kL},\quad 0<x<x' \tag{7A.9a}$$

$$G=G_2=\frac{1}{k}\frac{\sin kx'\sin k(L-x)}{\sin kL},\quad x'<x<L \tag{7A.9b}$$

7A.2 另一种形式：无穷级数

7.2 节使用的方法是在两个子区域中分别求解齐次方程，而将施加脉冲的点 $x=x'$ 剔除掉。利用边界条件和激励源条件，可以求出待定常数。其结果是一个闭式的格林函数。现在，我们将应用特征函数展开法来求另一种形式的格林函数。

如果利用这种方法求解方程式(7A.6)，则可以将其解写成一个无穷级数

$$G(x,x')=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x')\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{7A.10}$$

注意，式(7A.10)右端的每一项都满足在 $x=0$ 或 L 处 $G=0$ 的边界条件。由式(7A.10)，可以得到

$$\frac{d^2G}{dx^2}=\sum\left(-\frac{n\pi}{L}\right)^2a_n(x')\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{7A.11}$$

将式(7A.11)代入式(7A.6)中，并且两边同乘以 $\sin m\pi x/L$，然后在 $0\sim L$ 上积分，可以得到

$$-\sum\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2a_n(x')\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\int_0^L\delta(x-x')\sin\frac{m\pi x}{L}dx \tag{7A.12}$$

由三角函数的正交性质，可得

$$\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=0,\quad m\neq n=\frac{L}{2},m=n \tag{7A.13}$$

因此，由式(7A.12)，可以得到

$$-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2a_m(x')\frac{L}{2}=\sin\frac{m\pi x'}{L}$$

$$a_m(x')=-\frac{2L}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x'}{L}$$

这样，就有

$$G(x,x')=-\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x'}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{7A.14}$$

式(7A.14)是式(7A.7a)和式(7A.7b)的另一种形式，虽然式(7A.14)为一个无穷级数。因此，如下方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \tag{7A.15}$$

的解可以写为

$$y(x)=-\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x'}{L}f(x')dx' \tag{7A.16}$$

因为在式(7A.16)中含有 $1/n^2$ 项，所以这个解是收敛的。

7A.3 斯特姆-刘维尔算子

对于一个由普通二阶微分方程所描述的一维问题，其一般的级数求解方法可以用斯特

姆-刘维尔算子 L 来系统地表示：

$$[L+\lambda r(x)]y=f(x) \tag{7A.17a}$$

式中

$$L=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)\right\} \tag{7A.17b}$$

令 Ψ_n 是 L 算子的正交特征函数的一个完备集合，即

$$[L+\lambda_n r(x)]\Psi_n(x)=0 \tag{7A.18}$$

其边界条件与式(7A.17a)的原始问题的边界条件相同。如果 $G(x, x')$是格林函数

$$[L+\lambda r(x)]G(x,x')=\delta(x-x') \tag{7A.19}$$

满足与原始问题相同的边界条件，则

$$G(x,x')=\sum_n\frac{\Psi_n(x')\Psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n} \tag{7A.20}$$

我们将对从式(7A.20)得到的两个具体问题，给出格林函数级数形式的两个例子[1]。

例 7A.1

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}=\delta(x-x')$$

方程式(7A.6)是方程式(7A.19)的一个特例，其中

$$\lambda=0,\quad p(x)=1,\quad q(x)=0,\quad r(x)=1,\quad L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

从下式可以得到特征函数

$$[L+\lambda_n r(x)]\psi(x)=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda_n\right)\psi_n=0$$

其边界条件为

$$\psi_n=0,\quad x=0\text{ 或 }L$$

这样，有

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}(\text{正交的}),\quad n=1,2,\cdots,\infty$$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$G(x,x')=\sum_n\frac{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x'}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}}{0-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

这个结果与式(7A.14)相同。第二个例子是亥姆霍兹方程的格林函数(级数形式)。

例 7A.2

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}+\beta^2G=\delta(x-x') \tag{7A.21a}$$

$$G(0)=G(L)=0 \tag{7A.21b}$$

方程式(7A.21a)是方程式(7A.19)的另一个特例，其中

$$\lambda=\beta^2,\quad p(x)=1,\quad q(x)=0,\quad r(x)=1,\quad L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

正交函数是

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\beta_n x=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

因此，

$$G(x,x') = \frac{2}{L}\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x'/L)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\beta^2 - (n\pi/L)^2} \tag{7A. 22}$$

为了结束这一节，这里将写出斯特姆-刘维尔问题的闭式格林函数：

$$G_1 = G(x,x') = \frac{h_2(x')h_1(x)}{p(x')w(x')},\quad 0 < x < x' \tag{7A. 23a}$$

$$G_2 = G(x,x') = \frac{h_1(x')h_2(x)}{p(x')w(x')},\quad x' < x < L \tag{7A. 23b}$$

式中，$h_1(x)$是在 $0<x<x'$ 区间上齐次方程的解，$h_2(x)$是在 $x'<x<a$ 区间上齐次方程的解：

$$G_1(x) = A_1 h_1(x) \tag{7A. 23c}$$

$$G_2(x) = A_2 h_2(x) \tag{7A. 23d}$$

而 $w(x')$是 h_1 和 h_2 在 $x=x'$处的朗斯基(Wronskian)矩阵。

$$w(x') = h_1(x')h_2'(x') - h_2(x')h_1'(x') \tag{7A. 23e}$$

可以从通解式(7A. 23)，得到式(7A. 9a))和式(7A. 9b)给出的格林函数的闭式解，注意

$$p(x) = 1,\quad h_1(x) = \sin kx,\quad h_2(x) = \sin k(L-x)$$

且可以得到的朗斯基矩阵为

$$\begin{aligned}
w(x') &= h_1(x')h_2'(x') - h_2(x')h_1'(x') \\
&= (\sin kx)(-k)\cos k(L-x) - \sin k(L-x)(k)\cos kx \\
&= -[\sin kx\cos k(L-x) + \cos kx\sin k(L-x)] \\
&= -[\sin k(x+L-x)] \\
&= -k\sin kL
\end{aligned}$$

$$G = G_1 = \frac{\sin k(L-x')\sin kx}{-k\sin kL},\quad 0 < x < x' \tag{7A. 24a}$$

$$G = G_2 = \frac{\sin kx'\sin k(L-x)}{-k\sin kL},\quad x' < x < L \tag{7A. 24b}$$

式(7A. 24)和式(7A. 9)之间的符号差异，是因为式(7A. 9)是相应于脉冲强度为−1 的响应。

7A. 4 直角坐标系中的二维格林函数

7A. 4. 1 拉普拉斯方程：公式

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \frac{d^2G}{dy^2} = \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{7A. 25a}$$

$$x = 0 \text{ 或 } a,\quad G = 0$$

$$y = 0 \text{ 或 } b,\quad G = 0 \tag{7A. 25b}$$

闭式解

首先，写出

$$G(x,y,x',y') = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} g_m(y;x',y')\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{7A. 26}$$

这里构造出这样的函数使得在 $x=0$ 或 a 处的边界条件能够得到满足。

将式(7A. 26)代入式(7A. 25a)中，可以得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 g_m(y;x',y')\sin\frac{m\pi x}{a}+\sin\frac{m\pi x}{a}\frac{d^2 g_m(y;x',y')}{dy^2}\right]$$
$$=\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{7A.27}$$

用 $\sin(n\pi x/a)$乘以式(7A.27)的两边，并在 $0\sim a$ 上对 x 进行积分。

根据正交性质，等式的左边为

$$\frac{a}{2}\left[-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 g_n(y;x',y')+\frac{d^2}{dy^2}g_n(y;x',y')\right]$$

以及等式右边为

$$\int_0^a \delta(x-x')\delta(y-y')\sin\frac{n\pi x}{a}dx=\sin\frac{n\pi x'}{a}\delta(y-y')$$

因此，可以得到 y 所满足的微分方程为

$$\frac{d^2}{dy^2}g_m(y;x',y')-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 g_m(y;x',y')=\frac{a}{2}\sin\frac{m\pi x'}{a}\delta(y-y') \tag{7A.28}$$

现在，利用求式(7A.23a)和式(7A.23b)的方法，可以求解方程式(7A.28)。

方程式(7A.28)的齐次形式是

$$\frac{d^2}{dy^2}g_m(y;x',y')-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 g_m(y;x',y')=0 \tag{7A.29}$$

在 $y=0$ 或 b，满足边界条件 $g_m=0$：

$$A_1h_1(x)\rightarrow A_mh_m^{(1)}(y)=A_m(x',y')\sinh\frac{m\pi y}{a},\quad \text{区域 }1,0<y<y' \tag{7A.30a}$$

$$A_2h_2(x)\rightarrow B_mh_m^{(2)}(y)=B_m(x',y')\sinh\frac{m\pi(b-y)}{a},\quad \text{区域 }2,y'<y<b \tag{7A.30b}$$

现在，经过化简后，由式(7A.23e)得到的朗斯基矩阵为

$$w(y;x',y')=-\frac{m\pi}{a}\sinh\frac{m\pi b}{a} \tag{7A.30c}$$

由式(7A.23a)，可以得到

$$g_m^{(1)}(y;x',y')=\frac{(2/a)\sin(m\pi x'/a)(h_m^{(2)}|_{y'})(h_m^{(1)}|_y)}{-(m\pi/a)\sinh(m\pi b/a)}$$
$$=\frac{-(2/m\pi)\sin(m\pi x'/a)\sinh(m\pi/a)(b-y')\sinh(m\pi y/b)}{\sinh(m\pi b/a)},\quad 0<y<y' \tag{7A.31a}$$

由式(7A.23b)，可以得到

$$g_m^{(2)}(y;x',y')=\frac{-(2/m\pi)\sin(m\pi y'/a)\sinh[(m\pi/a)(b-y)]}{\sinh(m\pi b/a)},\quad y'<y<b \tag{7A.31b}$$

现在，完整的格林函数是

当 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant y'$ 时，

$$G(x,y;x',y')=-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sinh\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)(b-y)\right]}{m\sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)}$$
$$\times\sin\frac{m\pi x}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} \tag{7A.32a}$$

当 $0\leqslant x\leqslant a$，$y'\leqslant y\leqslant b$ 时，

$$G(x,y;x',y')=-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x/a)\sinh[(m\pi/a)(b-y)]}{m\sinh(m\pi b/a)}$$
$$\times\sin\frac{m\pi x'}{a}\sinh\frac{m\pi y'}{a} \tag{7A.32b}$$

我们也可以得到另一种形式的格林函数。首先满足在 $y=0$ 或 b 处的边界条件，即不是采用式(7A. 2)，而是采用如下形式的解

$$G(x,y;x',y') = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} g_n(x;x',y')\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{7A. 33}$$

在 Balanis[1] 的式(14. 83a)和式(14. 83b)中给出了所求得的结果。

7A. 4. 2 拉普拉斯方程的级数形式解(双线性解)

对于二维问题的格林函数的级数形式解，我们需要正交特征函数 ψ_{mn}。

这些正交特征函数是如下方程式的解(对于拉普拉斯方程)

$$\frac{\partial^2\psi_{mn}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_{mn}}{\partial y^2}+\lambda_{mn}\psi_{mn}=0 \tag{7A. 34a}$$

其边界条件为

$$\psi_{mn}=0,\quad x=0\text{ 或 }a=0,\quad y=0\text{ 或 }b \tag{7A. 34b}$$

当然，我们知道满足边界条件式(7A. 34b)的正交特征函数是

$$\psi_{mn}=A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

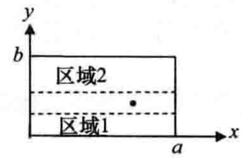


图 7A. 1 二维矩形区域被分为两个子区域

区域 1，$0<y<y'-\varepsilon$；

区域 2，$y'+\varepsilon<y<b$

由正交性质，可知，

$$1=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}(\psi_{mn})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{ab}{4}A_{mn}^2$$

这样，有 $A_{mn}=2/\sqrt{ab}$，

$$\psi_{mn}=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{7A. 35a}$$

$$\lambda_{mn}=\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{7A. 35b}$$

利用双线性形式式(7A. 20)，可以得到

$$\begin{aligned}G(x,y;x',y')&=\sum_m\sum_n\frac{\psi_{mn}(x',y')\psi_{mn}(x,y)}{\lambda-\lambda_{mn}}\\&=\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x'/a)\sin(n\pi y'/b)}{-[(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2]}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned} \tag{7A. 36}$$

注意，对于拉普拉斯方程，有 $\lambda=0$。

可以用式(7A. 36)来求解泊松方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=q(x,y) \tag{7A. 37a}$$

利用式(7A. 36)和叠加积分，可以得到

$$\begin{aligned}V(x,y)=&\frac{-4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\\&\times\int_{y'=0}^{b}\int_{x'=0}^{a}q(x',y')\sin(m\pi x'/a)\sin(n\pi y'/b)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\end{aligned} \tag{7A. 37b}$$

7A. 4. 3 亥姆霍兹方程(级数形式)

对于齐次狄利赫里边界条件，格林函数满足如下方程

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\beta^2 G=\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{7A. 38a}$$

其边界条件是

$$G=0,\quad x=0\text{ 或 }a,\quad y=0\text{ 或 }b \tag{7A. 38b}$$

在这种情况下，$\lambda=\beta^2$：

$$\psi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{7A.39}$$

以及式(7A.36)可以修改为

$$G(x,y;x',y') = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x'/a)\sin(n\pi y'/b)}{\beta^2 - [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{7A.40}$$

7A.5 广义格林函数方法

到目前为止，我们已经推导出了满足齐次狄利赫里边界条件的格林函数；在所有例子中，位函数也满足齐次狄利赫里边界条件。

现在，让我们来研究是否可以利用一个更一般的具有脉冲源的格林函数，而不必满足齐次狄利赫里边界条件。标量亥姆霍兹方程是

$$\nabla^2 \Phi(r) + \beta^2 \Phi(r) = f(r) \tag{7A.41}$$

而这个问题的格林函数是 $G(r, \mathrm{r}')$，$G(r, r')$满足方程

$$\nabla^2 G(r,r') + \beta^2 G(r,r') = \delta(r-r') \tag{7A.42}$$

下面给出在附录 16C 中将要讨论的格林第一和第二公式。

格林第一公式

$$\oiint_S \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S = \iiint_V \Phi\, \nabla^2 \psi \mathrm{d}V + \iiint_V (\overline{\nabla}\Phi \cdot \overline{\nabla}\psi) \mathrm{d}V \tag{7A.43}$$

在上式中，S 是限定体积 V 的一个闭合曲面，Φ 和 φ 是两个标量函数，$\hat{n}$是垂直于表面 S 的单位矢量。

格林第二公式

$$\oiint_S \left[\Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = \iiint_V [\Phi\, \nabla^2 \psi - \psi\, \nabla^2 \Phi] \mathrm{d}V \tag{7A.44}$$

用 $G(\overline{r}, \overline{r}')$乘以式(7A.41)，用 $\Phi(\overline{r})$乘以式(7A.42)，可以得到

$$G\, \nabla^2 \Phi + \beta^2 \Phi G = fG \tag{7A.45}$$

$$\Phi\, \nabla^2 G + \beta^2 \Phi G = \Phi\delta(\overline{r}, \overline{r}') \tag{7A.46}$$

从式(7A.46)中减去式(7A.45)，并在体积 V 上进行积分，可以得到

$$\iiint_V \Phi(\overline{r}') \delta(\overline{r}, \overline{r}') \mathrm{d}V - \iiint_V fG \mathrm{d}V = \iiint_V [\Phi\, \nabla^2 G - G\, \nabla^2 \Phi] \mathrm{d}V \tag{7A.47}$$

将式(7A.44)应用于式(7A.47)的右端，并计算出式(7A.47)左端的第一项，可以得到

$$\Phi(\overline{r}') = \iiint_V f(\overline{r}) G(\overline{r}, \overline{r}') \mathrm{d}V + \oiint_S \left[\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S \tag{7A.48a}$$

由于 $\overline{r}'$是 V 内的任意一点，且 $\overline{r}'$是一个虚拟变量，因此 $G(\overline{r}, \overline{r}') = G(\overline{r}', \overline{r})$

可以将式(7A.48)写为(交换 $\overline{r}$ 和 $\overline{r}'$)

$$\Phi(\overline{r}) = \iiint_V f(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') \mathrm{d}V + \oiint_S \left[\Phi(\overline{r}') \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(\overline{r}')}{\partial n}\right] \mathrm{d}S \tag{7A.48b}$$

在上式中，微分是关于带撇(′)坐标的。

如果边界条件是齐次狄利赫里边界条件，即在 S 上 Φ 和 G 都满足这个边界条件，那么第二个积分(闭合面积分)就变为 0，因此

$$\Phi(\overline{r}) = \iiint_V f(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') \mathrm{d}V \tag{7A.49}$$

实际上，这就是在前面所有讨论中使用过的叠加积分。在所有那些讨论中，令 Φ 和 G 两者都满足齐次狄利赫里边界条件。式(7A.48)是对于一般情况的修正叠加积分。为了使用式(7A.48)，我们需要同时知道在闭合边界 S 上的 Φ、$\partial\Phi/\partial n$ 和 $\partial G/\partial n$。

7A.6 三维格林函数和格林并矢

自由空间中标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \tag{7A.50}$$

的三维格林函数是

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \tag{7A.51}$$

令式(7A.50)和式(7A.51)中的 $k=0$，就可以得到拉普拉斯方程及其格林函数。

格林函数 $\bar{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}')$，也称为格林并矢，满足如下方程

$$[\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times - k^2]\bar{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{u}\delta(\bar{r} - \bar{r}') \tag{7A.52}$$

式中，$\bar{u}$ 是一个单位并矢，由下式给出

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \hat{e}_m \hat{e}_n \delta_{mn}. \tag{7A.53}$$

在式(7A.53)中，$\hat{e}_m$ 在直角坐标系中分别是$\hat{x}$、$\hat{y}$和$\hat{z}$，$m=1, 2, 3$。δ_{mn}是 Kronecker delta 函数，并由下式给出

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{7A.54}$$

在文献[2，3]中，给出了并矢及其性质的一个很好的说明。在这一点上，也可以定义二重梯度$\bar{\nabla}\bar{\nabla}$：

$$\bar{\nabla}\,\bar{\nabla} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} e_m e_n \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{7A.55}$$

由并矢算子的性质[2,3]，可以证明并矢林函数为

$$\bar{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = \left(\bar{u} + \frac{1}{k^2} \bar{\nabla}\,\bar{\nabla}\right) G(\bar{r}, \bar{r}') \tag{7A.56}$$

式(7A.56)将式(7A.51)给出的标量格林函数 G 与式(7A.56)给出的并矢林函数联系了起来。

这样一来，电场方程

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} - k^2 \bar{E} = -j\omega\mu \bar{J} \tag{7A.57}$$

的解，可以看做并矢林函数 $\bar{\Gamma}$ 的一个叠加积分。

$$\bar{E}(\bar{r}) = -j\omega\mu \iiint \bar{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{J}(\bar{r}') \mathrm{d}r' \tag{7A.58}$$

参考文献

1. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
2. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1964.
3. Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, Hemisphere Publishing, New York, NY, 1985.

附录 9A
热等离子体媒质的实验模拟

Dikshitulu K. Kalluri，R. Prasad 和 S. Sataindra ⊖

9A.1 简介

Rotman[1]、Golden[2]与 Kalluri 和 Prasad[3]使用人工电介质模拟了各向同性无损耗冷等离子体。本章采用层叠人工电介质的概念来介绍模拟各向同性无损耗热等离子体媒质的一种方法，反过来，层叠人工电介质可以用介质棒来模拟。在这种媒质存在的情况下，用实验方法研究了在 9.5GHz 时 X 波段喇叭天线的 E 和 H 平面辐射方向图，并与理论方向图进行了对比。

9A.2 热等离子体模型

在静磁场不存在且波沿 z 轴传播的情况下，可以把热等离子体看成[4]一种介电常数为 $\overline{\overline{K}}$ 的电介质：

$$\overline{\overline{K}} = K_{xx}(\hat{a}_x\,\hat{a}_x + \hat{a}_y\,\hat{a}_y) + K_{zz}\,\hat{a}_z\,\hat{a}_z \tag{9A.1}$$

式中

$$K_{xx} = \frac{1-\omega_p^2}{\omega^2} \tag{9A.2}$$

$$K_{zz} = \frac{1-\omega_p^2}{\omega^2 + a^2\gamma^2} \tag{9A.3}$$

且 a 是反映等离子体平均温度的声速，ω 是波的角频率，ω_p 是等离子体的角频率，γ 是沿波 z 轴传播的复传播常数。即便在静磁场不存在的情况下，介电常数也是以张量的形式出现的，因为通过适当定义一个等效的介电张量[4, p. 1900]，也可以把热等离子体中空间电荷波的影响作为一种效应包含在介质中。

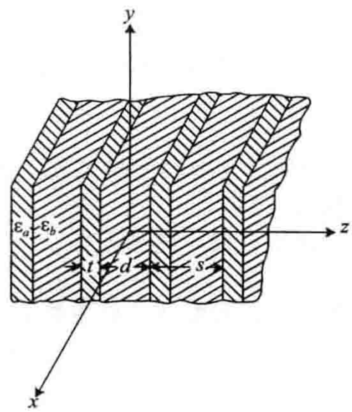


图 9A.1 层叠人工电介质

（经过允许转载，图片源自 D. Kalluri, R. Prasad, and S. Sataindra, Experimental simulation of a warm- plasma medium, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS- 13, 4. ©1985 IEEE.）

9A.3 问题的公式表示

在研究无穷多个电介质薄片层叠的各向异性特性时，Collin[5]提出了这个研究的动机。如图 9A.1 所示，通过用人工电介质模拟两种不同等离子体频率的各向同性冷等离子体，这个想法也适用于模拟热各向同性等离子体。每一个厚度为 t 和相对介电常数为 ε_a 的人工电介质被另一个厚度为 d 和相对介电常数为 ε_b 的人工电介质分隔开。

令沿各个主轴的主介电常数分别为 ε_1、ε_1 和 ε_2，且令这些主轴分别与 x、y 和 z 轴相重合。Collin[5]得到的 ε_1 和 ε_2 的近似表达式为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)\frac{t}{s} \tag{9A.4}$$

⊖

$$\varepsilon_2 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_b}\right) - \left(\frac{t}{s}\right)\left\{\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{(\varepsilon_a \varepsilon_b)}\right\}\right]^{-1} \tag{9A.5}$$

因此，这种层叠人工电介质的介电张量为

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_1(\hat{a}_x \hat{a}_x + \hat{a}_y \hat{a}_y) + \varepsilon_2 \hat{a}_z \hat{a}_z \tag{9A.6}$$

对于满足如下不等式的 k_0S，采用平面波近似是精确的

$$k_0 S < \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{9A.7}$$

式中，ε 是 ε_a 和 ε_b 中的较大者。

对于 k_0S 的一般值，Collin 在文献[5]的式(9A. 14a)和式(9A. 14b)中给出了等效介电常数 ε_1' 和 ε_2' 的二阶近似值。对于满足下式要求的 S 值，平面波近似是满足要求的

$$\frac{\varepsilon_1' - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \ll 1}$$

和

$$\frac{\varepsilon_2' - \varepsilon_2 \varepsilon}{\varepsilon_2 \ll 1} \tag{9A.8}$$

9A. 4 介质棒媒质的设计及其等效等离子体参数

设计步骤总结如下。

1）选择适当的运行频率和层叠人工电介质中各介质薄片厚度 t 与 d 的额定值。

2）为表征两种不同等离子体频率的各向同性冷等离子体媒质，设计两种人工电介质。利用介质棒媒质可以构造人工电介质。求解如下式所示的超越方程[2,3]，就可以得到介质棒媒质的等效等离子体频率

$$F(\lambda) = 1 - \left\{\cos\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) + \frac{\lambda}{\left[2b\mathrm{In}\left(\frac{b}{2\pi r}\right)\right]}\sin\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\right\} = 0 \tag{9A.9}$$

式中，r 是介质棒的半径，b 是相邻两个介质棒之间的间距。等离子体波长 λ_p 是 $F(\lambda)$ 的最大零点，等离子体频率 $f_p = c/\lambda_p$，其中 c 是自由空间中的光速。令与两种介质棒媒质对应的两个等离子体角频率分别为 ω_{pa} 和 ω_{pb}。

3）冷等离子体的介电常数为

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{9A.10}$$

式中，ω_p 是等离子体角频率，ω 是波角频率。对于选定的波频率和在第 2)步计算中得到的两个等离子体频率，可以从式(9A. 10)中求出介电常数。令

$$\varepsilon_a = 1 - \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \tag{9A.11}$$

和

$$\varepsilon_b = 1 - \frac{\omega_{pb}^2}{\omega^2} \tag{9A.12}$$

4）检验不等式条件(式(9A. 7))是否满足。

5）对于选定的 t 和 $S(=t+d)$ 值，利用式(9A. 4)和式(9A. 5)可以求出 ε_1 与 ε_2。

6）现在，通过类比，可以看出 $\varepsilon_x = K_{xx}$ 和 $\varepsilon_2 = K_{zz}$。因此，由式(9A. 2)，就可以求出热等离子体的等效等离子体频率 ω_p。

7）利用下面的公式，可以求出相位常数 β：

$$\beta^2 = k_0^2 K_{xx} \tag{9A.13}$$

式中，$k_0 = \omega/c$。

8) 由式(9A.3)和式(9A.13)，可以得到声速 a 的表达式，由下式给出

$$a=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\left(f^2-\frac{f_p^2}{1-\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9A.14}$$

式中，f 是运行频率，f_p 是热等离子体的等效等离子体频率。

9) 应当计算并检验$(\varepsilon_1'-\varepsilon_1)/\varepsilon_1$ 和$(\varepsilon_2'-\varepsilon_2)/\varepsilon_2$，它们是否可以忽略不计。

9A.5 设计样例

1) 选择运行频率为 9.45GHz，$t=1.4$cm 和 $S=2.8$cm。

2) 选择两种介质棒媒质来模拟两种冷等离子体(见图 9A.2)，参数为：

对于媒质 a，$r=0.0022$in，$b=0.7$cm，

对于媒质 b，$r=0.0024$in，$b=0.7$cm，

由步骤 9)，得到 $f_{pa}=\omega_{pa}/2\pi=9.099399$GHz 和 $f_{pb}=9.20937$GHz。

3) 利用式(9A.11)和式(9A.12)可得，$\varepsilon_a=0.072825$ 和 $\varepsilon_b=0.0502781$ 。

4) 当 $t=1.4$cm 和 $S=2.8$cm 时，$t/S=0.5$；$k_0S=5.544$ 和 $2\pi/\varepsilon=23.292$。因此。满足式(9A.7)。

5) 由(9A.4)式和(9A.5)式可得，$\varepsilon_1=0.0615515$ 和 $\varepsilon_2=0.0594867$。

6) 由式(9A.2)，可得等效等离子体频率 $f_p=9.154$GHz。

7) 由式(9A.13)，可得 $\beta=0.4910318$rad/cm。

8) 由式(9A.14)，可得 $a=5.66\times10^9$cm/s。

9) $\varepsilon_1'=0.0616545$ 和 $\varepsilon_2'=0.0595636$，并且满足式(9A.8)。

因此，在运行频率为 9.45GHz 时，图 9A.2 和图 9A.3 所示的人工电介质可以模拟等离子体频率 $f_p=9.154$GHz 和声速为 $a=5.66\times10^9$cm/s 的热等离子体。两种介质棒媒质由铜导线制成，一种介质的参数是 $b=0.7$cm 和 $r=0.0022$in，另一种介质的参数是 $b=0.7$cm 和 $r=0.0024$in，如图 9A.2 所示。为了清楚起见，图 9A.2(不是按比例)中放大了两种介质棒媒质中棒半径的差异。

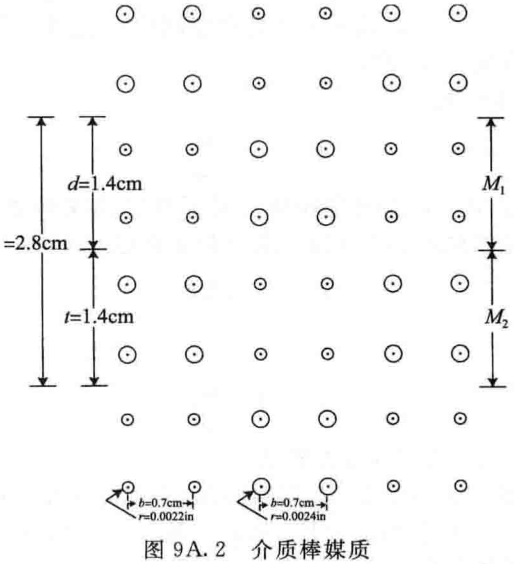


图 9A.2 介质棒媒质

(经过允许转载，图片源自 D. Kalluri, R. Prasad, and S. Sataindra, Experimental simulation of a warm-plasma medium, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13, 4. © 1987 IEEE.)

如下表所示，利用不同的运行频率(f)，同样的人工电介质可用于模拟其他等离子体参数。

f(GHz)	f_p(GHz)	$a\times10^{-9}$(cm/s)
9.35	9.154	8.515
9.4	9.154	6.8
9.5	9.154	4.859
9.55	9.154	4.256
9.60	9.152	3.786

9A.6 模拟的实验验证

这种人工电介质用于模拟一个热等离子体平板，设计一个实验可以测量喇叭天线的 E 和 H 平面辐射方向图。将实验所得结果与理论结果进行了对比。理论结果是用式(9A.15)和式(9A.16)得到的[2]：

$$P_\theta = K_0\left\{\frac{\sin[(k_0B/2)\sin\theta]}{(k_0B/2)\sin\theta}\right\}^2 \times\left\{\frac{1}{\cos^2(k_zL)+(1/n^4)[(n^2-\sin^2\theta)/\cos^2\theta]\sin^2(k_zL)}\right\} \tag{9A.15}$$

$$P_\varphi = C_0\left\{\frac{\pi^2}{4}\cos\theta\frac{\cos[(k_0A/2)\sin\theta]}{(\pi/2)^2-[(k_0A/2)\sin\theta]^2}\right\}^2 \times\left[\frac{1}{\cos^2(k_zL)+\cos^2\theta/(n^2-\sin^2\theta)\sin^2(k_zL)}\right] \tag{9A.16}$$

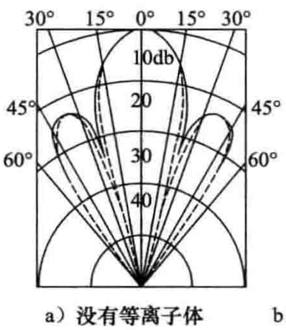
式中，K_0 和 C_0 是与照射强度相关的常数，n 是等离子体的折射系数，A 和 B 是孔隙的尺寸，L 是等离子体平板的厚度，且 $k_z=k_0\sqrt{n^2-\sin^2\theta}$。

当 $a>0.001c$ 时，折射系数 n 为[6]

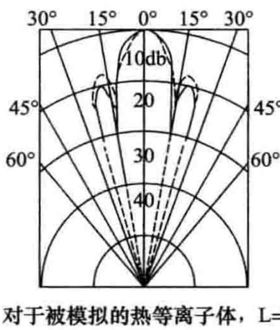
$$n=\frac{1-(\omega_p/\omega)^2[1-(5/2)(a/c)]^2}{1+[(\omega_p/\omega)(a/c)]^2} \tag{9A.17}$$

喇叭天线的孔隙尺寸是 $A=B=$ 喇叭的轴向长度 $=7.6$cm，等离子体平板的厚度为 8.4cm。用 TM_{10} 模式激励喇叭天线。在 9.5GHz 时，得到了使用或不使用人工电介质的喇叭天线的 E 和 H 平面辐射方向图。

图 9A.3(E 平面)和图 9A.4(H 平面)所示为由实验和理论所得到的辐射方向图。从这些图中可以清楚地看到，理论和实验结果一致，这样就验证了热等离子体的实验模拟效果。应用这种模拟方法来建立热等离子体的一种检测方法的研究工作正在进行之中。



a) 没有等离子体

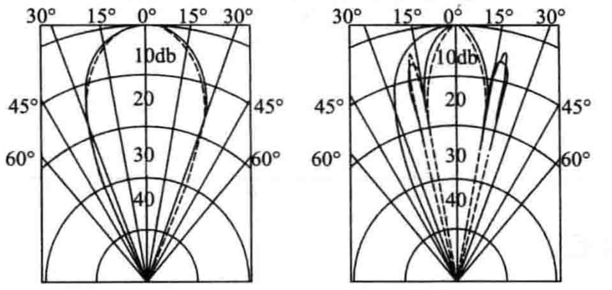


b) 对于被模拟的热等离子体，L=84 cm

图 9A.3 在 9.45GHz 时，喇叭天线的 E 平面辐射方向图

(——实验结果；……理论结果)(经过允许转载，图片源自 D. Kalluri，R. Prasad，and S. Sataindra，Experimental simulation of a warm-plasma medium，*IEEE Trans. Plasma Sci.*，PS-13,4. ©1987 IEEE.)

由于等离子体参数随运行频率变化，现在的模拟方法还不适合于研究波传播特性随热等离子体频率的变化。研究工作的进展有望移除这一限制。



a）没有等离子体 b）对于被模拟的热等离子体，L=84 cm

图 9A.4 在 9.5GHz 时，喇叭天线的 H 平面辐射方向图

（——实验结果；------理论结果）（经过允许转载，图片源自 D. Kalluri, R. Prasad, and S. Sataindra, Experimental simulation of a warm-plasma medium, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13, 4. © 1988 IEEE.）

参考文献

1. W. Rotman, Plasma simulation by artificial dielectrics, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-10, 82–95, 1962.
2. K. E. Golden, Plasma simulation with an artificial dielectric in a horn geometry, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-13, 587–594, 1965.
3. D. Kalluri and R. Prasad, Experimental simulation of waveguide and cavity filled with low-loss plasma, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-6, 568–573, 1978.
4. G. A. Articolo, Derivation of an equivalent dielectric tensor for a warm, drifting, lossy, electron plasma, *J. Appl. Phys.*, 40, 1896–1902, 1969.
5. R. E. Collin, A simple artificial anisotropic dielectric medium, *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, 6, 206–209, 1958.
6. M. A. Heald and C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965, p. 116.
7. D. Kalluri, R. Prasad, and S. Sataindra, Experimental simulation of a warm-plasma medium, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-13, 4, 1985–1988 (Reprint).

附录9B

波在手性媒质中的传播

可以证明，R 和 L 波是手性媒质中波传播的标准模式。

如果随着波的传播，其极化状态不发生改变，就称这个模式是标准传播模式。在无源手性媒质中，麦克斯韦方程是

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9B.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9B.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9B.3}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{9B.4}$$

下面研究一个 R 波在这种媒质中的传播。令

$$\boldsymbol{E} = (\hat{x} - \mathrm{j}\,\hat{y})E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_c z)} \tag{9B.5}$$

$$\boldsymbol{D} = (\hat{x} - \mathrm{j}\,\hat{y})D_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_c z)} \tag{9B.6}$$

$$\boldsymbol{B} = (\mathrm{j}\,\hat{x} + \hat{y})B_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_c z)} \tag{9B.7}$$

$$\boldsymbol{H} = (\mathrm{j}\,\hat{x} + \hat{y})H_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_c z)} \tag{9B.8}$$

其中，k_c 是手性媒质中的波数。由式(9B.1)，可得

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -jk_c \\ E_0 & -jE_0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathrm{j}\omega B_0$$

由上式可得

$$k_c E_0 = \omega B_0 \tag{9B.9}$$

同样，从式(9B.2)可得

$$k_c H_0 = \omega D_0 \tag{9B.10}$$

由式(9.93)和式(9.94)所给出的手性媒质的本构关系式，以及将式(9B.5)代入式(9B.8)中，可以得到

$$D_0 = \varepsilon E_0 + \xi_c B_0 \tag{9B.11}$$

$$H_0 = -\xi_c E_0 + \frac{B_0}{\mu} \tag{9B.12}$$

由式(9B.10)至式(9B.12)，可以得到 E_0 和 B_0 之间的关系式：

$$(-k_c\xi_c - \varepsilon\omega)E_0 + \left(\frac{k_c}{\mu} - \omega\xi_c\right)B_0 = 0 \tag{9B.13}$$

式(9B.13)和式(9B.9)可以写为矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} -k_c\xi_c - \omega\varepsilon & \dfrac{k_c}{\mu} - \omega\xi_c \\ k_c & -\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = 0 \tag{9B.14}$$

只有当矩阵的行列式等于零时，这一组齐次方程才有一个非平凡解，由此得到下面的方程：

$$k_c^2 - 2\omega\mu\xi_c k_c - k^2 = 0 \tag{9B.15}$$

这样，这个 R 波的波数 k_{cR} 为

$$k_{cR} = \omega\mu\xi_c + [k^2 + (\omega\mu\xi_c)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{9B. 16}$$

而且，进一步可以证明波阻抗为

$$\eta_c = \frac{E_0}{H_0} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon + \mu\xi_c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9B. 17}$$

对于一个 L 波，其波数 k_{cL} 为

$$k_{cL} = -\omega\mu\xi_c + [k^2 + (\omega\mu\xi_c)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{9B. 18}$$

以及波(特性)阻抗仍然是由式(9B. 17)给出。

附录 12D 讨论在磁等离子体中的法拉第旋转，并将其与手性媒质中的自然旋转进行了对比。

附录10A
表面波激励引起等离子体羽衣的反向散射[⊖]

Dikshitulu K. Kalluri

10A.1 简介

Keith Groves 博士是我在 Air Force Office of Scientific Research Summer Faculty Research Program(1994)的PL/GP项目中的研究伙伴，他建议我研究下面的问题：空军实验室(Air Force Laboratories)进行的实验表明，在某一特定的中间频带内，等离子体羽衣会产生相当大的不期望的电磁反向散射。

图10A.1和图10A.2所示为等离子体羽衣中的电子密度和碰撞频率。这个羽衣是一个非均匀有损耗等离子体圆柱体。在其轴线($r=0$)上的最大电子密度 N_{0m}是3E13(#/cm^3)，相应的等离子体角频率(注意，为了方便起见，将会偶尔使用计算机符号 Exx=10^{xx})：

$$\omega_{pm}=\sqrt{\frac{N_{0m}e^2}{m\varepsilon_0}}=3\times10^{11}(\mathrm{rad/s}) \tag{10A.1}$$

且 $f_{pm}=\omega_{pm}/2\pi=47.75\mathrm{GHz}$。这里 m 和 e 分别是电子的质量与电荷量的绝对值，$\varepsilon_0=8.854\mathrm{E}-12(\mathrm{F/m})$是自由空间的介电常数。碰撞频率($\nu$)也随 r 变化，其变化范围是6E11～1E11(rad/s)。在这里，我们将研究在 $f=50\mathrm{MHz}$ 到 10GHz 的频率范围内，这样一个非均匀有损耗等离子体羽衣对电磁波的散射。

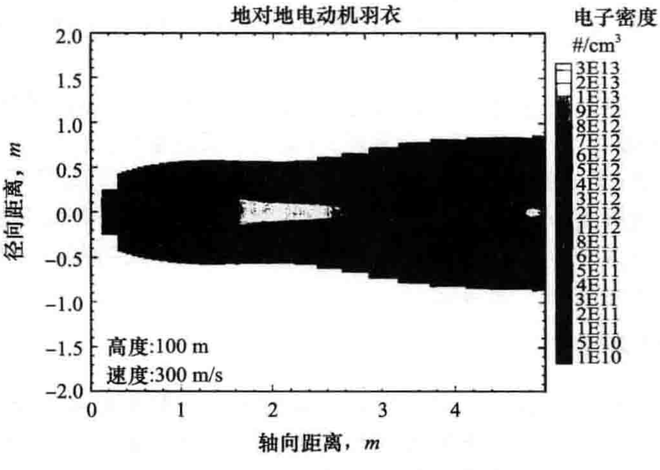


图10A.1 等离子体羽衣的电子密度

(经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.)

⊖ 经过允许转载，资料源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.

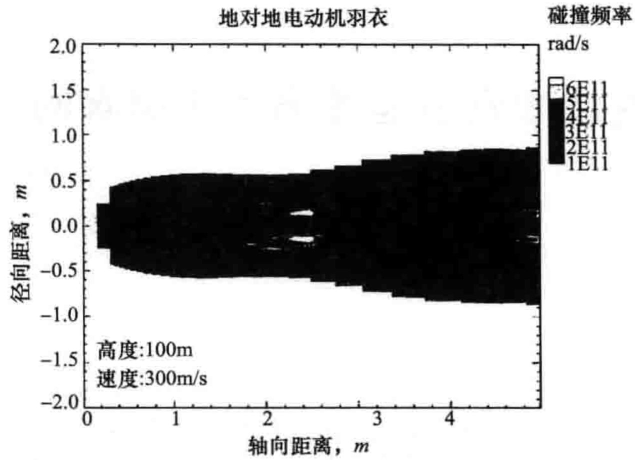


图 10A.2 等离子体羽衣的碰撞频率

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program，*Air Force Office of Scientific Research*，Report Number A669853，38，1994.）

10A.2 基于等离子体参数的问题分类

1）等离子体半径 a 的数量级大约是 0.5m；其归一化值是 $a/\lambda_{pm}=af_{pm}/c=83.3$。在这样的条件下，等离子体圆柱体被归类为厚等离子体。

这里，c 是光速$=3\times10^8$m/s，λ_{pm}是相应于等离子体频率的自由空间中的波长。

2）随着 f 从 50MHz 变化到 10GHz，归一化值 $a/\lambda=af/c$ 将从 8.3×10^{-2}变化到 16.67。

3）碰撞频率(ν)非常高，大约是轴上的等离子体频率。等离子体必须被归类为高度碰撞的。

4）$r=a$ 周围外的一层具有湍流的特性。

5）除去外层，在 50MHz 到 10GHz 的频率范围内，圆柱体的其余部分就像一个高密度等离子体（良导体）。

6）事实上，$r>a$ 是自由空间和 $r<a$ 像是一个良导体的高密度等离子体表明，该圆柱体能够支持 TM 表面波传播。当 $f<f_p$ 时，在靠近 $r=a$ 的外层边缘（湍流）像是一个粗糙的表面[1]。

这篇报告的作者（下文称为作者）强烈地受到了他对光频下表面等离子体激元研究经历的影响，以及对在这种情况下表面等离子体激元激励是否会产生反向散射感到好奇。然后，在全面进行研究这个专题之前，作者想了解高碰撞率非均匀等离子体对高频电磁波辐射的吸收。这方面内容将在下面讨论。

10A.3 TM 波的吸收

将等离子体圆柱体模拟成一个宽度为 $d=2a$ 的非均匀有损耗等离子体平板，就可以研究高碰撞率等离子体圆柱体对电磁波吸收的问题。图 10A.3 显示出了这个模型，为了直观起见，应用三角函数对不均匀性进行数学描述：

$$\omega_p(z)=\omega_{pm}\left(\frac{\sin\pi z}{d}\right)^{m/2} \tag{10A.2}$$

通过改变 m 的值，就可以改变曲线的形状以使其近似地符合实验曲线的形状。

在 $0<z<d$ 的区域内，正弦电磁场所满足的方程是

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\overline{H} \tag{10A.3}$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{H}=-N_0\mathrm{e}\overline{v}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\overline{E} \tag{10A.4}$$

$$\mathrm{j}\omega m\overline{v}=-\mathrm{e}\overline{E}-m\nu\overline{v} \tag{10A.5}$$

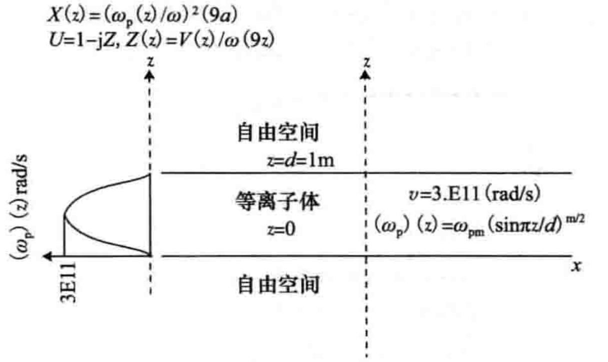


图 10A.3 不均匀性的数学模型

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program，*Air Force Office of Scientific Research*，Report Number A669853，38，1994.）。

这里 E、H 和 v 分别是电场强度、磁场强度和速度。其他符号具有通常的含义。假定各个场量的变化形式是

$$F(x,z,t) = F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - S_x)} \tag{10A.6}$$

对于 TM 波，可以得到其状态变量 E_x 和($\eta_0 H_y$)满足的一阶耦合微分方程：

$$-\frac{1}{\mathrm{j}k_0}\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z} = \frac{C^2 - X/U}{1 - X/U}(\eta_0 H_y) \tag{10A.7}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}k_0}\frac{\mathrm{d}(\eta_0 H_y)}{\mathrm{d}z} = (1 - X/U)E_x \tag{10A.8}$$

这里，$S=\sin\theta$，$C=\cos\theta$，θ 是入射角(与 z 轴间的夹角)，$k_0=\omega/c$，$\eta_0=(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}=120\pi$ 是自由空间的特性阻抗，以及符号 X 和 U(在磁离子理论中使用的符号)分别是

$$X(z) = [\omega_\mathrm{p}(z)/\omega]^2 \tag{10A.9a}$$

$$U = 1 - \mathrm{j}Z,\quad Z(z) = \frac{\nu(z)}{\omega} \tag{10A.9b}$$

可以设计出如下数值方法来求吸收系数。

1）在 $z=d$ 处，假定 E_X 是一个适当选取的任意复数 K_X，即 $E_X(d)=K_X=E_X^\mathrm{T}$。于是，在 $z=d$ 处，($\eta_0 H_y$)就是 K_X/C。

2）利用这些初值，数值求解一阶耦合微分方程式(10A.7)和式(10A.8)，得到 $E_X(0)=a_X$ 和 $\eta_0 H_y(0)=b_y$。

3）计算反射和折射系数：

$$R_{11} = \frac{E_x^\mathrm{R}}{E_x^\mathrm{I}} = \frac{a_x - Cb_y}{a_x + Cb_y} \tag{10A.10}$$

$$|T_{11}| = \left|\frac{E_x^\mathrm{T}}{E_x^\mathrm{I}}\right| = \left|\frac{2K_x}{a_x + Cb_y}\right| \tag{10A.11}$$

这里，上标 I、R 和 T 分别是指入射波、反射波与折射波。下标 11 是指入射波为平行(TM)极化的。

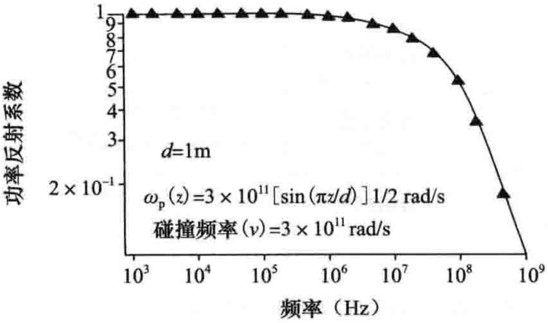
4）计算吸收系数：

$$A = 1 - \rho - \tau = 1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2 \tag{10A.12}$$

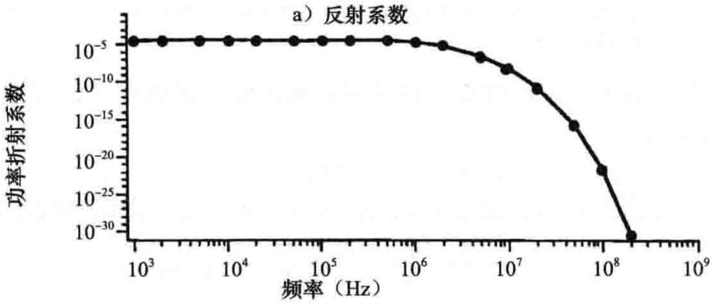
这里 ρ 和 τ 是功率反射与折射系数。

当入射角等于 60°时，图 10A.4a、图 10A.4b 和图 10A.4c 分别是 ρ、τ 与 A 随频率 f 的变化曲线。这里假定 ν 是常数，且等于 3E11(rad/s)。从这些曲线中可以清楚地看到，吸收随频率的增大而增大。注意，由于在 $\omega_\mathrm{p}(z)=\omega$ 时 z 的值随频率的增大而增大，所以源波的透入深度也随

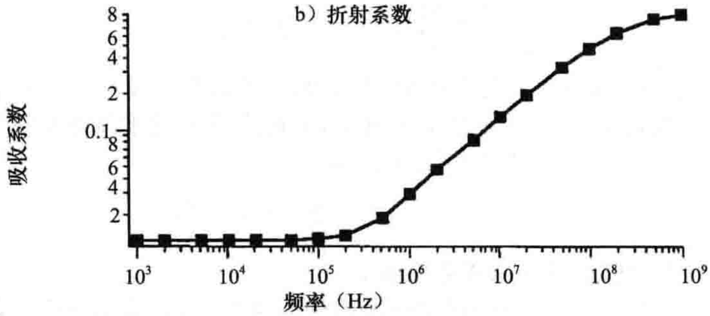
频率的增大而增大，这就定性地解释了吸收随频率的增大而增大这一结果。附带地，注意，对于所考虑的 TM 模式，存在一个伪布儒斯特角，如图 10A.5 所示。



a）反射系数



b）折射系数



c）入射波的吸收角为60°

图 10A.4 各个功率系数对频率的依赖关系

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.）

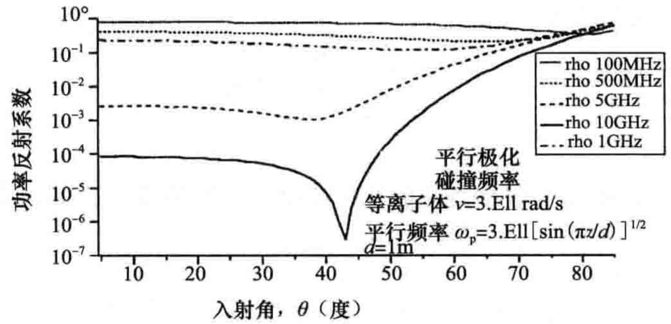


图 10A.5 功率反射系数与入射角之间的关系曲线

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.）

总之，只基于镜面反射和在上面所假定的相关物理现象，或许不能解释在中间频带内

增大的反向散射。这就使得我们需要考虑在模型中结合新的物理现象。

在外层中出现的湍流也许会起到一定的作用。因为对于所考虑的频率范围，等离子体是高密度的，所以可以把湍流层看成一个粗糙表面。内层的行为就像是一个气化的导体。这些想法使作者想到需要考虑表面波激励问题。

10A.4 表面波的回顾

如图 10A.6 所示，有一个表面波[2,3]沿 $x=0$ 表面传播，其相速度 $V_{ph}=\omega/k_z$。当 $|x|>0$ 时，表面波的场会衰减。如果两种电介质的介电常数为异号且 $\varepsilon_{r1}=-\varepsilon_{r2}$，那么这两种电介质的分界面就可以支持这样的表面波。如果媒质 2 是自由空间和媒质 1 是等离子体，且等离子体的等离子体频率使得 $\varepsilon_{r1}=(1-\omega_p^2/\omega^2)<-1$，就可以满足分界面上支持表面波的条件。这样的表面波称为表面等离子体激元。对于光学频段，媒质 1 是一种金属，其特性就像是负介电常数的等离子体。

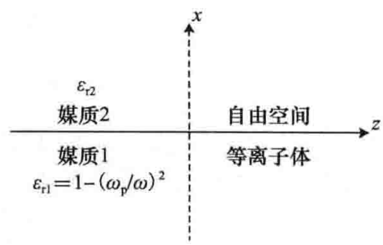


图 10A.6 自由空间-等离子体分界面

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.）

然而，由于表面波的色散特性（k_z 与 ω）位于光线的右侧（参见图 10A.9b，为了便于阐述，其中 β 是 k_z 的实部），自由空间中的电磁波以任意角度入射在分界面上不能激励起表面波。在光学中，通过使用一个 ART 耦合器或者光栅耦合器或者粗糙表面，就可以得到所需要的额外的 Δk_z。

10A.5 等离子体羽衣上的表面波激励

由 10A.2 和 10A.4 节中，可以很清楚地看到在等离子体羽衣表面上激发一个表面波的条件是存在的。这一节将讨论获得表面等离子体激元的色散关系式[3,4]所需要的方程（参考图 10A.7）。

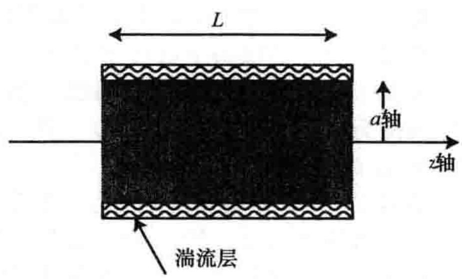


图 10A.7 具有湍流层的等离子体

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.）

等离子体区域（$0<r<a$）：

$$\varepsilon_p(r)=1-\frac{\omega_p^2(r)}{\omega(\omega-j\nu)} \tag{10A.13}$$

令

$$E_z^p(r,\varphi,z,t)=AG(r)e^{j(\omega t-k_z z)} \tag{10A.14}$$

式中

$$-k_{tp}^2(r)+k_z^2=k_0^2\varepsilon_p(r),\quad k_0=\frac{\omega}{c} \tag{10A.15}$$

且 $G(r)$ 满足微分方程

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\left[\frac{1}{r}+\frac{k_z^2}{k_{tp}^2(r)}\frac{d\varepsilon_p/dr}{\varepsilon_p(r)}\right]\frac{dG}{dr}-k_{tp}^2(r)G=0 \tag{10A.16}$$

这个 TM 波的其他场分量可用电场的 z 分量来表示。

$$E_r^p=-\frac{j}{k_{t0}^2}k_z\frac{\partial E_z^p}{\partial r} \tag{10A.17a}$$

$$H_\varphi^p=-\frac{j}{k_{t0}^2}\omega\varepsilon_0\varepsilon_p\frac{\partial E_z^p}{\partial r} \tag{10A.17b}$$

$$Z_{\mathrm{TM}}^{z}=\frac{E_r}{H^{\varphi}}=\frac{k_z}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{p}}} \tag{10A.17c}$$

自由空间区域($a<r<\infty$)：

$$\frac{\mathrm{d}^2E_z^0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E_z^0}{\mathrm{d}r}-k_{t0}^2E_z^0=0 \tag{10A.18}$$

$$-k_{t0}^2(r)+k_z^2=k_0^2 \tag{10A.19}$$

$$E_z^0(r,\varphi,z,t)=BK_0(k_{t0}r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_t-k_z z)} \tag{10A.20}$$

$$E_r^0(r,\varphi,z,t)=\mathrm{j}B\frac{k_z}{k_{t0}}K_1(k_{t0}r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_t-k_z z)} \tag{10A.21a}$$

$$H_\varphi^0(r,\varphi,z,t)=\frac{\mathrm{j}B}{k_{t0}}\omega\varepsilon_0K_1(k_{t0}r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_t-k_z z)} \tag{10A.21b}$$

这里，K_0 和 K_1 是第二类修正贝塞尔函数[5]。在 $r=a$ 处，由 E_z 和 H_φ 的连续性边界条件，可以得到下面的色散关系式：

$$\frac{k_{\mathrm{tp}}^2(a)}{\varepsilon_{\mathrm{p}}(a)}\frac{G(a)}{G'(a)}+k_{t0}\frac{K_0(k_{t0}a)}{K_1(k_{t0}a)}=0 \tag{10A.22}$$

在这些方程中，ω 是实数，k_z 和其他几个量都是复数，这些复模式将用于后面的计算中。特别地，记

$$k_z=\beta-\mathrm{j}\alpha \tag{10A.23}$$

式中，相位常数 β 和衰减常数 α 都是实数。表面波的传播速度为

$$V_{\mathrm{ph}}=\frac{\omega}{\beta} \tag{10A.24}$$

10A.6 色散关系的数值解法

对一给定的实数值 ω，上面的方程用于计算复数值 k_z。一般使用 Mathematica 软件的数值模式。这一方法由下面给出的两个步骤之间的迭代所组成，一直到收敛为止。

步骤 1：给出 k_z 的一个猜测值，然后数值求解 G 所满足的微分方程式(10A.16)，其初始条件为 $G(0)=\Phi$，$G'(0)=0$。但是要仔细地处理在 $r=0$ 处的奇点。这样，可以得到 $G(a)$ 和 $G'(a)$ 的值。

步骤 2：现在解色散方程(是一个非线性代数方程)，求得 k_z。

因为圆柱体很厚，所以对于某些 ω 值，$G(a)$ 和 $G'(a)$ 有可能都很大，虽然它们的比值不是很大。为了包括这一点，也发展了另一种数值方法。如果定义一个新的变量 $\gamma=G'/G$，就可以把 G 所满足的二阶微分方程转化为一阶非线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r}+\left[\frac{1}{r}+\frac{k_z^2}{k_{\mathrm{tp}}^2(r)}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}r}{\varepsilon_{\mathrm{p}}(r)}\right]\gamma+\gamma^2-k_{\mathrm{tp}}^2(r)=0 \tag{10A.25}$$

其初始条件是 $\gamma=0$

这里也要仔细处理在 $r=0$ 处的奇点问题。

10A.7 反向散射

等离子体羽衣上的表面行波类似于在端部激励模式下沿细线天线[6]流过的电流波。表面行波的传播速度接近于光速。远区辐射场是

$$E_{\mathrm{r}}=-A\mathrm{j}k_0L\sin\theta_1\frac{\sin[(p/2)k_0L(1-p\cos\theta_1)]}{(p/2)k_0L(1-p\cos\theta_1)} \tag{10A.26}$$

式中，相对于 θ_1 和 L 来说，A 是一个常数，θ_1 是观察点离开圆柱体羽衣轴线的角度，p 是除以 c 之后的传播速度。p 接近于 1 但是却小于 1。表面波在沿轴线传播了一段距离 L 后，当在 $z=L$ 处遇到媒质性质空间不连续时会被反射。就是这个反射波产生了反向散

射。图 10A.8 定性地解释了反向散射[6]。当 p 接近于 1 时，方向图[5]中的第一个最大值出现在

$$\theta_1 = 49.35\sqrt{\frac{\lambda}{L}}(\text{度}) \tag{10A.27}$$

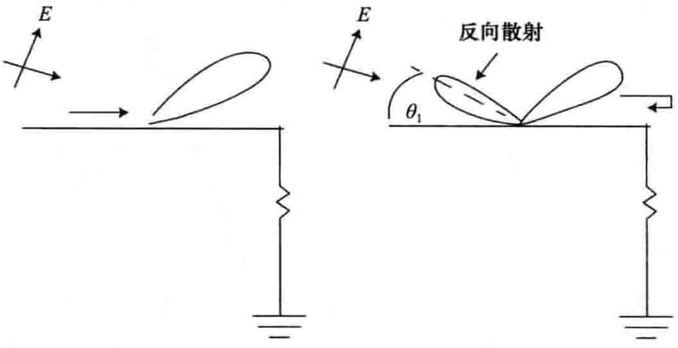


图 10A.8 引起反向散射的反射波

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program, *Air Force Office of Scientific Research*, Report Number A669853, 38, 1994.）

10A.8 样例计算

假定电子密度沿径向方向以零阶第一类贝塞尔函数的形式变化。因此，等离子体频率的平方等于

$$\omega_p^2(r) = \omega_{pm}^2 J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right) \tag{10A.28}$$

如果 $\mu=0$，那么媒质将是均匀的，而如果 $\mu=2.405$，则在边缘 $r=a$ 处的等离子体密度为 0。对于样例计算，选择 $\mu=2.1$。这样有

$$\omega_p(a) = \omega_{pm}\sqrt{J_0(2.1)} = 0.4082\omega_{pm} \tag{10A.29}$$

进一步选择 $\omega_{pm}=3E11(\text{rad/s})$，等离子体频率 $f_p(a)=19.51\text{GHz}$。

为了便于说明起见，让湍流层限于 $0.4<r<0.5$ 区域中，所以 $a=0.4$。取碰撞频率 ν 为 1.E11(rad/s)，它就是外层中的碰撞频率值。使用这些参数，就可以按照 10A.6 节描述的方法，通过数值求解得到 α 随 f 变化和 β 随 f 变化的曲线。图 10A.9 给出了这些结果。假定 $L=1\text{m}$，从图 10A.2 中可以看到，在 $L=1\text{m}$ 处媒质性质似乎不连续。为了便于说明起见，取 $f=600\text{MHz}$，$\lambda=0.5\text{m}$，由式(10A.27)可得，$\theta_1=34.9°$。对于一个与轴线成 34.9°角入射的自由空间 EM 波，图 10A.9 中标有等离子体圆柱体上的表面波的色散曲线左侧的曲线就是光线。这条曲线是一条直线，其方程为

$$k_{z0} = k_0\cos 34.9° \tag{10A.30}$$

标记有 $\Delta k_z=2.29$ 的水平线与动量(用光子学中的语言)的 z 分量成正比，这个动量是由湍流的粗糙表面所提供的。等离子体湍流的频谱的叠加将产生一个可以被激励起表面波的频带范围。图 10A.9a 允许我们计算波在到达不连续点之前，传播了一段距离 L 时表面波的衰减。在 600MHz 处，$\alpha=0.26119$ 和 $\exp(-2\alpha L)=59.3\%$。因此，仍有 60%的功率没有被反向散射。所有这些数值都是在 p 接近 1 的假设下得到的，可以通过计算在 $f=600\text{MHz}$ 时的 ω/β 值来验证这一点。保证 $p\approx 1$，可以得到 2.9767E8m/s 的传播速度。

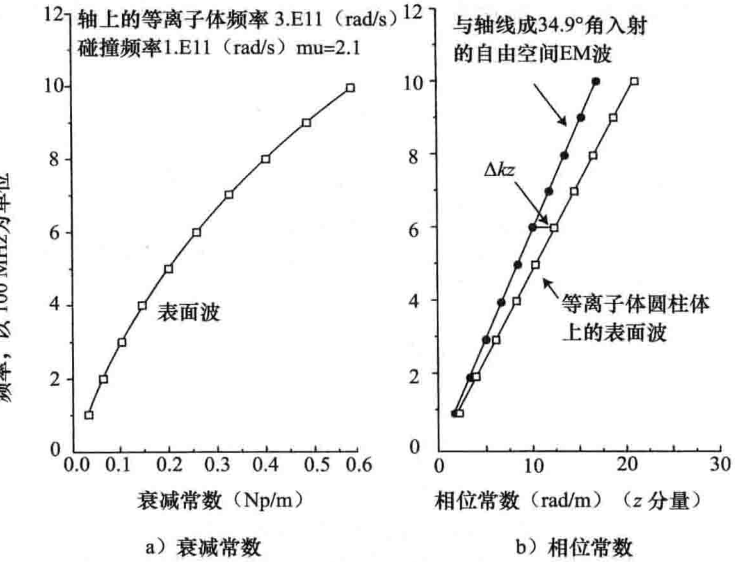


图 10A.9 样例计算

（经过允许转载，图片源自 Final Report Summer Faculty Research Program，*Air Force Office of Scientific Research*，Report Number A669853，38，1994.）

10A.9 结果和结论

基于到目前为止所得到的结果，可以得到下面关于各种参数的观察结果。

频率的影响：在低频时，由式(10A.26)给出的与 λ 成反比的辐射场很弱。在高频时，衰减常数比较大，以及在到达不连续点之前表面波就耗散完了，因此反向散射很弱。

L 的影响：由式(10A.26)可知，随着 L 的增大，辐射场会增大，但是方向角 θ_1 减小，Δk_z 减小，使得表面波的激励比较容易。α 或 β 不发生变化。但是由于 L 增大，波的衰减会增大。或许，反向散射的频带中心会随 L 增大向更高频率移动。

极化的影响：模型假定是 TM 波，由于仅当波的电场具有 z 分量时，才能激发出表面等离子体激元。

10A.10 未来工作展望

基于等离子体羽衣上的表面波激励的理论，给在中频带增强的反向散射提供了一个似乎有理的解释。基于一个简单模型和近似数据进行了样例计算。我们将进一步改善理论，并基于更多的实验数据来进行更精确的计算。当有关这方面的实验数据变得有效时，将在模型中结合湍流等离子体的频谱。作者打算提交一份暑期研究延长建议以便完成这项工作。

参考文献

1. Hochstin, A. R. and Martens, C. P., *Proceedings of Symposium on Turbulence of Fluids and Plasmas*, Polytechnic Press, New York, 1968, p. 187.
2. Raether, H., *Surface Plasmons*, Springer, Berlin, 1988.
3. Boardman, A. D. (ed.), *Electromagnetic Surface Modes*, Wiley, New York, NY, 1982.
4. Zethoff, M. and Kortshagen, U., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25, 1992, 187.
5. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1965.
6. Knott, E. F., Shaeffer, J. F., and M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Artech House, Boston, 1985, p. 148.

附录10B

电磁辐射的经典光子理论

在经典电磁理论中，光的波动性由麦克斯韦方程所描述，而光的粒子性由几何光学来描述[1]。电磁波包可被看做经典的粒子和经典的光子。令 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 分别表示光子沿光线运动时的动量和位置。光子的位置是波包的几何中心。

如图 10B.1 所示，当动量为 $\boldsymbol{p}_1$ 的光子从媒质 1 运动到的媒质 2 中时，其动量为 $\boldsymbol{p}_2$，光束发生了折射。

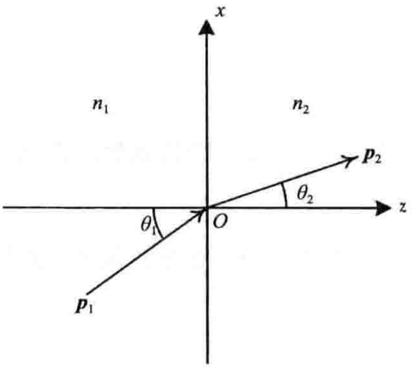


图 10B.1　光线的折射

令相应的能量为 E_1 和 E_2。沿 x 轴的动量分量是守恒的，且由下式给出

$$p_1\sin\theta_1 = p_2\sin\theta_2 \tag{10B.1}$$

光子的能量也是守恒的，由下面关系式给出

$$E_1 = E_2 \tag{10B.2}$$

对于一个频率为 ω 和波数 $k=|\boldsymbol{k}|$ 的波，其相速度 $u=\omega/k$，折射率 n 定义为 $n=c/u=ck/\omega$。如果用光子来描述，则能量 $E=\hbar\omega$ 和动量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$，其中 $\hbar$ 是普朗克常数。因此，$n=cp/E$，它的各个分量为

$$n_1 = \frac{cp_1}{E_1},\quad n_2 = \frac{cp_2}{E_2} \tag{10B.3}$$

这样，式(10B.1)等价于下式

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{10B.4}$$

这是斯涅尔定律的一般形式。

在一条光线中光子的速度更像是波包的群速度，因此

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_g = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}} = \nabla_p E \tag{10B.5}$$

因为很可能 $|\boldsymbol{v}_g|\neq u$，所以在一般情况下，有

$$\frac{E}{p} \neq \left|\frac{\partial E}{\partial p}\right| = |\nabla_p E|$$

在非均匀媒质中，

$$E = \frac{c|\boldsymbol{p}|}{n(\boldsymbol{r},E)} \tag{10B.6}$$

式(10B.6)是 E 的一个隐函数，当显式求解 E 时，将称为哈密顿函数(Hamiltonian)[2]。

$$E = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \tag{10B.7}$$

光线中的光粒子，也即光子，满足哈密顿方程：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = \nabla_p H \tag{10B.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{r}} = -\nabla_r H \tag{10B.9}$$

光子的速度 $\boldsymbol{v}_g=\dot{\boldsymbol{r}}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{v}_g = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{n\boldsymbol{u}}{n + E\partial n/\partial E} \tag{10B.10}$$

式中

$$\boldsymbol{u}=\frac{E\boldsymbol{p}}{p^{2}}=\frac{c\boldsymbol{p}}{np} \tag{10B.11}$$

光子所受的力为

$$\boldsymbol{f}=\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{E\,\nabla n}{n+E\partial n/\partial E} \tag{10B.12}$$

如果注意到 ω 和 k 都是与 H 和 p 成正比的[1]，那么方程式(10B.8)和式(10B.9)可以转化为包含 ω 和 k 的方程

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}=\nabla_{k}\omega \tag{10B.13}$$

$$\dot{k}=-\frac{\partial\omega}{\partial r}=-\nabla\omega \tag{10B.14}$$

式中，ω 扮演哈密顿函数的角色。一般情况下，它是按照下式随时间变化的

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\omega}{\partial t} \tag{10B.15}$$

对于一个非色散空间和/或者时变媒质[1]，

$$\omega=\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})=\frac{kc}{n(\boldsymbol{r},t)} \tag{10B.16a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}=\frac{\omega}{k^{2}}\boldsymbol{k} \tag{10B.16b}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial t}=\omega\,\nabla\ln n \tag{10B.16c}$$

由式(10B.15)，注意，对于一个时不变、空间变化的媒质，

$$\omega=\frac{kc}{n(\boldsymbol{r})} \tag{10B.17a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\omega}{\partial t}=0 \tag{10B.17b}$$

式中，ω 是一个运动常数，且

$$\omega=\omega_{0} \tag{10B.18}$$

经过空间不连续性时频率是守恒的。而且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=\omega\,\nabla\ln[n(\boldsymbol{r})] \tag{10B.19}$$

如果

$$n=n(z) \tag{10B.20}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}k_{x}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{10B.21}$$

且 k_x 是守恒的。这实际上就是斯涅尔定律。

$$k_{1}\sin\theta_{1}=k_{2}\sin\theta_{2} \tag{10B.22}$$

如果假设

$$n=n(t) \tag{10B.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=\omega\,\nabla\ln n(t)=0 \tag{10B.24}$$

$\boldsymbol{k}$ 是守恒的，但是

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\omega\frac{\partial}{\partial t}\ln n(t)$$

频率 ω 不守恒。

如果波沿 z 轴方向传播，那么

$$v_g(t)=\frac{dz}{dt}=\frac{c}{n(t)} \tag{10B.25}$$

反过来，k 守恒意味着

$$k=\frac{\omega(t)n(t)}{c}=\text{常数} \tag{10B.26}$$

图 10B.2 所示为折射系数在时间中的一个阶跃变化。在这种情况下，

$$n_1\omega_1=n_2\omega_2 \tag{10B.27}$$

在时间边界(时间折射)上，一个光子的时间折射可以用下面的定律来描述[1]：

$$\omega_1\tan\alpha_1=\omega_2\tan\alpha_2 \tag{10B.28}$$

式中

$$\tan\alpha=\frac{v_g}{c}=\frac{1}{n} \tag{10B.29}$$

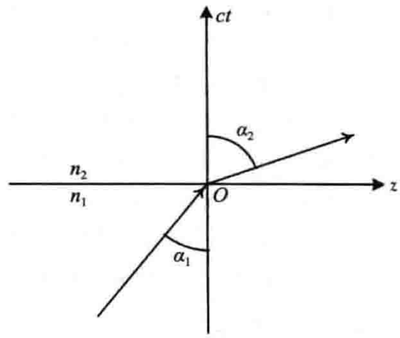


图 10B.2 一个光子在时间不连续点的折射

用光子语言来说，在时变媒质中的频率变换就称为光子加速。除了光子光线理论以外，Mendonca[1] 还从多个角度广泛地讨论了光子加速。Kalluri[3] 讨论了时变复杂媒质中的电磁学：通过求解时变磁等离子体中的麦克斯韦方程组，并利用 k 守恒以及求解与之相关的初值问题，讨论了频率和极化变换器。附录 10C 简要介绍 Kalluri[3] 的研究结果。

参考文献

1. Mendonca, J. T., *Theory of Photon Acceleration*, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2001.
2. Drosdoff, D. and Widom, A., Snell's law from an elementary particle viewpoint, *Am. J. Phys.*, 73(10), 973–975, 2005.
3. Kalluri, D. K., *Electromagnetics of Time-Varying Complex Media*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2010.

附录10C

时变媒质中的光子加速⊖

在附录10B中，从经典光子理论，我们得到这样的结果：在穿过一个空间不连续性界面时，频率 ω 会保持不变，波数 k 会随着媒质在空间中的变化而变化；然而，在穿过一个时间不连续性的界面时，波数 k 会保持不变，而频率却会因媒质随时间的变化而变化。根据光子理论，这后一种情况称作是光子加速。根据经典电磁理论，利用麦克斯韦方程连同时变复杂媒质的适当本构关系式，我们可以系统地阐述频率变换问题[1,2]。

Electromagnetics of Time-Varying Complex Media: Frequency and Polarization Transformer（时变复杂媒质中的电磁学：频率和极化变换器）是有关这个专题的一本综合性著作。附录10C将概要地介绍此书。这本书论述了时变复杂媒质及其应用。

10C.1 引言

参考文献[2]论述了时变复杂媒质及其应用。这些复杂性是非均匀、色散、双各向同性、各向异性及其他们的组合。媒质的复杂性是由本构关系式表示的。文献[1]给出了一个适用于各种复杂媒质的综合的和精确的本构关系表示式。

作为当前研究的热点[2]，媒质复杂性的另一方面是媒质的时变参数。虽然多普勒效应（由运动媒质引起的频率变化）是在很多著作中都会讨论的专题，但在有关电磁学的著作中却很少讨论由一般时变媒质引起的电磁波的频率变换问题。运动媒质问题是时变媒质中的一种特殊情况。

在静止媒质中的频率变化是与我们通常的经验相悖的。本书论述几个数量级的频率偏移问题，它可以通过给各向异性媒质（尤其是磁等离子体媒质）的复杂性增加时变参数这一复杂性来实现。一个时变磁等离子体媒质可以看做一个频率变换器，其输出波频率相对于输入波频率的频率变换比可以很高（频率上移）或很低（频率下移）。本书第一部分（理论部分）通过使用简单的理想几何模型以及磁等离子媒质的本构关系，已经讨论过这种异常的效应。因此，这个问题变得更易于理解，并且重点是考察效应而不是达到高精度结果的目的。对于三维问题[3]的数值模拟，利用时域有限差分（FDTD）方法就可以得到精确的结果，这在本书第二部分（时变媒质的FDTD方法）中已经讨论过。

本附录由如下几部分组成。10C.2节讨论与媒质性质空间不连续性相反的时间不连续性的效应，并给出由时间不连续性所引起频率偏移的一个简单解释。10C.3节讨论时变等离子体媒质的本构关系。10C.4节考虑一无限大等离子体媒质的突然开关过程。10C.5节论述开关一等离子体平板这一更为实际的问题，10C.6节讨论在频率偏移研究进展中的一些应用问题。10C.7节解释时变磁等离子体中波的传播理论，以及通过改变电离水平或偏置磁场使媒质的相对介电常数产生一个很大变化的可能性。相对介电常数的这种大幅度变化会引起一个很大的频率偏移。10C.8节概要地介绍第三部分（应用、频率和极化变换器），而10C.9节则概要地介绍第四部分（实验）。

⊖ © SPIE0.1～0.7节是根据 Weiglhofer，W. S. 和 Lakhtakia，A. 编写的《光学和电磁学中的复杂媒质导论》（SPIE，Bellington，WA，2003）一书中“时变磁等离子体媒质引起的频率转换”一章（pp. 245-266，由 Kalluri 编写）写成的。

10C.2 由媒质性质时间不连续性引起的频率变化

我们考虑沿 z 轴方向传播的平面波垂直地入射到一个媒质介电性质在空间不连续的界面上。图 10C.1a 是介电常数 ε 在空间中的阶跃分布。

在 $z=0$ 处，介电常数从 ε_1 突变为 ε_2。我们再假设介电常数纵断面是时不变的。入射波、反射波和透射波的相位因子可以表示为 $\Psi_A=e^{j(\omega_A t-k_A z)}$，其中，对于入射波下标为 $A=I$，对于反射波下标为 $A=R$，对于透射波下标为 $A=T$。对于任意时刻 t，在 $z=0$ 处电场切向分量的连续性条件要求

$$\omega_I=\omega_R=\omega_T=\omega_A \tag{10C.1}$$

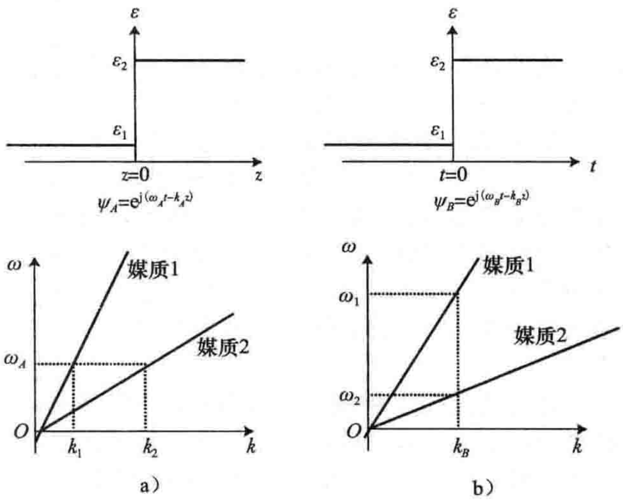


图 10C.1 时间和空间不连续性的效应比较

这个结果可以解释为：通过电磁媒质性质的空间不连续性时，频率 ω 保持不变。当电磁波在空间中由一种媒质进入另一种媒质时，波数 k 会发生变化，这是由于相速度发生了变化，这里没有考虑电磁波的吸收。在图 10C.1a 下方的图中用图解法说明了这一点。ω-k图中两条直线的斜率分别是两种媒质中的相速度。通过画一条水平线并使其与这两条直线相交，就可以实现 ω 不变。交点的 k 值给出了两种媒质中的波数。

如果考虑媒质性质时间不连续的情况，则会产生一个对偶的问题。在 $t=0$ 时刻，让一无界媒质(在空间中)的介电常数经历一个突然的变化。现在，当将 $t=0$ 代入相位因子时，电场在 $t=0$ 时刻的连续性要求：在不连续性出现之前就存在的波(称之为源波)的相位因子必须与在改变后或切换后媒质中新产生的波的相位因子 Ψ_N 相等。这一结果必须对所有 z 值都成立。因此，这就要求在空间不变媒质中，波在穿过时间不连续性时其波数 k 保持不变。在 ω-k 图中画一条垂线，就可以实现 k 不变，如图 10C.1b 下方的图形所示。交点处的 ω 值就是新产生的电磁波的频率[4~7]。

10C.3 时变等离子体媒质

任何一种等离子体都是带电粒子和中性粒子的混合体。对于每一个粒子种类，混合体都可由两个独立的参数来表征。这两个独立参数就是粒子密度 N 和温度 T。关于等离子体有大量的文献可供参考。这里给对本附录感兴趣的读者提供了几篇参考文献[8～10]。这些文献论述了将磁等离子体模拟为一种电磁媒质的方法。在探索将媒质看成时不变电磁参数的一些应用时，这些模型就已经足够用了。

在一些应用中，热效应并不重要的。这样一种等离子体称作冷等离子体。洛伦兹等离子体[8]就是对冷等离子体进一步简化的结果。在洛伦兹等离子体中，假定电子之间的相互作用仅是通过空间聚集电荷的力才发生的，并且质量较大的正离子和中性粒子是静止的。正离子保证了混合体从整体上呈电中性。在本章中，洛伦兹等离子体作为基本模型，用于研究一种非周期性时变电子密度纵剖面 $N(t)$的主要效应。

对于这个看做电介质媒质的简单模型，其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_p\boldsymbol{E} \tag{10C.2}$$

式中

$$\varepsilon_{p}=1-\frac{\omega_{p}^{2}}{\omega^{2}} \tag{10C.3}$$

并且

$$\omega_{p}^{2}=\frac{q^{2}N}{m\varepsilon_{0}} \tag{10C.4}$$

在这些公式中，q 和 m 分别是电子电荷量的绝对值与电子质量，ω_{p}^{2} 是等离子体频率的平方，它正比于电子密度。

图 10C.2 中给出了 ε_{p} 与 ω 之间的关系的草图。只有当信号频率大于等离子体频率时，相对介电常数 ω_{p} 才是正实数值。因此，对于各向同性等离子体，ω_{p} 是一个截止频率。在截止频率以上，洛伦兹等离子体表现得像是一种色散电介质，其相对介电常数的值在 0～1 之间。

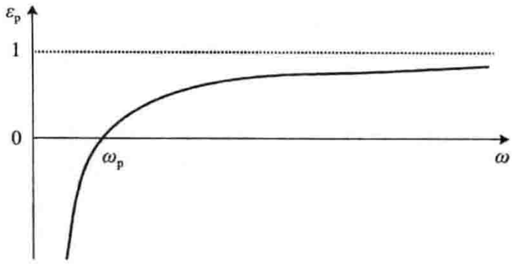


图 10C.2 等离子体媒质的相对介电常数 ε_{p} 与角频率 ω 之间的关系

通过改变电子密度 N 就可以改变媒质的相对介电常数，这可以通过改变电离水平依次得到实现。图 10C.1b 所示的介电常数突变是一个理想化的快速电离。从定量角度来说，如果源波的周期远大于电子密度时间纵剖面中的上升时间，则可以使用突变近似。在文献中，把在纵剖面中的一个阶跃变化称为突然产生[2,5]，或瞬间电离[2]。

用实验不容易实现一个很短的上升时间。在给定时间内，空间中的大部分区域必须均匀地电离。Joshi 等人[11]、Kuo[12]、Kuo 与 Ren[13]以及 Rader 等人[14]开发了实现了这些条件的巧妙的实验方法，并且用各向同性等离子体演示了频率偏移的原理(见本书第四部分)。在文献中被引用得最早的频率偏移的实验证据之一是 Yablonovitch 写的一篇原创性论文[15]。Savage 等人[16]使用电离波前使频率上移。电离波前是未电离媒质和等离子体之间的一个运动边界[17]。用一个电离辐射脉冲源，比如一个强激光脉冲，就可以产生这样一个波前。当脉冲在中性气体中传播时，它将中性气体转化为等离子体，因此在等离子体和未电离媒质之间就产生了一个运动分界面。然而，电离波前问题与运动等离子体问题还是有一些不同。在电离波前问题中，只有分界面运动，而等离子体并不随分界面运动。

基于等离子体的电介质模型的本构关系(式(10C.2))，并没有显含等离子体中的电流密度 $\boldsymbol{J}$。而包含等离子体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的本构关系式是

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_{0}\boldsymbol{E} \tag{10C.5}$$

$$\boldsymbol{J}=-qN\boldsymbol{v} \tag{10C.6}$$

电子的速度 $\boldsymbol{v}$ 由力方程给出：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-q\boldsymbol{E} \tag{10C.7}$$

在式(10C.7)中，由电磁波的磁场 $\boldsymbol{H}$ 产生的磁场力远小于其电场产生的电场力[8]，所以磁场力被忽略不计。磁场力($-q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$)是非线性的。Stanic[18]研究了这个问题，将其看做一个弱非线性系统。

因为离子运动忽略不计，所以在式(10C.6)中不包含离子电流。这样一种近似称作射频近似[9]。它用于研究无线电波在电离层中的传播。在低频波传播研究中，需要考虑离子的运动[9]。

将式(10C.5)至式(10C.7)代入麦克斯韦方程组的安培环路定律中

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{10C.8}$$

可以得到

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{p}(\omega)\boldsymbol{E} \tag{10C.9}$$

式中，$\varepsilon_\mathrm{p}(\omega)$由式(10C.3)给出，并且有时间依赖关系 $\exp(\mathrm{j}\omega t)$。对于电子密度 $N(t)$随时间作变化任意的情况，式(10C.6)不成立[2,19,20]。因为在不同的时刻新电子产生，使得电子密度 $N(t)$增大。新产生的电子的初始速度为 0，然后被电场逐步加速。这样，在等离子体建立过程中的某一给定时刻，所有电子的速度都不相同。因此

$$\boldsymbol{J}(t) \neq - qN(t)\boldsymbol{v}(t) \tag{10C.10}$$

但是，却有

$$\Delta\boldsymbol{J}(t) = - qN_i\boldsymbol{v}_i(t) \tag{10C.11}$$

这里，ΔN_i 是在 t_i 时刻电子密度的增加值，$\boldsymbol{v}_i(t)$是在 t_i 时刻产生的这 ΔN_i 个电子在 t 时刻的速度。因此，$J(t)$由式(10C.11)的积分给出，而不是由式(10C.10)决定。当对式(10C.11)中的积分求 t 的微分，可以给出下式的 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间的本构关系：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\omega_\mathrm{p}^2(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{10C.12}$$

为了描述各向同性等离子体的电磁性质，必须使用式(10C.8)、式(10C.12)和法拉第方程

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = - \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10C.13}$$

在分析 $\boldsymbol{E}=E\,\hat{\boldsymbol{x}}$和 $\boldsymbol{H}=H\,\hat{\boldsymbol{y}}$且沿 z 轴方向传播的电磁波问题时，可以假设各场分量在空间中作简谐变化，即

$$F(z,t) = f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{10C.14}$$

将式(10C.14)代入式(10C.8)、式(10C.12)和式(10C.13)中，得到 E 和 H 的波动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t^2} + [k^2c^2 + \omega_\mathrm{p}^2(t)]E = 0 \tag{10C.15}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^3 H}{\mathrm{d}t^3} + [k^2c^2 + \omega_\mathrm{p}^2(t)]\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10C.16}$$

10C.4 无界等离子体媒质的突然建立

图 10C.3 所示为这一问题的几何构形。一个频率为 ω_0 的平面波在自由空间中沿 z 轴方向传播。在 $t=0$ 时刻，突然建立一个等离子体频率为 ω_p 的无界等离子体。这样就会产生一个媒质性质的时间不连续性。当 ω_p 为常数时，方程式(10C.16)的解为

$$H(t) = \sum_{m=1}^{3} H_m\exp(\mathrm{j}\omega_m t) \tag{10C.17}$$

式中

$$\omega_m[\omega_m^2 - (k^2c^2 + \omega_\mathrm{p}^2)] = 0 \tag{10C.18}$$

根据式(10C.18)，可以得到这一问题的色散曲线 ω-k[2]。图 10C.4 所示为色散曲线 ω-k，其中顶部和底部两条曲线分别是方括号内的因子等于 0 时的结果，而水平线则是因子 $\omega=0$ 时的结果。垂直直线 $k=$常数与色散曲线 ω-k 有 3 个交点，分别为点 1、2 和 3。第 3 个模式就是摆动模式[2,5,21]。它的场的瞬时形式为

$$\boldsymbol{E}_3(x,y,z,t)=0 \tag{10C.19}$$

$$\boldsymbol{H}_3(x,y,z,t)=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2+\omega_p^2}\cos(kz) \tag{10C.20}$$

$$\boldsymbol{J}_3(x,y,z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}H_0k\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2+\omega_p^2}\sin(kz) \tag{10C.21}$$

虽然摆动模式的频率为 0，但其随空间位置的变化而变化。在自由电子激光器中，这样的摆动场用于产生相干辐射[22]。它的电场为 0 但是却有一个由等离子体电流 $\boldsymbol{J}_3$ 产生的磁场。在沿 z 方向有静磁场存在时，第 3 个模式变为一个行波，它的频率下移。这一点将在 10C.7.5 节中讨论。

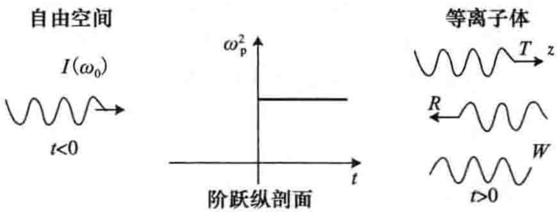


图 10C.3 突然建立的无界等离子体媒质

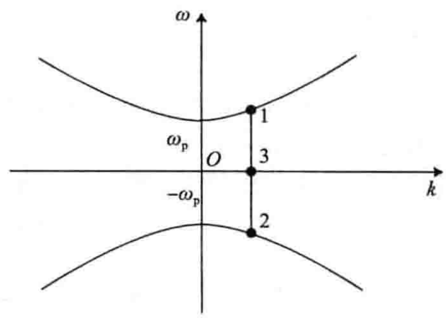


图 10C.4 色散曲线 ω-k 与摆动磁场

模式 1 和模式 2 的频率分别由下式给出：

$$\omega_{1,2}=\pm\sqrt{(\omega_p^2+k^2c^2)} \tag{10C.22}$$

式中，ω_2 是一个负值。因为在空间中和时间上的简谐变化由相位因子 $\exp(\omega t-kz)$来表示，所以负 ω 值产生了一个沿 z 轴负方向传播的波。这是一个反向行波，或者为了方便起见，将其称为由不连续性所产生的反射波。模式 1 和模式 2 的频率要比源波的频率高。它们是频率上移的波。

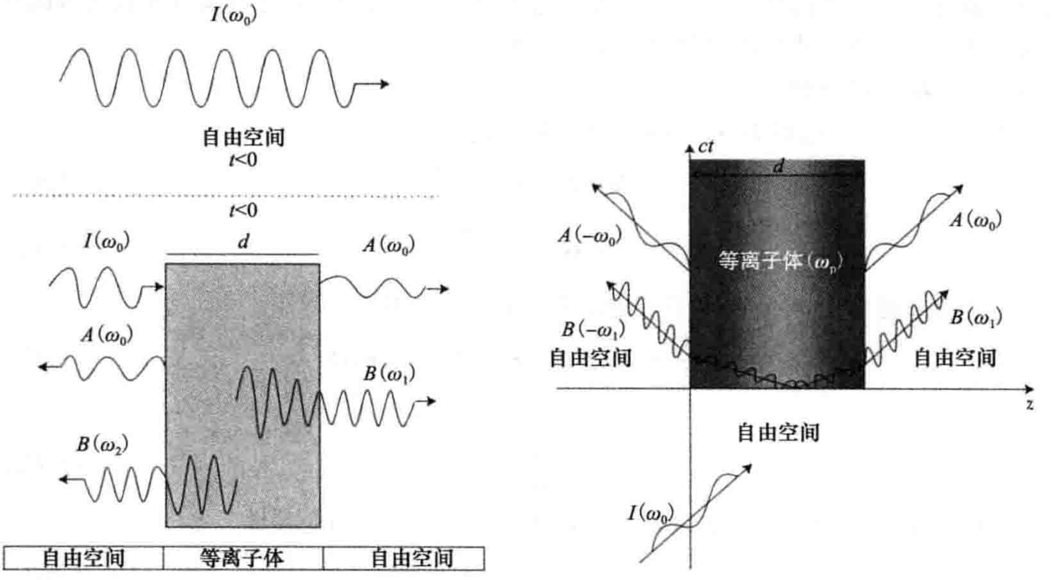
10C.5 开关等离子体平板

从实验上来说，电磁波与等离子体平板的相互作用比与无界等离子体媒质的相互作用更容易实现。当入射波进入一预先存在的等离子体平板时，它必然会经历一个空间不连续性。如果等离子体频率低于入射波频率，那么入射波将被部分地反射和透射。当等离子体频率高于入射波频率时，波将被完全地反射，因为等离子体的相对介电常数小于 0。

然而，如果等离子体平板足够薄，由于隧道效应，波将可以被透射[2]。对于这种时不变的等离子体，反射波和透射波的频率与源波的频率相同；它们称作 A 波。在等离子体内，波的波数与源波的波数不同，但由于边界条件的要求，它与源波的频率相同。

当源波在自由空间中传播时，突然建立起一个等离子体平板，那么等离子体平板区域内的波会经历一个媒质性质的时间不连续性。因此，这个开关动作产生了新的波，其频率上移，然后波穿出等离子体平板继续传播。这些波称作 B 波。图 10C.5 说明了这种现象。在图 10C.5a 中，频率为 ω_0 的源波在自由空间中传播。在 $t=0$ 时刻，建立起一个等离子体频率为 ω_p 的等离子体平板。图 10C.5b 中的 A 波的频率与源波的频率相同。B 波是由于等离子体平板的突然建立而产生的新波，具有上移频率 $\omega_1=\sqrt{(\omega_0^2+\omega_p^2)}=-\omega_2$。对于第二个 B 波来说，负频率表明它是一个反向行波。然而，只要这些波仍然在等离子体平板区域内，它们的波数就与源波的波数相同。当 B 波要穿出等离子体平板时，它们遇到空间不连续性，所以波数会相应地发生变化。B 波只会在开关动作时刻产生，因此它只能存在一段

有限的时间。在图 10C.5 中，为了说明频率变化，画出了波在时域中的波形。因此，图 10C.5中箭头符号表示时间变量 t。一个更精确的描述见图 10C.5b。



a）说明频率的变化，画出了波的时域波形　　b）给出了一个更精确的描述

图 10C.5 开关一个各向同性等离子体平板的效应。A 波与入射波的频率(ω_0)相同，而 B 波的频率上移为 $\omega_1=\sqrt{(\omega_0^2+\omega_p^2)}=-\omega_2$

10C.6 应用

目前，已经开展了许多关于频移应用的研究。一个简单的应用就是频率变换器。使用普通设备可以产生某一频段的源波，开关等离子体器件将其转换为另一频段的新电磁波，而使用其他方法是不容易实现这一频段的波。频移原理可用于卫星或飞机的等离子体隐形，或生成作为超宽频信号的短脉冲[23]。Nerukh 等人详细论述了频移原理在光子学方面的应用[24]。

10C.7 时变磁等离子体媒质⊖

在静磁场存在情况下，等离子体媒质的性质就如同各向异性电介质[1,2]。因此，在这种媒质中电磁波传播的理论类似于在晶体中光波的理论。当然，另外我们还应考虑等离子体媒质的强色散特性。

冷磁等离子体可以由两个参数来表征：电子密度 N 和准静态磁场。第一个参数通常用等离子体频率 ω_p 给出。准静态磁场的强度和方向对等离子体的介质特性有着重要的影响。与准静态磁场成正比的参数是 10C.7.1 节已经定义过的电子回旋频率 ω_b。磁等离子体的截止频率由 ω_p 和 ω_b 两者所共同决定。另一个重要方面，就是磁等离子体介电性质存在一个谐振频率。在谐振频率点，相对介电常数 ε_p 变为无穷大。例如，对于 10C.7.2 节中的纵向传播，当信号频率 ω 等于电子回旋频率 ω_b 时，会发生谐振。在频带 $0<\omega<\omega_b$ 内，$\varepsilon_p>1$ 且对于某一特定的 ω、ω_p 和 ω_b 组合，ε_p 可以具有很大的值；例如，当

⊖ 经过允许转载，资料摘自 Kalluri, D. K. *Introduction to complex Mediums for Optics and Electromagnetics*, W. S. Weiglhofer and A. Lakhtakia, (eds.), SPIE, Bellingham, WA, pp. 245-266, 2003.

$f_p=\omega_p/2\pi=10^{14}\,\text{Hz}$，$f_b=\omega_b/2\pi=10^{10}\,\text{Hz}$ 且 $f=10\,\text{Hz}$ 时 $\varepsilon_p=9\times10^{16}$[9]。因此，可以通过电子密度衰萎使得 ε_p 有一个很大的变化，因而将磁等离子体转换为自由空间。同样，可以通过准静态磁场衰萎而使得 ε_p 有一个很大的变化，因而将磁等离子体媒质转换为各向同性等离子体媒质。本节其他部分会讨论这些问题。

10C.7.1 基本场方程

电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$满足麦克斯韦旋度方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{10C.23}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\tag{10C.24}$$

在准静态磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 存在情况下，电流密度的本构关系为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\omega_p^2(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega}_b(\boldsymbol{r},t)\tag{10C.25}$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_b=\frac{q\boldsymbol{B}_0}{m}=\omega_b\,\hat{\boldsymbol{B}}_0\tag{10C.26}$$

在上式中，$\hat{\boldsymbol{B}}_0$ 是一个沿准静态磁场方向的单位矢量，ω_b 是回旋频率，并且

$$\omega_p^2(\boldsymbol{r},t)=\frac{q^2N(\boldsymbol{r},t)}{m\varepsilon_0}\tag{10C.27}$$

10C.7.2 特征波

接下来，在均匀时不变无界磁等离子体媒质中，由如下假设可以得到沿 z 轴方向传播的平面波的解为

$$f(z,t)=\exp[\mathrm{j}(\omega t-kz)]\tag{10C.28}$$

$$\omega_p^2(z,t)=\omega_p^2\tag{10C.29}$$

$$\omega_b(z,t)=\omega_b\tag{10C.30}$$

式中，f 代表场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{J}$ 的任意一个分量。

被广泛认可的磁离子理论[8~10]用于研究一个任意极化平面波在各向异性冷等离子体中的传播，其中平面波的等相位面传播方向与静磁场方向成任意角度。当平面波在这种媒质中传播时，其极化状态会连续不断地改变。然而，存在一些特定的标准传播模式，其极化状态不发生变化。在波沿准静态磁场方向传播的情况中，左旋(L 波)或右旋(R 波)圆极化平面波就是标准模式。这种传播方式称作纵向传播。对于横向传播来说，寻常波(O 波)和异常波(X 波)是标准模式，其中波的传播方向与静磁场的方向相垂直。本附录讨论 R 波在时变等离子体中的传播。在其他文献中，可以找到有关其他特征波传播过程的讨论[2]。

10C.7.3 R 波传播

对于 R 波传播来说，其相对介电常数是[2,8]

$$\varepsilon_{pR}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_b)}=\frac{(\omega+\omega_{c1})(\omega-\omega_{c2})}{\omega(\omega-\omega_b)}\tag{10C.31}$$

式中，ω_{c1} 和 ω_{c2} 是截止频率并且由下式给出

$$\omega_{c1,c2}=\mp\frac{\omega_b}{2}+\sqrt{\left(\frac{\omega_b}{2}\right)^2+\omega_p^2}\tag{10C.32}$$

利用式(10C.25)，并将其写为式(10C.9)的形式，从式(10C.24)中消去 $\boldsymbol{J}$，就可以得到式(10C.31)。

色散关系可由下式得到

$$k_{\mathrm{R}}^{2}c^{2}=\omega^{2}\varepsilon_{\mathrm{pR}}=\frac{\omega(\omega+\omega_{\mathrm{c1}})(\omega-\omega_{\mathrm{c2}})}{(\omega-\omega_{\mathrm{b}})} \tag{10C.33}$$

式中，k_{R} 是 R 波的波数，c 是自由空间中的光速。上式展开后，变为

$$\omega^{3}-\omega_{\mathrm{b}}\omega^{2}-(k_{\mathrm{R}}^{2}c^{2}+\omega_{\mathrm{p}}^{2})\omega+k_{\mathrm{R}}^{2}c^{2}\omega_{\mathrm{b}}=0 \tag{10C.34}$$

图 10C.6 中画出了 R 波传播的 ε_{p} 与 ω 的关系曲线，而图 10C.7 给出了色散曲线 ω-k。R 波是一种纵向传播的特征波。对于这种波来说，除了 ε_{p} 受准静态磁场强度的影响外，媒质表现得类似于各向同性等离子体。特别地应该注意到，在图 10C.6 中可以看到这样一个特殊的特征，在 $0<\omega<\omega_{\mathrm{b}}$ 频带内，对于 R 波有 $\varepsilon_{\mathrm{p}}>1$。这种传播模式在有关电离层物理的文献中称作哨声模式，而在有关固态等离子体的文献中称作螺旋模式。10C.7.6 节和 10C.7.7 节通过瞬态磁等离子体媒质论述哨声波的变换以及这种变换的结果。各向同性等离子体媒质不支持哨声波的传播。

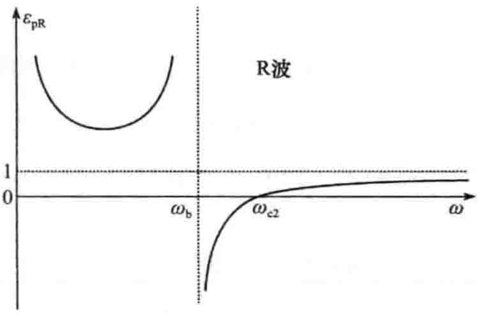


图 10C.6　R 波传播的相对介电常数

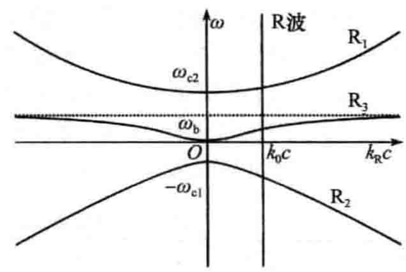


图 10C.7　R 波传播的色散曲线 ω-k

10C.7.4　突然建立

10C.4 节分析了在 z 轴方向静磁场存在情况中，等离子体突然建立的问题。图 10C.8给出了该问题的几何图形。假设源波是一个 R 波。突然建立过程等效于媒质介电性质产生了一个时间不连续性。在这种情况下，波数 k_0 在穿过时间不连续性时保持不变。对于一个给定 k_0 的源波，如果在图 10C.7 中画一条垂线，它将与色散曲线 ω-k 中的三条分支曲线有 3 个交点。这三个波的频率与源波的频率不同。在这种情况下，媒质的开关动作产生了三个 R 波，分别记为 R_1、R_2 和 R_3。R_1 和 R_3 为透射波，而 R_2 是反射波。

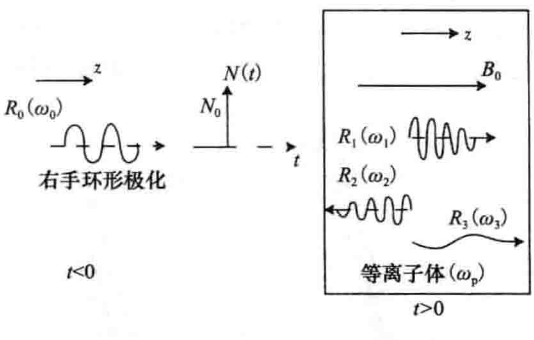


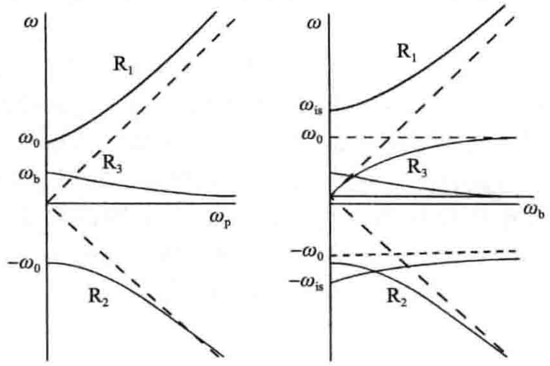
图 10C.8　开关一个无界磁等离子体媒质的效应。给出了 R 波入射时在等离子体中产生的 B 波

下面给出波的一种物理解释。入射波的电场和磁场以及准静态磁场使新建立的磁等离子体中的电子加速，这反过来会辐射新的电磁波。将大量电子的贡献相加，我们可以得到新电磁波的频率和场量。这些电子的位置和运动由磁等离子体媒质所支持的聚体效应相关联。辐射场的这种详细计算过程似乎是非常复杂的。如果将磁等离子体媒质模拟为电介质，就可以用一个简单但相对粗略的方法来描述等离子体的效应，其中由磁离子理论[9]来计算电介质的折射率。新电磁波的频率受波数 k_0 在穿过时间不连续性时保持不变和折射率 n 是适用于磁等离子体中波传播的波形的折射率这两个要求条件的约束。这个结果给出了一个守恒定律[25] $k_0c=\omega_0=n(\omega)$，根据这个定律可求出 ω。相关的电磁初值问题的解给出了新电磁波的电场和磁场。

10C.7.5 各种 R 波的频移特性

可通过参数 ω_p 和 ω_b 来控制频移作用的频移比与效率。这里给出用源波频率 ω_0 来归一化所有频率变量的结果。在数值计算中，取 $\omega_0=1$ 就可以实现归一化。

对于 R 波，图 10C.9a 与图 10C.9b 分别画出了 ω-ω_p 和 ω-ω_b 的曲线。图 10C.10给出了 R_1 波的结果：因为已经用 ω_0 对频率变量进行了归一化，所以纵轴上的值就是频移比。这是一个频率上移的波。并且其频移比随 ω_p 和 ω_b 的增大而增大。从图 10C.10中可以看出，适当地选择 ω_p 和 ω_b，我们似乎可以得到所期望的任意大的频移。然而，所产生的电磁波中的场很弱，并且能量密度 S_1 可能较低。在表 10C.1中，通过考虑两组参数值(ω_p，ω_b)说明了这一点。对于参数(0.5，0.5)，频移比为 1.2，但能量密度比 S_1/S_0 是 0.57，而对于参数(2.0，2.0)，频移比为 3.33，但能量密度比仅为 0.07。类似的结论也适用于其他波。



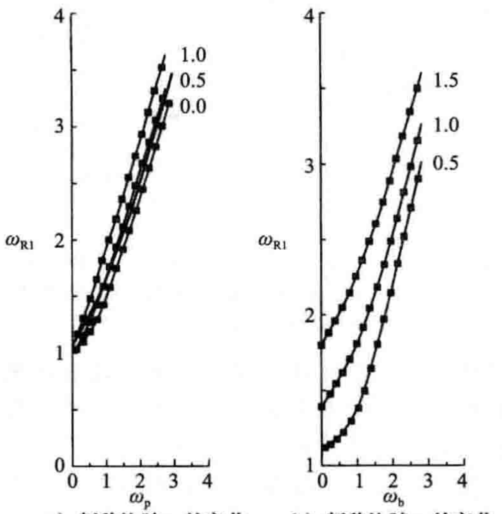
a）ω-ω_p曲线　　b）ω-ω_b曲线

图 10C.9　R 波的频移；$\omega_{is}=(\omega_0^2+\omega_p^2)^{1/2}$

表 10C.1　对于两组(ω_p，ω_b)，R_1 波的频移比和能量密度

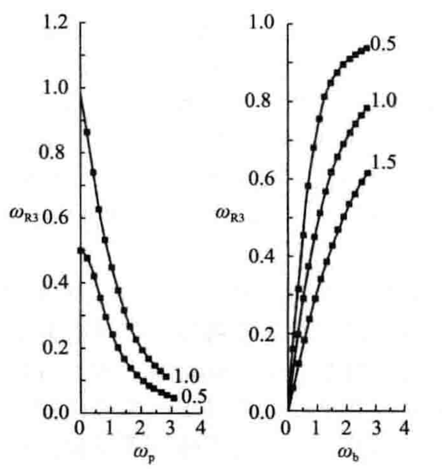
ω_0	ω_p	ω_b	E_1/E_0	H_1/H_0	S_1/S_0	ω_{R1}/ω_0
1	0.5	0.5	0.83	0.69	0.57	1.20
1	2.0	2.0	0.39	0.18	0.07	3.33

R_2 波是一个反射波。这是一个频率上移的波，其频移比随 ω_p 增大而增大，但是随 ω_b 的增大而减小[2]。图 10C.11 中的 R_3 波是一个频率下移的透射波。其频移比随 ω_p 的增大而减小，随 ω_b 的增大而增大。当 $\omega_b=0$ 时，ω_{R_3} 变为 0。电场 E_3 变为 0，磁场退化为摇摆磁场[26]。这个结果与 10C.4 节讨论过的各向同性媒质中的结果相一致。



a）频移比随ω_b的变化　b）频移比随ω_p的变化

图 10C.10　R_1 波的频移。取 $\omega_0=1$，频率变量都已对于源波频率进行了归一化。曲线上的数字表示 ω_b 和 ω_p



a）频移比随ω_b的变化 b）频移比随ω_p的变化

图 10C.11　R_3 波的频移。$\omega_0=1$。曲线上的数字表示 ω_b 和 ω_p

10C.7.6 伴随能量增强的频率上移

假设在无界磁等离子体媒质中存在一源波。它的参数应使其折射率大于 1。一个以哨声模式传播的波就是这种波的一个例子。通过移去电离源使电离过程衰减，就可能得到一个能量增强的频率上移波。本节考虑突然崩溃和缓慢衰减这两种极限情况。根据式(10C.23)至式(10C.25)，可以得到在时变磁等离子体媒质中 R 波磁场的波动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^3 H}{\mathrm{d}t^3}-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(t)\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2}+\left[k_{\mathrm{R}}^2 c^2+\omega_{\mathrm{p}}^2(t)\right]\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{b}}(t)k_{\mathrm{R}}^2 c^2 H=0 \tag{10C.35}$$

突然崩溃情况的解可以看成一个初值问题的解，而缓慢衰减情况可以利用绝热近似[2]来求其解。在两种情况中，最终的上移频率都等于源的频率乘以折射率。

当源的频率远远小于电子回旋频率时，哨声波的折射率 n_{w} 相当大。对于突然崩溃情况，电场增强了 $n_{\mathrm{w}}/2$ 倍；而对于缓慢衰减情况，电场增强了 $n_{\mathrm{w}}/\sqrt{2}$ 倍。对于能量密度来说，相应的增强倍数分别是 $n_{\mathrm{w}}/4$ 和 $n_{\mathrm{w}}/2$。基于能量平衡原则，下面给出这个结果的一个物理解释。哨声模式中的能量主要是由等离子电流产生的磁场能。在等离子体完全衰减以后，等离子体电流也完全衰减为零，由等离子电流产生的磁场能被转化为波的电场能和磁场能，同时产生了增强的电场和能量密度的频率上移波。Bakov 等人最近关于一般时变磁等离子体中能量关系的工作[27]可用于研究其他模式的频率偏移。

图 10C.12 示出了一个指数衰减情况的结果：

$$\omega_{\mathrm{p}}^2(t)=\omega_{\mathrm{p0}}^2\mathrm{e}^{-bt} \tag{10C.36}$$

其中，所有变量都用源波的对应量进行了归一化。源波的频率是 $\omega_0=1$，这样 ω_1 就是频率上移比率。参数 ω_{b} 与 ω_{p0} 分别取为 100 和 150。参数 b 取值为 0.01，因为在一个时间常数内含有源波的 $100/2\pi$ 个周期，所以参数 b 描述了一个缓慢衰减的情况。对独立变量时间用源波的周期进行了归一化。为了比较起见，图 10C.12 也给出了表示突然崩溃情况的结果的水平线。可以很清楚地看出，频率上移伴随着能量的增强。

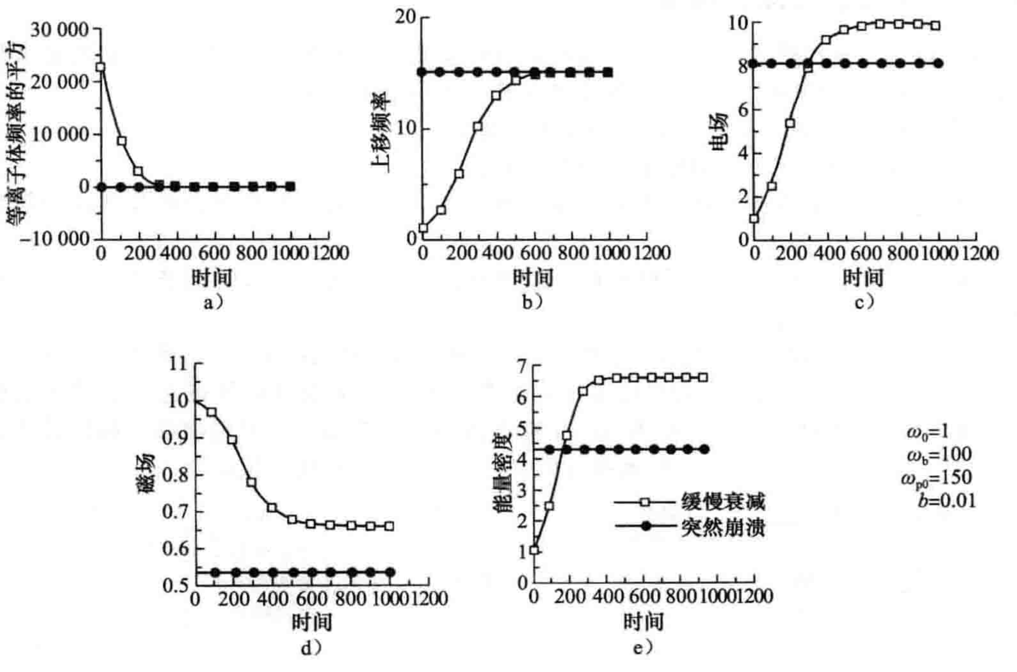


图 10C.12 伴随能量增强的 whistler 波的频率上移。纵轴上的值对于源波对应量归一化了。源频率 ω_0 取 1。横轴上的时间对于源波的周期进行了归一化

10C. 7. 7 可控螺旋摇摆磁场的产生

在准静态磁场存在的条件下，等离子体可以传播一个哨声波。当静磁场关断时，哨声波的能量将转化为一个螺旋摇摆磁场的能量[2]。根据方程式(10C. 35)的解，可以对这一现象进行分析。在式(10C. 35)中假定 ω_p^2 为常数，而 ω_b 是时间的函数。

图 10C. 13 示出了一个指数衰减情况的结果：

$$\omega_b(t) = \omega_{b0}e^{-bt} \tag{10C. 37}$$

所有变量都用源波对应量进行了归一化。参数 ω_{b0} 和 ω_p 分别取为 100 与 1000。b 取为 0. 01。为了比较起见，图 10C. 13 也给出了表示突然崩溃结果的水平线。不论 B_0 的衰减速度是多少，都会产生一个强摇摆磁场。

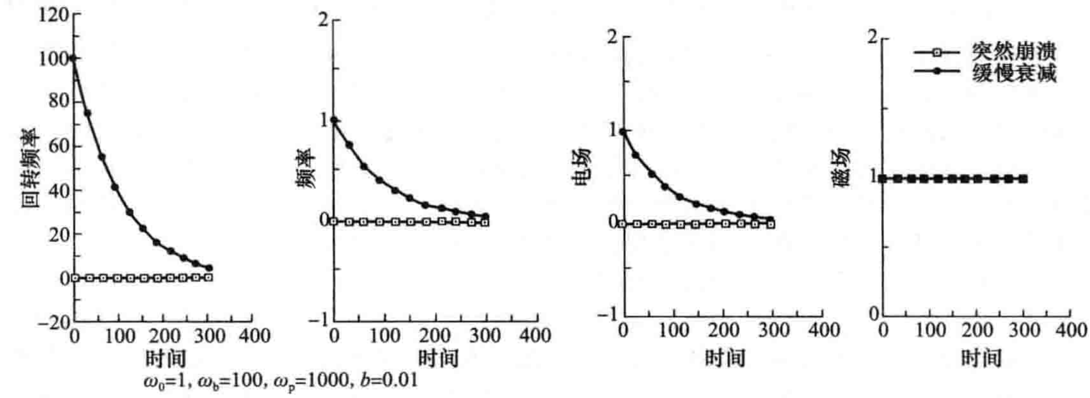


图 10C. 13 一个哨声波被转化为一个螺旋摇摆磁场。纵轴上的值用源波对应量进行了归一化；$\omega_0=1$。横轴上的时间刻度用源波的周期进行了归一化

10C. 8 本书第三部分概要

本书第一部分和第二部分讨论了电磁波与时变磁等离子体之间相互作用的理论及数值模拟。假定在自由空间中有一个无界边界或者一个简单平面边界。

如图 10C. 14 所示，建立了频率器变换的概念。

系统参数 f_b 和 f_p 会影响输出的频率与幅值。

当源波是一个哨声波并且磁等离子体关断时，可以得到一个非常大或非常小的频率偏移比。

在这些情况中，除非等离子体的建立过程非常快，否则新生成的行波会在与时变媒质的相互作用完成之前离开边界。

然而，如果时变媒质是产生在空腔中，由于波被空腔腔壁所约束，相互作用会持续下去。

图 10C. 15 给出了当媒质的切换发生在空腔中时，频率变换器的概念。源波的极化特性由参数 δ 和 $\tan\gamma$ 决定，而切换角(φ_0)是输入波的附加参数，它对输出波的极化特性起着控制作用。这样，图 10C. 15 中的系统方框是一个“频率和极化变换器”。

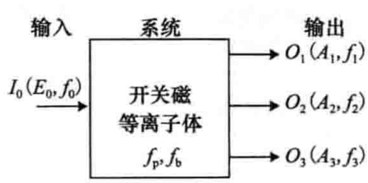


图 10C. 14 频率变换器的概念

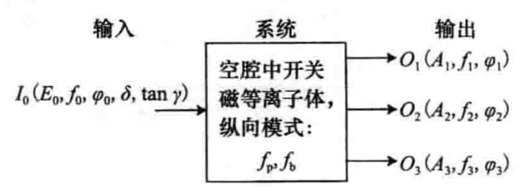


图 10C. 15 频率和极化变换器概念

在这一部分中，利用媒质的瞬变理论以及适用于更实际的空间和时间参数分布系统的 FDTD 方法，讨论了"频率和偏振变换器"的概念。附录 Q 详细讨论了该原理的一个最有价值的应用。研究表明，可以将 2.45GHz 的源辐射(日常生活中所用微波炉中的波源)变换为 300GHz 的辐射，并且伴随着电场强度的明显增强。

10C.9 本书第四部分概要

最早的有关动态等离子体引起的频率偏移原理的实验验证是 1973 年由 Yablonovitch[15] 给出的，他观测到了由光脉冲自身产生的等离子体所引起的光谱拓宽现象。

Joshi 等人[11]将一个 33.3GHz 的 RF 波的频率上移了 5%，其效率为 10%。他们也观测到了源波频率 2.3 倍的频率，但效率更低。

第 13 章由 Alexeff 教授编写，他的课题组是完成各向同性等离子体"原理的证明"实验[11~16]的三个小组之一。只有 Kuo 等人做了包含磁等离子体的实验[28]。

10C.10 结论

我们希望本书中介绍的理论、FDTD 模拟方法和结果将有助于实验设备的设计与性能提高，这相应地也会促进实际器件的开发。作者正在努力实现其中的一个实际设备，就是从 2.45GHz 到 300GHz 变换的频率变换器。

参考文献

1. Weiglhofer, W. S., Constitutive characterization of simple and complex mediums. In *Introduction to Complex Mediums for Optics and Electromagnetics*, W. S. Weiglhofer and A. Lakhtakia, eds, SPIE, Bellingham, WA, 2003.
2. Kalluri, D. K., *Electromagnetics of Time Varying Complex Media*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2010.
3. Lee, J. H. and Kalluri, D. K., Three dimensional FDTD simulation of electromagnetic wave transformation in a dynamic inhomogeneous magnetized plasma, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 47, 1146–1151, 1999.
4. Auld, B. A., Collins, J. H., and Zapp, H. R., Signal processing in a nonperiodically time-varying magnetoelastic medium, *Proc. IEEE*, 56, 258–272, 1968.
5. Jiang, C. L., Wave propagation and dipole radiation in a suddenly created plasma, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 23, 83–90, 1975.
6. Felsen, B. L. and Whitman, G. M., Wave propagation in time-varying media, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 18, 242–253, 1970.
7. Fante, R. L., Transmission of electromagnetic waves into time-varying media, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 19, 417–424, 1971.
8. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965.
9. Booker, H. G., *Cold Plasma Waves*, Kluwer Academic Publishers, Higham, MA, 1984.
10. Tannenbaum, B. S., *Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, NY, 1967.
11. Joshi, C. J., Clayton, C. E., Marsh, K., Hopkins, D. B., Sessler, A., and Whittum, D., Demonstration of the frequency upshifting of microwave radiation by rapid plasma creation, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 18, 814–818, 1990.
12. Kuo, S. P., Frequency up-conversion of microwave pulse in a rapidly growing plasma, *Phys. Rev. Lett.*, 65, 1000–1003, 1990.
13. Kuo, S. P. and Ren, A., Experimental study of wave propagation through a rapidly created plasma, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 21, 53–56, 1993.
14. Rader, M., Dyer, F., Matas, A., and Alexeff, I., Plasma-induced frequency shifts in microwave beams, in *Conf. Rec. Abstracts, IEEE Int. Conf. Plasma Sci.*, Oakland, CA, p. 171, 1990.
15. Yablonovitch, E., Spectral broadening in the light transmitted through a rapidly growing plasma, *Phys. Rev. Lett.*, 31 877–879, 1973.
16. Savage, R. L., Jr., Joshi, C. J., and Mori, W. B., Frequency up-conversion of electromagnetic radiation upon transmission into an ionization front, *Phys. Rev. Lett.*, 68, 946–949, 1992.
17. Lampe, M. and Walker, J. H., Interaction of electromagnetic waves with a moving ionization front, *Phys. Fluids*, 21, 42–54, 1978.
18. Stanic, B., Drljaca, P., and Boskoic, B., Electron plasma waves generation in suddenly created

isotropic plasma, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 26, 1514–1519, 1998.
19. Stepanov, N. S., Dielectric constant of unsteady plasma, *Sov. Radiophys. Quan. Electr*, 19, 683–689, 1976.
20. Banos, A. Jr., Mori, W. B., and Dawson, J. M., Computation of the electric and magnetic fields induced in a plasma created by ionization lasting a finite interval of time, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 21, 57–69, 1993.
21. Wilks, S. C., Dawson, J. M., and Mori, W. B., Frequency up-conversion of electromagnetic radiation with use of an overdense plasma, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 337–340, 1988.
22. Granastein, V. L. and Alexeff, I., *High-Power Microwave Sources*, Artech House, Boston, MA, 1987.
23. Special Issue on generation of coherent radiation using plasmas, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 21, 1993.
24. Nerukh, A. G., Scherbatko, L. V., and Marciniak, M., *Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics*, IEEE/LEOS Poland chapter, Warsaw, National Institute of Telecommunications, Department of Transmission and Fiber Technology, 2001.
25. Kalluri, D. K., Effect of switching a magnetoplasma medium on a traveling wave: Conservation law for frequencies of newly created waves, in *Conf. Rec. Abstracts, IEEE Int. Conf. Plasma Sci.*, Oakland, CA, p. 129, 1990.
26. Kalluri, D. K., Effect of switching a magnetoplasma medium on a travelling wave: Longitudinal propagation, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 37, 1638–1642, 1989.
27. Bakunov, M. I. and Grachev, I. S., Energy relations for electromagnetic waves in a time-varying magnetoplasma medium, *Proc. SPIE*, 4467, 78–86, 1991.
28. Kuo, S. P., Bivolaru, D., Orlick, L., Alexeff, I., and Kalluri, D. K., A transmission line filled with fast switched periodic plasma as a wideband frequency transformer, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 29, 365–370, 2001.
29. Kalluri, D. K., Frequency-shifts induced by a time-varying magnetoplasma medium. In *Introduction to Complex Mediums for Optics and Electromagnetics*, W. S. Weiglhofer and A. Lakhtakia, (eds.), SPIE, Bellingham, WA, pp. 245–266, 2003.

附录 11A 夹在两半无限大电介质之间的热各向同性等离子体平板的薄膜反射特性㊀

T. Markos，Constantine 和 Kalluri Dikshitulu

11A.1 引言

金属薄膜将在下一代集成光电子器件中扮演重要的角色。有关研究工作表明，光子-电子耦合和电子-等离子体波（电浆）传播在纳米尺度传感器的构造中有着巨大的应用前景。通过对集成在电介质上的金属薄膜反射特性的模拟，可以给我们提供有关在光谱内器件对波的响应的一些有价值的见解，例如，频率、薄膜厚度和入射角对器件性能的影响。在纳米尺度的分辨率下，人们正在构造使用表面等离子激元的光学成像器件，它能有效地提升光电流、响应灵敏度和带宽[1]。对于下一代光刻技术，人们正在利用复杂的纳米压印技术来制造薄膜光栅，其中电介质/铁电体/金属被集成在单片基底上，用于构造可调表面等离子激元谐振滤光器[2]。在高效率太阳能电池应用中，具有增强光学吸收性能的光子晶体背反光器的薄膜对光能的吸收[3]有很大的潜力。了解与金属/电介质薄膜相互作用时电磁波的行为，对于构造新型传感器是相当关键的。

在金属的等离子体频率的数量级范围内，会出现一些有趣的现象，例如，在平板内由场的内部干涉所引起的功率反射系数振荡[4]现象。振荡的性质（如频率和幅度）都是平板厚度、入射波的入射角、包封材料的折射率及金属自身空间色散特性的函数。本章论述薄膜的物理模型和功率反射系数的行为。我们将使用基于流体动力学近似的热等离子体模型，这种近似将证明功率反射系数的振荡。基于薄膜厚度，由倏逝波间相互作用所引起的功率隧道效应将在整个内反射范围中显示出来。

Unz[5]推导出了在热可压缩各向异性磁等离子体中的波动方程。Prasad[6]使用状态空间法得到了自由空间中热等离子体平板的功率反射系数，并且给出了最大/最小值点和特征根 q。Kalluri 和 Prasad[7]描述了自由空间中各向同性冷等离子体平板的薄膜反射特性，以及平板内部的振荡，并且求出了在平板内的最大/最小值。在 Kalluri 和 Prasad 的论文中，他们假定 $n_{\mathrm{I}}=n_{\mathrm{T}}=1$。本章的功率反射系数，是从麦克斯韦方程组及考虑不同输入/输出材料的流体动力学近似的详细的方程组中得到的。输入的横波斜入射在平板分界面上，在等离子体内部分界面复制其自身，此外还支持来自分界面的具有不同波数的纵向声波。

对于在频率空间中的不同折射率情况，给出了功率反射系数的特殊情况。总功率反射系数是周期性的并且具有逐渐减小的周期性。当声波模式速度趋近于 0 时，等离子体变为冷等离子体且不可压缩。各个纵向特征根依赖于参数 $\delta=a/c$，其中 a 是电子等离子体波的声速。在某些金属中，Fermi 速度[8]起着声速的角色。当 a 与 c 可比拟时，即是说 $\delta\approx 0.1-0.01$，等离子体是空间色散的并且可以被看成热等离子体。值得注意的是，纵向分

㊀ 作者系马萨诸塞大学罗维尔分校的电磁学和复杂媒质研究实验室。经过实验室主任 D. K. Kalluri 的允许转载，资料来自报告 UML-EM & CM-2010-1.

量的速度的一个很小变化，都会引起功率反射系数的显著动态响应，总体上看动态响应是周期性变化的但包含微弱的非周期成分。此外，热等离子体反射系数内的振荡趋于超过冷等离子体的分量。

11A.2 问题的公式

为了描述在薄膜内的电磁波，可以把金属模拟成一个厚度为 d 的有损(碰撞)均匀、各向同性(无静态 $\boldsymbol{B}_0$)热等离子体平板。折射率为 n_p 的等离子体平板被夹在折射率分别为 n_I(输入介质)和 n_T(输出介质)的两个半无限大电介质中间(见图 11A.1)。

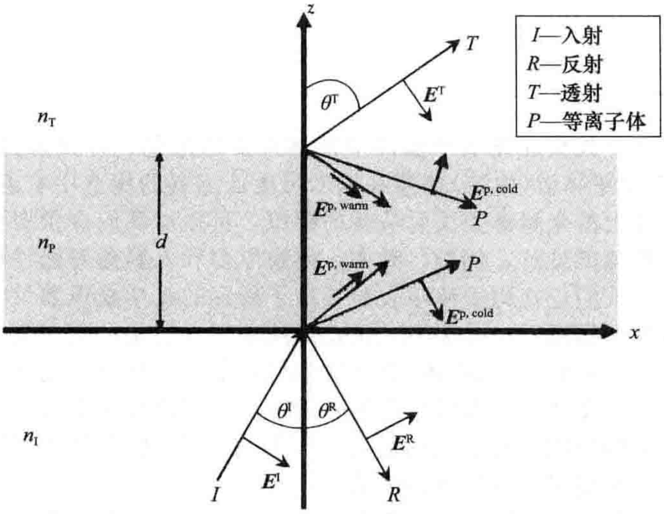


图 11A.1 (TM 或 p)波斜入射到热等离子体平板上，反射/透射波

一个平行(TM 或 p)极化波 E^I 以 θ^I 角入射到平板上，在所有入射平面上，反射波的角度为 $\theta^\mathrm{R}=\theta^\mathrm{I}$，透射波的角度为 θ^T。

11A.2.1 平板外的电磁波

对于等离子体平板外的入射、反射和透射(I、R 和 T)波来说，斜入射的电场、磁场可以描述为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I,R,T}}=\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{I,R,T}}\psi^{\mathrm{I,R,T}},\quad \boldsymbol{H}^{\mathrm{I,R,T}}=\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{I,R,T}}\psi^{\mathrm{I,R,T}} \tag{11A.1}$$

其中，$\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{I,R,T}}$ 与 $\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{I,R,T}}$ 分别是电场和磁场复振幅，且由下式给出

$$\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{I,R,T}}=\hat{x}E_x^{\mathrm{I,R,T}}+\hat{y}E_y^{\mathrm{I,R,T}}+\hat{z}E_z^{\mathrm{I,R,T}},\quad \boldsymbol{H}_0^{\mathrm{I,R,T}}=\hat{x}H_x^{\mathrm{I,R,T}}+\hat{y}H_y^{\mathrm{I,R,T}}+\hat{z}H_z^{\mathrm{I,R,T}} \tag{11A.2}$$

$\psi^{\mathrm{I,R,T}}$是在 $\boldsymbol{r}=0$ 处波的相位参考值，

$$\psi^{\mathrm{I,R,T}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}_{\mathrm{I,R,T}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{11A.3}$$

从图 11A.1 中可以看出，波矢量的几何构形可描述为

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{I}=k_0n_\mathrm{I}(\hat{x}S+\hat{z}C),\quad \boldsymbol{k}_\mathrm{R}=k_0n_\mathrm{I}(\hat{x}S-\hat{z}C),\quad \boldsymbol{k}_\mathrm{T}=k_0n_\mathrm{T}(\hat{x}S^\mathrm{T}-\hat{z}C^\mathrm{T}) \tag{11A.4}$$

式中，$S^\mathrm{T}=k_\mathrm{I}/k_\mathrm{T}S$ 和 $C^\mathrm{T}=\sqrt{1-(k_\mathrm{I}/k_\mathrm{T}S)^2}$。$S^\mathrm{T}$ 和 C^T 描述了在系统输出部分中电介质的特性。注意，$S=\sin(\theta^\mathrm{I})$，$C=\cos(\theta^\mathrm{I})$，$S^\mathrm{T}=\sin(\theta^\mathrm{T})$ 和 $C^\mathrm{T}=\cos(\theta^\mathrm{T})$。如果 $k_\mathrm{I}=k_\mathrm{T}$，则 $S^\mathrm{T}=S$和 $C^\mathrm{T}=C$。因为位置向量是 $\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z$，所以在等离子体平板外波的相位因子变为

$$\psi^\mathrm{I}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0n_\mathrm{I}(xS+zC)},\quad \psi^\mathrm{R}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0n_\mathrm{I}(xS-zC)},\quad \psi^\mathrm{T}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0n_\mathrm{I}(xS+zC')} \tag{11A.5}$$

式中，$C' = \sqrt{(k_T/k_I)^2 - S^2} = (k_T k_I) C^T$。根据 ψ^T，可得 $k_{T,x}^2 + k_{T,z}^2 = k_T^2$，其中 $k_T \omega/c \sqrt{\omega_T} = \frac{\omega}{c} n_T = k_0 n_T$。利用斯涅尔定律，可以导出在 ψ^T 中依赖于角度的参数 C'(式(11A.5))。斯涅尔定律隐含着边界条件(或相位匹配)已经得到满足，这在式(11A.5)的 x 分量中是很明显的，并且也可以从 $\theta^I = \theta^R$ 这一事实看出来。为了满足边界条件，入射、反射和透射波的相位因子的 x 分量相同。因此，对于 TM 波，在经过空间和时间边界时，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量都连续。

对于平面波传播情况[9]，电场和磁场可描述为

$$\boldsymbol{k}_{I,R,T} \cdot \boldsymbol{E}^{I,R,T} = 0, \quad \boldsymbol{H}^{I,R,T} = \frac{1}{\omega\mu_0} \boldsymbol{k}_{I,R,T} \times \boldsymbol{E}^{I,R,T} \tag{11A.6}$$

式中，μ_0 是自由空间的磁导率。将式(11A.1)代入式(11A.6)中，可以得到

$$SE_x^I = -CE_z^I, \quad SE_x^R = CE_z^R, \quad SE_x^T = -C'E_z^T \tag{11A.7a}$$

$$S\eta^I H_y^I = -E_z^I, \quad S\eta^I H_y^R = -E_z^R, \quad S\eta^I H_y^T = -E_z^T(C'^2 + S^2) \tag{11A.7b}$$

$$C\eta^I H_y^I = E_x^I, \quad C\eta^I H_y^R = -E_x^R, \quad C'\eta^I H_y^T = E_x^T(C'^2 + S^2) \tag{11A.7c}$$

式中，$\eta^I = \eta_0 / n_1$。

11A.2.2 平板内的电磁波

对于热等离子体，其基本方程为麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{E}^P = -j\omega\mu \boldsymbol{H}^P \tag{11A.8a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^P = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}^P - eN_0 \boldsymbol{u} \tag{11A.8b}$$

对可压缩电子气，使用流体力学近似，动量守恒方程为[5](各向同性情况)

$$mN_0(j\omega + \nu)\boldsymbol{u} = -\nabla p - eN_0 \boldsymbol{E}^P \tag{11A.9a}$$

能量守恒方程为

$$p = \gamma K T_0 N \tag{11A.9b}$$

状态方程为

$$\frac{p}{p_0} \frac{N}{N_0} \frac{T}{T_0}, \quad p_0 = KN_0 T_0 \tag{11A.9c}$$

式中，N 与 N_0 分别为小信号和大信号数密度(m^{-3})，p 和 p_0 分别为小信号和大信号压强($\mathrm{kg/ms^2}$)，T 和 T_0 分别为小信号和大信号的温度(K)，K 是玻尔兹曼常数，γ 是在常压力下的特定比热/在恒定体积中的特定比热，m 是电子质量(kg)，$\boldsymbol{u}$ 是速度矢量(m/s)。

上面给出的方程是基于线性理论导出的。Unz 证明了式(11A.8)和式(11A.9)可以简化为波动方程

$$U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right)\boldsymbol{E}^P + (U - \delta^2)(\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{E}^P)\boldsymbol{n} = 0 \tag{11A.10}$$

这里，有

$$U = 1 - jZ \tag{11A.11}$$

式中，Z 由电子碰撞频率 ν 和传输频率 ω 表示：

$$Z = \frac{\nu}{\omega} \tag{11A.12}$$

而下面一项

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \tag{11A.13}$$

与归一化频率的平方成反比，$X = \Omega^{-2}$，其中 $\Omega = \omega/\omega_p$。在薄膜中存在 4 种模式：透射/反射横波和透射/反射纵波。在边界 $z=0$ 处，d 起着声波模式的波源的作用，但仅存在在平

板介质内部。在平板内部，TM 波与声波的速度、压强和电场强度都满足波动方程式(11A.10)。在这一章中，可以用入射媒质、入射角和等离子体特征根参数 q' 来描述无量纲参数 n_p：

$$\boldsymbol{n}_p = n_I(S\hat{x} + q'\hat{z}), \quad n_p^2 = n_I^2(S^2 + q'^2) \tag{11A.14}$$

其中，q' 是待求的。注意，q' 并不是 q 的导数，而是用来区分色散方程在 $n_I > 1$ 时的解和在 $n_I = 1$ 时的解。对于热等离子体，纵向分量的速度是至关重要的，在某些金属中它比光速 c 小大约两到三个数量级。在等离子体内，电场和磁场强度可描述为

$$\boldsymbol{E}^P = \boldsymbol{E}_0^P \psi^P, \quad \boldsymbol{H}^P = \boldsymbol{H}_0^P \psi^P \tag{11A.15}$$

在式(11A.15)中，电场和磁场的复振幅分别为

$$\boldsymbol{E}_0^P = \hat{x}E_x^P + \hat{y}E_y^P + \hat{z}E_z^P, \quad \boldsymbol{H}_0^P = \hat{x}H_x^P + \hat{y}H_y^P + \hat{z}H_z^P \tag{11A.16}$$

在等离子体平板内部，场量的相位定义为

$$\psi^P = e^{-jk_0 n_I(xS + zq')} \tag{11A.17}$$

将式(11A.15)和式(11A.16)代入式(11A.10)中，可以得到斜入射到等离子体平板时的分界面方程：

$$U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right)E_x^P + (U - \delta^2)n_I^2(S^2E_x^P + Sq'E_z^P) = 0 \tag{11A.18a}$$

$$U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right)E_y^P = 0 \tag{11A.18b}$$

$$U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right)E_z^P + (U - \delta^2)n_I^2(Sq'E_x^P + q'^2E_z^P) = 0 \tag{11A.18c}$$

可以将式(11A.18a)～式(11A.18c)写成如下矩阵形式

$$[\boldsymbol{F}][\boldsymbol{E}] = 0 \tag{11A.19}$$

即

$$[\boldsymbol{F}][\boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{11A.20}$$

式(11A.20)中的各个元素由式(11A.18a)至式(11A.18c)决定，它们的表达式如下：

$$F_{11} = U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right) + (U - \delta^2)n_I^2S^2 \tag{11A.21a}$$

$$F_{12} = 0 \tag{11A.21b}$$

$$F_{13} = (U - \delta^2)n_I^2Sq' \tag{11A.21c}$$

$$F_{21} = 0 \tag{11A.21d}$$

$$F_{22} = U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right) \tag{11A.21e}$$

$$F_{23} = 0 \tag{11A.21f}$$

$$F_{31} = (U - \delta^2)n_I^2Sq' \tag{11A.21g}$$

$$F_{32} = 0 \tag{11A.21h}$$

$$F_{33} = U\left(1 - n_p^2 - \frac{X}{U}\right) + (U - \delta^2)n_I^2q'^2 \tag{11A.21i}$$

令矩阵[$\boldsymbol{F}$]的行列式等于 0，就可以得到色散关系 $F_{11}F_{33} - F_{13}F_{31} = 0$。对于冷等离子体和热等离子体模型，其特征根可以直接从下式的色散关系中得到

$$q'_{1,2} = \pm\left[\frac{1}{n_I^2}\left(1 - \frac{X}{U}\right) - S^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad q'_{3,4} = \pm\left[\frac{1}{\delta^2 n_I^2}(U - X) - S^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11A.22}$$

下标 1 表示向上的前向行波，下标 2 表示由分界面 $z = 0$ 所引起的向下的反射波，下

标 3 和 4 相类似。利用式(11A.8)求解磁场强度，可以得到

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x^{\mathrm{P}} & E_y^{\mathrm{P}} & E_z^{\mathrm{P}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\mathrm{j}k_0 n_1 S & 0 & -\mathrm{j}k_0 n_1 q' \\ E_x^{\mathrm{P}} & E_y^{\mathrm{P}} & E_z^{\mathrm{P}} \end{vmatrix} \tag{11A.23}$$

由于入射波是一个 TM 波，只需考虑 y 分量，因此

$$(\nabla\times \boldsymbol{E}^{\mathrm{P}})\ \hat{y} = -(-\mathrm{j}k_0 n_1 S E_z^{\mathrm{P}} + \mathrm{j}k_0 n_1 q' E_x^{\mathrm{P}})\ \hat{y} \tag{11A.24}$$

根据色散关系和式(11A.24)知道，磁场与电场的切向分量之比变为

$$\frac{H_y^{\mathrm{P}}}{E_x^{\mathrm{P}}} = \frac{U - X - \delta^2 n_{\mathrm{P}}^2}{\eta_0 n_1 q'(U-\delta^2)} \tag{11A.25}$$

在热等离子体中，依赖于电场的电子速度场由下式给出：

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\beta_0}\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{k_0^2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}\right) \tag{11A.26}$$

式中，$\beta_0 = eN_0/\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 = \omega mX/\mathrm{j}e$。利用式(11A.21a)和式(11A.21c)，式(11A.26)将变成为

$$\frac{u_z}{E_x} = \frac{1}{\beta_0}\left[n_1^2 q' S - \frac{U(1-n_{\mathrm{p}}^2-\dfrac{X}{U}) + (U-\delta^2)n_1^2 S^2}{(U-\delta^2)n_1^2 S q'}(1-n_1^2 S^2)\right] \tag{11A.27}$$

11A.2.3　夹在两种不同电介质(即 n_{I} 和 n_{T})之间的热各向同性等离子体平板的功率反射系数

当所讨论的等离子体媒质是热等离子体时，必须考虑纵向电场分量。可以导出夹在两种不同电介质 n_{I} 和 n_{T} 之间的热等离子体的功率反射系数。利用式(11A.25)、式(11A.27)以及下列无碰撞等离子体的方程，$U=1$，可以得到

$$\eta_{y1} = \frac{\eta_0 n_1 H_{y1}^{\mathrm{P}}}{E_{x1}^{\mathrm{P}}} = \frac{1-X}{q_1},\quad \eta_{y3} = \frac{\eta_0 n_1 H_{y3}^{\mathrm{P}}}{E_{x3}^{\mathrm{P}}} = 0 \tag{11A.28a}$$

$$\beta_{z1} = \beta_0\frac{u_{z1}^{\mathrm{P}}}{E_{x1}^{\mathrm{P}}} = -\mathrm{j}\frac{S}{q_1},\quad \beta_{z3} = \beta_0\frac{u_{z3}^{\mathrm{P}}}{E_{x3}^{\mathrm{P}}} = \mathrm{j}\frac{q_3}{SX} \tag{11A.28b}$$

$$\eta_{y2} = -\eta_{y1},\quad \eta_{y4} = \eta_{y3},\quad \beta_{z2} = -\beta_{z1},\quad \beta_{z4} = -\beta_{z3} \tag{11A.28c}$$

利用在 $z=0$ 处和 d 处 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续这一边界条件，可以得到 4 个方程。对于正弦波，我们使用了切向边界条件，因为它们是利用麦克斯韦旋度方程导得的。法向边界条件(由散度方程得到)可以从旋度方程中导出。因此，法向边界条件是不独立的边界条件，当满足切向边界条件时就可以保证满足法向边界条件[10]。因为在电介质中不存在电子电流，所以为了考虑在分界面上电子的速度等于 0，由边界条件还可以导出另外两个方程。根据边界条件、式(11A.1)至式(11A.7)和式(11A.28)，可以写出系统方程如下：

$$\sum_{i=1}^{4} E_{xi}^{\mathrm{P}} = E_x^{\mathrm{I}} + E_x^{\mathrm{R}} \tag{11A.29a}$$

$$\sum_{i=1}^{4} H_{yi}^{\mathrm{P}} = H_y^{\mathrm{I}} + H_y^{\mathrm{R}} \tag{11A.29b}$$

$$\sum_{i=1}^{4} u_{zi}^{\mathrm{P}} = 0 \tag{11A.29c}$$

$$\sum_{i=1}^{4} E_{xi}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 q_i' d} = E_x^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 C' d} \tag{11A.29d}$$

$$\sum_{i=1}^{4} H_{yi}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 q_i' d} = H_y^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 C' d} \tag{11A.29e}$$

$$\sum_{i=1}^{4} u_{zi}^{\mathrm{P}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 q_i' d} = 0 \tag{11A. 29f}$$

在等离子体内部，波的纵向分量由静电场组成，当舍弃任何 η_{y3} 等于 0 时。将式(11A. 29)写为矩阵形式，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \dfrac{c\eta_{y1}}{n_\mathrm{I}^2} & -\dfrac{c\eta_{y1}}{n_\mathrm{I}^2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{z1} & -\beta_{z1} & \beta_{z3} & -\beta_{z3} & 0 & 0 \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \lambda_4' & 0 & -1 \\ \dfrac{C'\lambda_1'\eta_{y1}}{n_\mathrm{I}^2(C'^2+S^2)} & -\dfrac{C'\lambda_2'\eta_{y1}}{n_\mathrm{I}^2(C'^2+S^2)} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda_1'\beta_{z1} & -\lambda_2'\beta_{z1} & \lambda_3'\beta_{z3} & -\lambda_4'\beta_{z4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1}^{\mathrm{P}} \\ E_{x2}^{\mathrm{P}} \\ E_{x3}^{\mathrm{P}} \\ E_{x4}^{\mathrm{P}} \\ E_x^{\mathrm{R}} \\ E_x^{\mathrm{T}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E_x^{\mathrm{I}} \tag{11A. 30}$$

式中，$\lambda_i' = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 q_i' d}$，$E_x^{\mathrm{T}'} = E_x^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 C' d}$ 并且 $H_y^{\mathrm{T}'} = H_y^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 n_1 C' d}$。

由反射电场与入射电场之比，可以得到复反射系数：

$${}_{\|}R_{\|} = \frac{E_x^{\mathrm{R}}}{E_x^{\mathrm{I}}} \tag{11A. 31}$$

符号 ${}_{\|}R_{\|}$ 表示在入射平面上入射波和反射波都是 p 波。对式(11A. 31)进行化简后，${}_{\|}R_{\|}$ 变为

$$\begin{aligned} {}_{\|}R_{\|} = -\{&\beta_{z1}\beta_{z3}\{(\lambda_4'+\lambda_3')(\lambda_2'-\lambda_1')\eta_{y1}n_\mathrm{I}^2[C'-C(C'^2+S^2)] \\ &-(\lambda_1'\lambda_2'+\lambda_3'\lambda_4')4n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)+(\lambda_4'+\lambda_3')(\lambda_1'+\lambda_2')2n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)\} \\ &+\beta_{z1}^2(\lambda_4'-\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda_2')n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2) \\ &+\beta_{z3}^2\{(\lambda_4'-\lambda_3')(\lambda_1'+\lambda_2')\eta_{y1}n_\mathrm{I}^2[C(C'^2+S^2)-C'] \\ &+(\lambda_4'-\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda_2')[n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)-CC'\eta_{y1}^2]\}\}/\Delta \end{aligned} \tag{11A. 32}$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta = &\beta_{z1}\beta_{z3}\{(\lambda_4'+\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda_2')\eta_{y1}n_\mathrm{I}^2[C'-C(C'^2+S^2)] \\ &+(\lambda_1'\lambda_2'+\lambda_3'\lambda_4')4n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)-(\lambda_4'+\lambda_3')(\lambda_1'+\lambda_2')2n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)\} \\ &+\beta_{z1}^2(\lambda_3'-\lambda_4')(\lambda_1'-\lambda_2')n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2) \\ &+\beta_{z3}^2\{(\lambda_4'-\lambda_3')(\lambda_1'+\lambda_2')\eta_{y1}n_\mathrm{I}^2[C(C'^2+S^2)+C'] \\ &-(\lambda_4'-\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda_2')(n_\mathrm{I}^4(C'^2+S^2)+CC'\eta_{y1}^2)\} \end{aligned} \tag{11A. 33}$$

功率反射系数定义为 ${}_{\|}R_{\|}$ 的大小的平方：

$$\rho_{\|} = |{}_{\|}R_{\|}|^2 \tag{11A. 34}$$

这里没有给出式(11A. 34)的解析形式，因为它太复杂了；可利用计算机代码或者近似方法来研究它。在临界角处，折射率 n_I 和 n_T 使得依赖角度的参数 C' 在临界处变为 0。复反射系数的实部和虚部的变化取决于入射角是大于还是小于临界角。式(11A. 34)对 n_T 和 n_I 依赖性很大，因此材料的选择将会显著地影响复合材料的反射特性。图 11A. 2 所示为归一化厚度为 $d_\mathrm{p}=d/\lambda_\mathrm{p}=0.2$ 的薄膜的功率反射系数，其中 λ_p 是等离子体的波长，$\lambda_\mathrm{p}=$

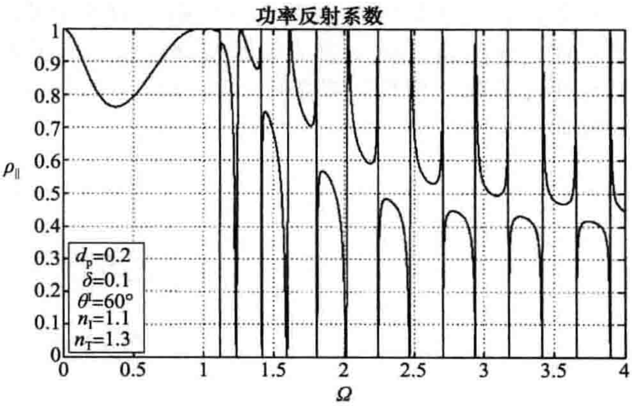


图 11A. 2 $d_\mathrm{p}=0.2$，$\delta=0.1$，$\theta^\mathrm{I}=60°$，$n_\mathrm{I}=1.1$ 且 $n_\mathrm{T}=1.3$ 时的功率反射系数

$2\pi c/\omega_p$，入射角 $\theta^I=60°$，材料的 $n_I=1.1$，$n_T=1.3$，以及 $\delta=0.1$。功率反射系数从单调变化变为在 0~1 之间作复杂振荡，并且其周期随着频率上升而减小。

11A.3 功率反射系数的不同区域

理解反射特性的一个方法是考察色散关系式，求解色散关系式可以得到等离子体媒质的特征根。对于各向同性媒质的情况，共有 4 个特征根，其中两个特征根 $q'_{1,2}$ 对应于一组向上和向下的横波模式，类似地另外两个特征根 $q'_{3,4}$ 对应于纵向(声波)模式。横波模式可被看做冷等离子体模式，而纵波模式可被看做热等离子体模式。对于 $U=1$ 的无损耗情况，特征根或者是实数或者是虚数，但不是复数。根的零点(在这里称为临界点)决定于入射波的正弦值。在临界点处，根由实数变为虚数或由虚数变为实数。式(11A.22)表明，当 q' 趋近于 0 时特征根趋近于无穷大。此外，当 Ω 趋近于无穷大时，特征根渐近于依赖于入射角的某个值。临界点将 $\rho_{\parallel}$ 分为 3 个主要区域(见图 11A.3)：第一个区域，$0<\Omega<[1-(\delta n_I S)^2]^{1/2}$：$q'_1$ 和 q'_3 都是虚数，对于较厚材料会引起入射波能量的全反射。注意，在 $\rho_{\parallel}$ 中存在一个称作能量隧道的特殊现象，在后面讨论薄膜材料时将用它来解释在第一个区域中所观察到的一个跌落现象。通过适当地选取材料的折射率和入射角，在第一个区域中也可能发生衰减全反射(ATR)。第二个区域$[1-(\delta n_I S)^2]^{1/2}<\Omega<[1-(n_I S)^2]^{1/2}$：$q'_1$ 仍然是虚数，但 q'_3 是实数，允许纵向(声)等离子体波在等离子体中传播。在这个区域内，由于纵向分量的内反射，$\rho_{\parallel}$ 呈现出一种振荡行为。对于 $n_I=n_T=1$ 的情况，对 $\rho_{\parallel}$ 做一些近似就可以证明振荡行为仅是由纵波模式引起的。只要导出一个可以决定 $\rho_{\parallel}$ 零点(近似值)的余割项，就可以说明振荡只依赖于 q'_3。薄膜厚度的一个微小变化都会引起振荡频率的显著变化，这表明振荡频率对薄膜性质非常地敏感。第三个区域，$[1-(n_I S)^2]^{1/2}<\Omega<\infty$：$q'_1$ 和 q'_3 都是实数，纵波和横波都能穿过平板传播。在第三个区域内，$\rho_{\parallel}$ 会发生不同复杂度的振荡。

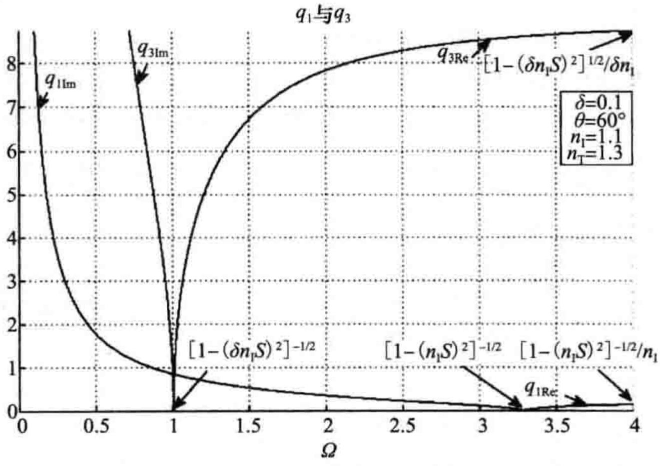


图 11A.3 $\delta=0.1$ 且 $\theta=60°$时的特征根。其中给出了折射率 $n_I=1.1$ 时的临界点。q'_1和 q'_3都与 n_T 无关

改变入射角或材料特性 n_I，会显著地改变 q'_1 和 q'_3 的零点(见图 11A.3)。这里设定了 $\rho_{\parallel}$ 的临界点，临界点会改变 $\rho_{\parallel}$ 的动力学行为。这些临界点界定了 $\rho_{\parallel}$ 的区域，它们可以描述为

$$\Omega_{零点,冷}=[1-(n_I S)^2]^{1/2},\quad \Omega_{零点,热}=[1-(\delta n_I S)^2]^{1/2} \tag{11A.35a}$$

$$q'_1(\Omega\to\infty)=\frac{[1-(n_I S)^2]^{1/2}}{n_I},\quad q'_3(\Omega\to\infty)=\frac{[1-(\delta n_I S)^2]^{1/2}}{\delta n_I} \tag{11A.35b}$$

后面几节将详细地描述在由 q' 的临界点所界定的不同区域内 $\rho_{\parallel}$ 的行为。针对几种特殊情况，我们对式(11A.32)进行了分析。

11A.3.1 区域 1($0<\Omega<[1-(\delta n_1 S)^2]^{1/2}$)中的功率反射系数

根据图 11A.3，各自的特征根为

$$\begin{bmatrix} jq_1 \\ jq_3 \end{bmatrix} \tag{11A.36}$$

因为所有的 λ'_i 项都是实数，所以式(11A.32)仅由双曲正弦项和双曲余弦项组成。因此，不存在横波模式与纵波模式的波传播，波是倏逝波。在这个区域中，功率反射系数不会发生振荡并将保持为 1。后面几节将论述当薄膜变得足够薄时，能量隧道效应将会发生作用，$\rho_{\parallel}$ 将不再是总保持为 1，但是将允许一部分能量穿过平板。

11A.3.1.1 区域 1 和能量隧道效应

对于厚平板来说，波是倏逝波并且衰减场之间不存在相互作用。当平板变得足够薄时，会发生能量隧道现象。隧道现象表现为在区域 1 中透射系数 $\tau_{\parallel}$ 有一个峰值。Kalluri[11] 给出了峰值的一个表达式，它是一个超越方程，与 $\rho_{\parallel}$ 振荡中的相位项相关。对于一个给定的入射角，调节 Ω 并测量 $\tau_{\parallel}$ 的峰值就可以得到 $\Omega_{\max}$，进一步利用 $\Omega_{\max}$ 可以确定出平板厚度或等离子体频率。

对于归一化厚度 $k'_x=k'_0S'$，$k'_z=k'_zC$ 和 $n_1=n_T=1$ 的情况，图 11A.4 示出了能量隧道的效应。其中也给出了功率透射系数 $\tau_{\parallel}=1-\rho_{\parallel}$。对于厚度为 $\lambda_p/20$ 的薄膜，平板几乎是完全透射的。对于 $d_p=1$，冲向热等离子体平板上的光强被分界面完全地反射回来。然而，随着平板厚度的减小，由于倏逝前行电场和倏逝反行磁场之间的横向相互作用(反之亦然)，在平行于 $z=d$ 处分界面的平面上产生了一个实传输能量。这就解释了我们在第一个区域中所看到的那个跌落。对于空气-等离子体-空气冷等离子体的情况，使用超越方程，通过对最大功率传输进行实验测量可以得到有关材料厚度的信息。当增加平板的厚度时，在平板内的衰减场到达另一侧的分界面时，它们就会变得很小甚至可以忽略不计，此时能量隧道现象也会相应地减弱。图 11A.5 给出了电介质-等离子体-电介质冷和热等离子体情况的结果，$n_1=1.46$，$n_T=1.48$。对于任何厚度，在冷等离子体模型($\delta=0$)和热等

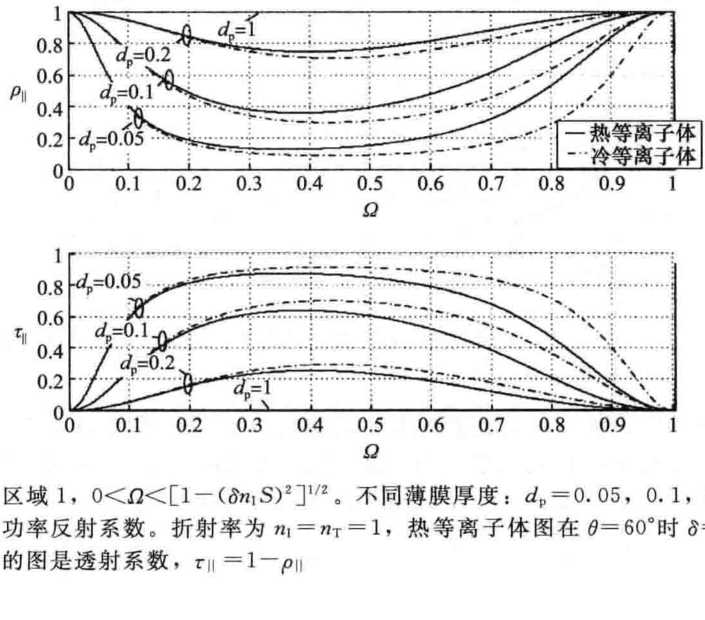


图 11A.4 区域 1，$0<\Omega<[1-(\delta n_1 S)^2]^{1/2}$。不同薄膜厚度：$d_p=0.05$，0.1，0.2，1 时的功率反射系数。折射率为 $n_1=n_T=1$，热等离子体图在 $\theta=60°$ 时 $\delta=0.1$。下方的图是透射系数，$\tau_{\parallel}=1-\rho_{\parallel}$

离子体模型($\delta=0.1$)的能量隧道效应之间都存在显著的差异，当引入不同的电介质时也存在差异。

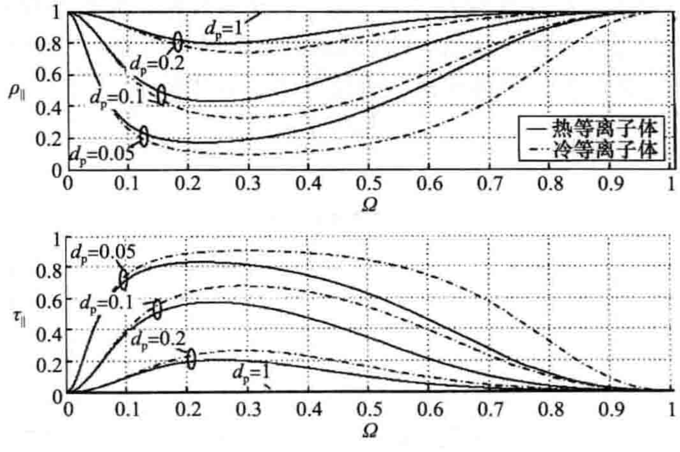


图 11A.5　区域 1，$0<\Omega<[1-(\delta n_I S)^2]^{1/2}$。与图 11A.4 相似，但 $n_I=1.46$，$n_T=1.48$

分析图 11A.4 和图 11A.5 可以看出，在等离子体频率附近，即 $d_p=0.05$ 时，热等离子体和冷等离子体的 $\rho_{\parallel}$ 的最大差异出现。对于任意的厚度，采用冷等离子体模型时会有更多的光透射过平板。在测量光学常数时，通过对超越方程使用一个适当的修正因子来获得 n_I 和 n_T，在区间 $0\leqslant\Omega\leqslant1$ 内测到的跌落就可以提供有关材料 n_p 的重要信息。此外，从图 11A.5 中看出当 $\Omega=0$，1 时，$\rho_{\parallel}=1$。根据式(11A.32)，当 $\Omega\to0(\omega=0)$时，$X\to\infty$，于是如图 11A.3 所示，$q_1\to\infty$ 且 $q_3\to\infty$。进一步地，η_{y1}，$\beta_{z1}\to0$，β_{z3}，$\lambda'_i\to\infty$ 且 $_{\parallel}R_{\parallel}\to1$。当 $\Omega=1(\omega=\omega_p)$时，$X\to1$，$\eta_{y1}\to0$，$\beta_{z1}$，$\beta_{z2}\to-1$，且所有 λ'_i 相等，于是 $_{\parallel}R_{\parallel}\to1$。对于 $\Omega=0$，1，$\rho_{\parallel}$ 被迫必须等于 1，与任何 n_I 无关，或者对于任何材料的选择，n_T 都会产生一个汇合点。

11A.3.1.2　区域 1 和表面等离子激元

如果我们考虑电子等离子体波的速度 x 要比光速 $c=3\times10^8$ m/s 小数个数量级的情况，那么根据式(11A.22)和式(11A.28b)，$\delta\to0$，$q_3\to\infty$，$\beta_{z3}\to\infty$ 且等离子体是冷等离子体。而且，根据式(11A.32)，仅有与 β_{z3}^2 相乘的项才会存在，可以导出两种不同电介质之间冷等离子体的功率反射系数，

$$\rho_{\parallel}=\left|\frac{(1-C\eta'_{y1}/n_I^2)[1-C'\eta'_{y2}/n_I^2(C'^2+S^2)]\lambda'_2-(1-C\eta'_{y2}/n_I^2)[1-C'\eta'_{y1}/n_I^2(C'^2+S^2)]\lambda'_1}{(1+C\eta'_{y1}/n_I^2)[1-C'\eta'_{y2}/n_I^2(C'^2+S^2)]\lambda'_2-(1+C\eta'_{y2}/n_I^2)[1-C'\eta'_{y1}/n_I^2(C'^2+S^2)]\lambda'_1}\right| \tag{11A.37}$$

根据式(11A.37)可以画出图 11A.6，这里使用了 Lekner[12] 和 Otto[13] 所选用的材料：输入电介质是基于等离子体频率 $n_I=1.9018$ 的玻璃，$n_p=0.055+j3.28$ 的银薄膜，输出电介质为 $n_T=1.392$ 的氟化锂。如 n_p 的实部所示，这里考虑了碰撞。

图 11A.6 的结果与 Lekner 的结果很好地一致。根据式(11A.37)的结果，n_p 中的碰撞项使得 q'的实部不等于零。由于这就是 ATR 的情况，波长 $\lambda=546.1$nm 所对应的频率低于等离子体频率，且处于全反射区。图 11A.6 中也给出了 C'项，可以证明它在临界角处等于 0，即 $C'=\sqrt{(n_T/n_I)^2-S^2(\theta=47.05°)}=0$，这使得随着光子-电子耦合在表面等离子激元角 53.9°处激发出一个表面等离子激元，$\rho_{\parallel}$ 向下变为 0。在临界角(本例为 47.05°)处，C'由一个纯实数转变为一个纯虚数。这个零点就是发生全内反射的角度，如果在 n_I 和 n_T 之间不存在薄膜，波将沿着分界面传播。在这个临界角处，v_0 的实部和虚部的解析表达式

(本章并没有给出)都会发生变化，因此，$\mathrm{Re}\{_{\|}R_{\|}\}_{\vartheta^{\mathrm{I}}<\theta_{\mathrm{C}}}\neq\mathrm{Re}\{_{\|}R_{\|}\}_{\vartheta^{\mathrm{I}}>\theta_{\mathrm{C}}}$ 且 $\mathrm{Im}\{_{\|}R_{\|}\}_{\vartheta^{\mathrm{I}}<\theta_{\mathrm{C}}}\neq\mathrm{Im}\{_{\|}R_{\|}\}_{\vartheta^{\mathrm{I}}>\theta_{\mathrm{C}}}$。表面等离子激元谐振是夹在 n_{I} 和 n_{T} 之间的金属薄膜的效应。在一定意义上，插入金属薄膜对于入射 p 波产生了一个等效布儒斯特角，而对于仅存在半空间材料的情况来说，这个角是不存在的。从 Averitt 给出的文献[14]可知，对于 ε^{P} 实部和表面等离子激元谐振，功率反射系数完全被抑制的角度可由下式计算：

$$\theta_{\mathrm{SP}}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon^{\mathrm{P}}/(\varepsilon^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{\mathrm{P}})}}{\sqrt{\varepsilon^{\mathrm{T}}}}\right)=53.9^{\circ}\tag{11A.38}$$

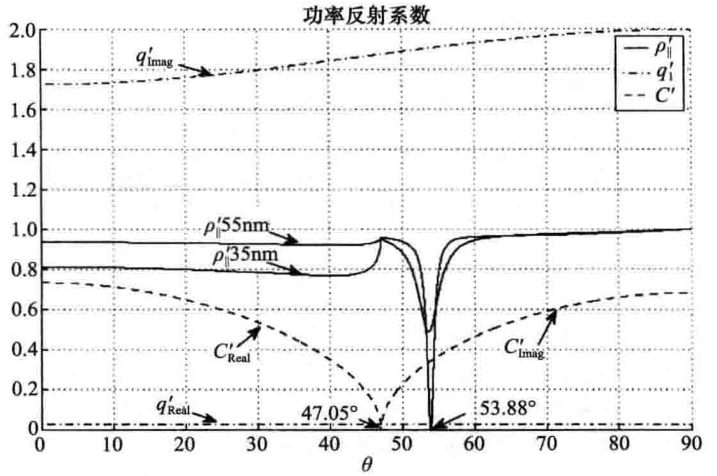


图 11A.6 两不同薄膜厚度下，功率反射系数与入射角之间的关系：d 分别为 35nm 和 50nm。折射率为 $n_{\mathrm{I}}=1.9018$，$n_{\mathrm{T}}=1.392$ 且 $n_{\mathrm{p}}=0.055+\mathrm{j}3.28$

11A.3.2 区域 2($[1-(\delta n_{\mathrm{I}}S)^2]^{1/2}<\Omega<[1-(n_{\mathrm{I}}S)^2]^{1/2}$)中的功率反射系数

根据图 11A.3，各自的特征根是

$$\begin{bmatrix}\mathrm{j}q_1\\ q_3\end{bmatrix}\tag{11A.39}$$

功率反射系数呈现出振荡行为。纯实数特征根 x 表明纵波(声波)模式将可以穿过薄膜。在式(11A.32)中，包含 q_3 的 λ'_i 项是复数，表明穿过平板传播的能量。正如从图 11A.2中看到的，由于等离子体媒质的空间色散性质，在这一区域内振荡是剧烈的。热等离子体分量是一个静电场强度的声波模式，其波速为 y，它是纵向的，也是麦克斯韦方程组的一个解。当与 c 相比 a 很小时，不存在波的传播，并且等离子体变为冷等离子体，此时只存在频率为 ω_{p} 的等离子体振荡。包含 q_1 的 λ'_i 项将是实数，并且横波模式将是倏逝波。

11A.3.2.1 区域 2 和 $n_{\mathrm{I}}=n_{\mathrm{T}}=1$ 时对 $\rho_{\|}$ 的估算

因为 $\sin(k_0\mathrm{j}q_1d)\equiv\mathrm{j}\sinh(k_0q_1d)$ 和 $\cos(k_0\mathrm{j}q_1d)\equiv\cosh(k_0q_1d)$，所以有

$$\rho_{\|}=\frac{1}{1+\begin{bmatrix}2Cq_3(1-X)[q_1q_3\sin(k_0q_3d)+S^2X\sinh(k_0q_1d)]/\\ 2q_1q_3S^2X[1-\cosh(k_0q_1d)\cos(k_0q_3d)\\ +[-q_1^2q_3^2-C^2q_3^2(1-X)^2+S^4X^2]\sinh(k_0q_1d)\sin(k_0q_3d)]\end{bmatrix}^2}\tag{11A.40}$$

在这个区域内，可以近似地计算功率反射系数，有如下简单形式

$$\rho_{\|}=\frac{1}{1+[A_0[q_1q_3\sin(k_0q_3d)+S^2X\sinh(k_0q_1d)]/(A_2+A_3\cos(k_0q_3d)+A_4\sin(k_0q_3d))]^2}\tag{11A.41}$$

式中

$$A_0 = 2Cq_3(1-X) \tag{11A.42a}$$

$$A_1 = [-q_1^2q_3^2 - C^2q_3^2(1-X)^2 + S^4X^2] \tag{11A.42b}$$

$$A_2 = 2q_1q_3S^2X \tag{11A.42c}$$

$$A_3 = -A_2\cosh(k_0q_1d) \tag{11A.42d}$$

$$A_4 = A_1\sinh(k_0q_1d) \tag{11A.42e}$$

与$\hat{T}'$和$\hat{F}'$相比较，q'_i 项对式(11A.41)的贡献不是很大。在我们感兴趣的大部分区域内，A_3 和 A_4 两项都较大且为负值，因此可以忽略 A_2。式(11A.41)的近似(记作 ρ_a)式变为

$$\rho_a = \frac{1}{1+\{A_0[q_1q_3\sin(k_0q_3d)+S^2X\sinh(k_0q_1d)]/[A_3\cos(k_0q_3d)+A_4\sin(k_0q_3d)]\}^2} \tag{11A.43}$$

上式可简化为

$$\rho_a = \frac{1}{\begin{array}{l}1+\{A_0[q_1q_3\sin(k_0q_3d)+S^2X\sinh(k_0q_1d)]/\sqrt{A_3^2+A_4^2}\}^2\\ \times\csc^2(k_0q_3d+\arctan(-A_4/A_3)\pm\pi/2)\end{array}} \tag{11A.44}$$

式(11A.44)与 Kalluri 和 Prasad[7] 得到的冷等离子体平板的结果具有相同的形式。图 11A.7给出了 $\delta=0.3$ 且薄膜厚度 $d_p=1$ 时，$\rho_{\|}$ 和 ρ_a 的结果。区域 2 近似地位于$\{1.04<\Omega<2\}$范围内。一直到 $\Omega\approx1.86$，$\rho_{\|}$ 的近似结果都很好。大约在 $1.86<\Omega<2$ 的范围内，$A_2\approx A_3\approx A_4$，此时在式(11A.43)中忽略$\sum'$项就不再成立。振荡具有周期性，其周期随 Ω 增大而减小，这是由依赖于 Ω 的 $\csc^2$ 项所引起的。尽管在括号项$[\sin()]^2$ 内含有振荡项，但是 ρ_a 的零点并不由该项所决定，而是完全依赖于 $\csc^2$ 项的相位，因此有

$$k_0q_3d+\arctan\left(-\frac{A_4}{A_3}\right)\pm\frac{\pi}{2}=m\pi,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{11A.45}$$

在 $m=0$，1，2，…处，$\csc^2$ 项趋于无穷大，它定义了 ρ_a 的离散零点，相应地也定义了 $\rho_{\|}$ 的零点。图 11A.7 中的峰值出现在使 $\mathrm{d}\rho_a/\mathrm{d}\Omega=0$ 的 Ω 处。如果允许式(11A.44)变为

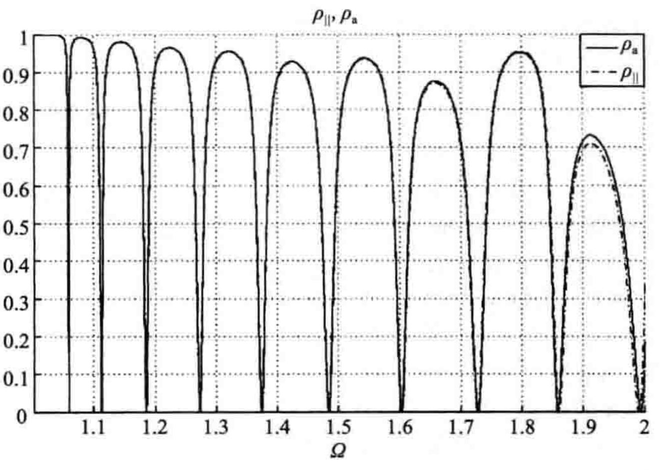


图 11A.7 式(11A.40)和式(11A.41)的比较及其近似。折射率为 $n_I=n_T=1$，$\delta=0.3$。入射角 $\theta=60°$，薄膜厚度 $d_p=1$

$$\rho_a = \frac{1}{1 + A_5^2/(A_3^2 + A_4^2)\csc^2(A_6)} \tag{11A.46}$$

式中，$A_5 = A_0[q_1 q_3 \sin(k_0 q_3 d) + S^2 X \sinh(k_0 q_1 d)]$且 $A_6 = k_0 q_3 d + \arctan(-A_4/A_3) \pm \pi/2$。

此时，根据式(11A.46)，ρ_a 的极值点所满足的方程是一个超越方程，

$$\tan(A_6) = f\frac{dA_6}{d\Omega} \tag{11A.47}$$

式中

$$f = \frac{(A_3^2 + A_4^2)}{(A_3^2 + A_4^2)(1/A_5)dA_5/d\Omega - (A_3 dA_3/d\Omega + A_4 dA_4/d\Omega)} \tag{11A.48}$$

且

$$\frac{dA_6}{d\Omega} = k_0 q_3 d\left(\frac{1}{q_3}\frac{dq_3}{d\Omega} + \frac{1}{\Omega}\right) + \frac{d}{d\Omega}\arctan\left(-\frac{A_4}{A_3}\right) \tag{11A.49}$$

11A.3.2.2 区域 2 和薄膜厚度

图 11A.8 所示为不同平板厚度 d_p=0.05，0.1，0.2，0.5，0.7，1 时的 $\rho_{\parallel}$(式(11A.34))。

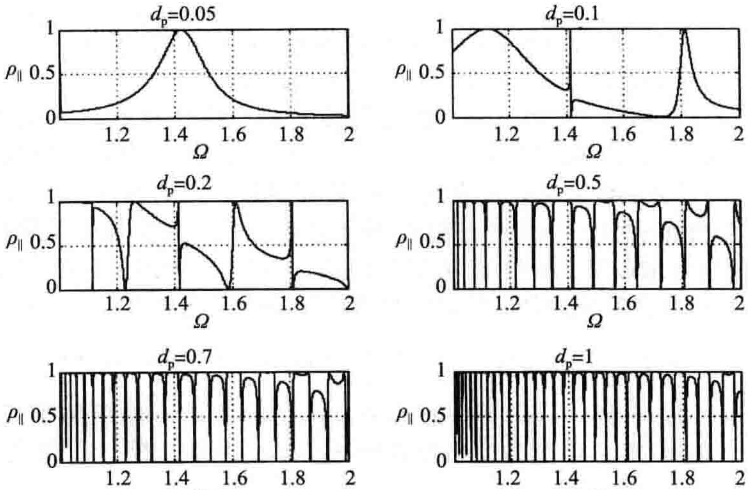


图 11A.8 不同薄膜厚度的功率反射系数图。折射率是 $n_I = n_T = 1$，δ=0.1，入射角为 θ=60°，薄膜厚度分别为 d_p=0.05，0.1，0.2，0.5，0.7，和 1

电介质的折射率为 $n_I = n_T = 1$，δ=0.1且入射角为 θ=60°。这个区域的范围是 1.0037<Ω<2。随着平板厚度的增加，振荡的数目也在增加。振荡幅度分布在 0～1 之间的整个范围内。因为 $n_I = n_T = 1$，所以 $\rho_{\parallel}$=1 的点是方程 $q_1 q_3 \sin(k_0 q_3 d) = -S^2 X\sinh(k_0 q_1 d)$ 的解。$\rho_{\parallel}$=0 的点是 $\csc^2$ 项的相位等于 $m\pi$ 时的点。

对于 n_I=1.4，n_T=1.45 的情况，在 Ω 的范围内不存在第二个临界点，因此 1.0074<Ω<1.458。如图 11A.9 所示，这意味着对于所有 Ω 值，q_1' 都将是虚数。输入和输出

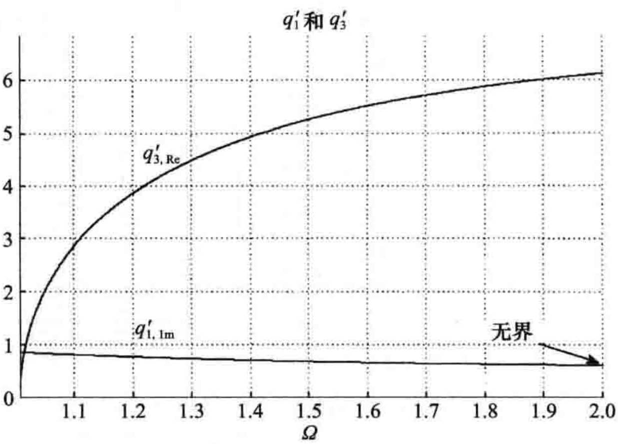


图 11A.9 在 y 的频率范围内，n_I=1.4，n_T=1.45 时的 q_1' 和 q_3'

媒质的折射率对 q_1 的第二个临界点具有调节作用，这将会改变 $\rho_{\parallel}$ 的振荡行为。如图 11A.10所示，随着厚度增加，在频带中会出现尖锐的凹口。

($[1-(n_1S)^2]^{1/2}<\Omega<\infty$)区域内的功率反射系数。后续章节将讨论 q'_1 和 q'_3 都是实数的区域 3。

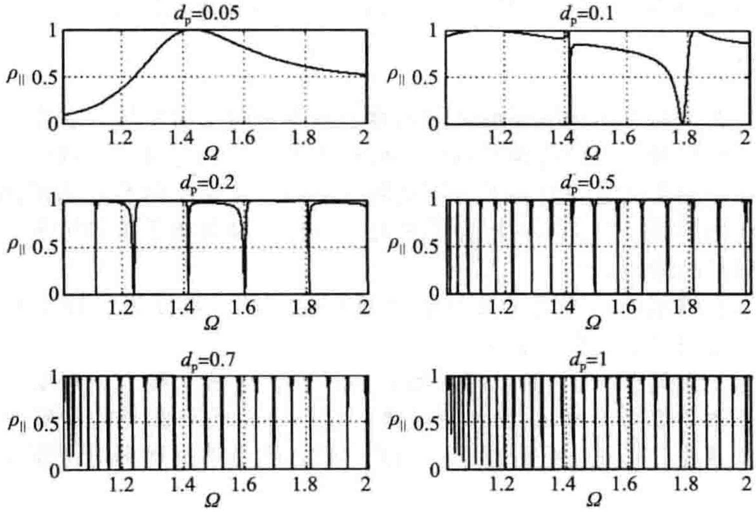


图 11A.10 不同薄膜厚度下的功率反射系数图。折射率为 $n_1=1.4$，$n_T=1.45$，$\delta=0.1$，入射角 $\theta=60°$，以及薄膜厚度分别为 $d_p=0.05$，0.1，0.2，0.5，0.7，1

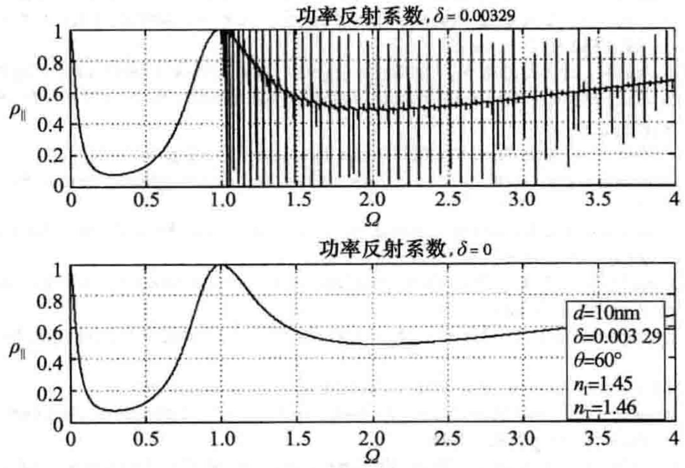


图 11A.11 厚度为 $d=10\text{nm}$ 的钠薄膜的热功率反射系数和冷功率反射系数。折射率为 $n_1=1.45$，$n_T=1.46$，钠的等离子体频率为 $\omega_p=8.2\times10^{15}\,\text{rad/s}$，由费米速度 $V_F=9.87\times10^7\,\text{cm/s}$ 求得 $\delta=V_F/c=3.29\times10^{-3}$。入射角 $\theta=60°$

11A.3.3 钠薄膜的功率反射系数

应用 Forstmann 和 Gerhardts[8] 提供的钠的材料参数：等离子体频率为 $\omega_p=8.2\times10^{15}$ rad/s，由费米速度 $V_F=9.87\times10^7\,\text{cm/s}$ 求得 $\delta=V_F/c=3.29\times10^{-3}$。当薄膜厚度 $d=10\text{nm}$ 和入射角 $\theta=60°$时，图 11A.11 所示分别为热等离子体模型(上方)和冷等离子体模型(下

方)的功率反射系数。根据输入和输出材料，图 11A. 11 仅示出了前两个区域的结果，因为第三个区域是无界的。第一个区域(y)显示了能量隧道效应，如图 11A. 11 所示的大跌落。与 10nm 薄膜的厚度相比，等离子体的波长 $\lambda_p=229\text{nm}$ 很大。在第二个区域中，由金属薄膜的费米速度所引起的振荡非常明显。热等离子的振荡支撑在冷等离子体之上。与前面的结果相似，振荡的周期由实数 q'_1 所决定，虚数 q'_1 随 Ω 增大而减小。

11A. 4 结论

我们讨论了夹在两种不同电介质之间的薄金属平板的反射特性，着重分析了功率反射系数及其相应的特征根。如果将薄膜看成一种热等离子体，它可以支持纵电磁声波模式的传播，且纵电磁声波模式是麦克斯韦方程组的一个解。功率反射系数的振荡具有跟随冷等离子体分量变化的趋势。对于不同电介质材料，讨论了冷等离子体的情况，模型表明会发生表面等离子激元的激发。

材料选择会影响能量在等离子体材料中的传播特性。特征根依赖于输入材料的折射率、纵向等离子体波的波速和入射角。

为了保证在任何频率下 q'_1 都是纯虚数，选择低折射率的输入材料会使得 $\Omega_{冷}$ 变为虚数。如果把正弦和余弦选作为 q_1 波数的函数，它们将总是双曲型的，所得到的功率反射系数类似于梳状函数，其周期略有减小。因此，输入媒质的折射率对薄膜反射特性具有调节效应。

参考文献

1. Shackleford, J. A., Grote, R., Currie, M., Spanier, J. E., and Nabet, B., Integrated plasmonic lens photodetector, *Appl. Phys. Lett.*, **94**, 083501-1–083501-3, 2009.
2. Chen, H. L., Hsieh, K. C., Lin, C. H., and Chen, S. H., Using direct nanoimprinting of ferroelectric films to prepare devices exhibiting bi-directionally tunable surface plasmon resonances, *Nanotechnology*, **19**, 435304, 1–6, 2008.
3. Curtin, B., Biswas, R., and Dalal, V., Photonic crystal based back reflectors for light management and enhanced absorption in amorphous silicon solar cells, *Appl. Phys. Lett.*, **95**, 083501-1–083501-3, 231102, 2009.
4. Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, IEEE Press, Piscataway, NJ, p. 513, 2007.
5. Unz, H., Oblique wave propagation in a compressible general magnetoplasma, *Appl. Sci. Res.*, **16**, 105–120, 1965.
6. Prasad, R. C., *Transient and frequency response of a bounded plasma*, PhD Thesis, Birla Institute of Technology, Ranchi, India, 1976.
7. Kalluri, D. K. and Prasad, R. C., Thin-film reflection properties of isotropic and uniaxial plasma slabs, *Appl. Sci. Res.*, **27**, 415–424, 1973.
8. Forstmann, F., Gerhardts, R. R., *Metal Optics near the Plasma Frequency*, Springer, Berlin, pp. 9, 24, 1986.
9. Pozar, D. M., *Microwave Engineering*, Wiley, New York, pp. 21–24, 1998.
10. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics* (3rd Edition), Wiley, New York, p. 147, 1994.
11. Kalluri, D. K., *Electromagnetics of Time Varying Complex Media: Frequency and Polarization Transformer* (2nd Edition), CRC Press, New York, NY, pp. 26–27, 2010.
12. Lekner, J., *Theory of Reflection, Developments in Electromagnetic Theory and Applications*, Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands 1987, Hingham, MA, pp. 169–170.
13. Otto, A., Spectroscopy of Surface Polaritons by Attenuated Total Reflection. In *Optical Properties of Solids: New Developments*, Seraphin, B. O. (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1976, p. 703.
14. Averitt, R. D., Plasmonics and metamaterials at terahertz and mid-infrared frequencies, *IEEE LEOS Plasmonics Workshop*, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, October 30, 2007.

附录11B

非均匀热磁等离子体中波的一阶耦合微分方程⊖

我们已经很熟悉非均匀温磁等离子体中波的一阶微分方程[1]。这里将把这种方法推广到非均匀热磁等离子体中波的传播情况中。采用这种形式，其方程很容易在数字计算机上应用龙格-库塔法求解。假定等离子体是电中性的且处于平衡态，并且忽略离子的运动。取$\overline{E}_0$、$\overline{H}_0$、p_0、N_0和$T_0(\overline{u}_0=0)$为等离子体的静态值，它们由位置函数给出，$\overline{E}_1$、$\overline{H}_1$、p_1、N_1、T_1和$\overline{u}_1$是等离子体中波的小时谐($e^{j\omega t}$)分量，并定义等离子体的参数为

$$X(\overline{r})=\frac{e^2N_0(\overline{r})}{\omega^2\varepsilon m},\quad Y(\overline{r})=\frac{|e|\mu}{m\omega}\overline{H}_0(\overline{r}),\quad U(\overline{r})=1-\bar{i}\frac{v(\overline{r})}{\overline{\omega}}$$

$$\delta(\overline{r})=\frac{a^2(\overline{r})}{c^2}=\frac{\mu\varepsilon\gamma KT_0(\overline{r})}{m}$$

式中，$a(\overline{r})$为电子气体中的声速，通过选取一组新的独立变量

$$\overline{E}=\overline{E}_1,\quad \overline{H}=\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}\overline{H}_1,\quad \overline{u}=\frac{\omega m}{e}\overline{u}_1,\quad p=\frac{e}{\omega m}\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}p_1 \tag{11B.1}$$

依据小信号理论，可以得到下列各式[2]，其中$k_0=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}=\omega/c$：

$$\nabla\times\overline{E}=-\mathrm{i}k_0\overline{H} \tag{11B.2a}$$

$$\nabla\times\overline{H}=\mathrm{i}k_0\overline{E}-k_0X\overline{u} \tag{11B.2b}$$

$$-\mathrm{i}UX\overline{u}=\frac{1}{k_0}\nabla p+X\overline{E}+\frac{\delta}{\gamma k_0^2}\frac{\nabla p_0}{p_0}(\nabla\cdot\overline{E})+X\overline{u}x\overline{Y} \tag{11B.2c}$$

$$-\nabla\cdot\overline{u}=\frac{\mathrm{i}k_0}{\delta X}p+\overline{u}\cdot\frac{\nabla p_0}{\gamma p_0} \tag{11B.2d}$$

对于方向余弦为S_1、S_2和C的任意极化的自由空间波，当斜入射到等离子体媒质时，可以得到下式[1]：

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\mathrm{i}k_0S_1,\quad \frac{\partial}{\partial y}=-\mathrm{i}k_0S_2 \tag{11B.3}$$

假设等离子体参数仅在z方向变化，这样就有$N_0(z)$、$T_0(z)$、$v(z)$和$H_0(z)$，此时将式(11B.3)代入式(11B.2)中，可以得到仅是z的函数的10个未知量$\overline{E}$、$\overline{H}$、$\overline{u}$和p的10个方程。从这些方程中消去E_z、H_z、u_x和u_y，可以得到下面含6个未知量的6个一阶线性耦合微分方程，其中上撇号表示关于z的导数：

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}E'_x=S_1S_2H_x+(1-S_1^2)H_y-\mathrm{i}S_1Xu_z \tag{11B.4a}$$

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}E'_y=-(1-S_2^2)H_x-S_1S_2H_y-\bar{\mathrm{i}}S_2Xu_z \tag{11B.4b}$$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}H'_x=&-\left(S_1S_2+\frac{\mathrm{i}XY_z}{U^2-Y_z^2}\right)E_x+\left(S_1^2-1+\frac{UX}{U^2-Y_z^2}\right)E_y\\&+\left(\frac{UXY_x+\mathrm{i}XY_yY_z}{U^2-Y_z^2}\right)u_z-\left(\frac{S_1Y_z+\mathrm{i}US_2}{U^2-Y_z^2}\right)p\end{aligned} \tag{11B.4c}$$

⊖ © IEEE. 经过允许转载，资料源自 *Proceedings of the IEEE*，55(9)，1620-1621，September 1967。

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}H'_y=\left(1-S_2^2-\frac{UX}{U^2-Y_z^2}\right)E_x+\left(S_1S_2-\frac{\mathrm{i}XY_z}{U^2-Y_z^2}\right)E_y$$

$$+\left(\frac{UXY_y-\mathrm{i}XY_xY_z}{U^2-Y_z^2}\right)u_z+\left(\frac{\mathrm{i}S_1U-S_2Y_z}{U^2-Y_z^2}\right)p \tag{11B. 4d}$$

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}u'_z=-\left(\frac{S_2Y_z+\mathrm{i}US_1}{U^2-Y_z^2}\right)E_x+\left(\frac{S_1Y_z-\mathrm{i}US_2}{U^2-Y_z^2}\right)E_y$$

$$+\left(\frac{S_1Y_xY_z+S_2Y_yY_z+\mathrm{i}US_1Y_y-\mathrm{i}US_2Y_x}{U^2-Y_z^2}-\frac{\mathrm{i}}{\gamma k_0}\frac{p'_0}{p_0}\right)u_z$$

$$+\frac{1}{X}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{US_1^2+US_2^2}{U_2-Y_z^2}\right)p \tag{11B. 4e}$$

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}p'=\left(\frac{UXY_y+\mathrm{i}XY_xY_z}{U^2-Y_z^2}\right)E_x+\left(\frac{\mathrm{i}XY_yY_z-UXY_x}{U^2-Y_z^2}\right)E_y-\mathrm{i}S_2XH_x+\mathrm{i}S_1XH_y$$

$$+\left[UX-X^2-UX\frac{Y_x^2+Y_y^2}{U^2-Y_z^2}+\frac{\delta X}{k_0^2\gamma^2}\left(\frac{p'_0}{p_0}\right)^2-\frac{X'\delta}{\gamma k_0^2}\frac{p'_0}{p_0}\right]u_z$$

$$+\left(\frac{S_2Y_yY_z+S_1Y_xY_z+\mathrm{i}US_2Y_x-\mathrm{i}US_1Y_y}{U^2-Y_z^2}+\frac{\mathrm{i}}{k_0\gamma}\frac{p'_0}{p_0}\right)p \tag{11B. 4f}$$

式(11B. 4)可以写成如下矩阵形式

$$\frac{-1}{\mathrm{i}k_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\boldsymbol{e}]=[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{e}] \tag{11B. 5}$$

其中，$[\boldsymbol{e}]$为一个 6×1 列矩阵，其元素为 E_x、E_y、H_x、H_y、u_z 和 p。

对于均匀等离子体这种特殊情况，$[\boldsymbol{T}]$矩阵的元素都是常数。如果令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}k_0q \tag{11B. 6a}$$

可以得到的耦合微分方程式(11B. 5)的特征方程，由如下行列式给出：

$$\det([\boldsymbol{T}]-\boldsymbol{q}[\boldsymbol{I}])=0 \tag{11B. 6b}$$

式(11B. 6b)是一个六阶代数方程，可以看到它与 Unz 先前所得到的结果[3]是一致的。

根据上述定义，可以得到[2]

$$\frac{\nabla p_0}{p_0}=\frac{\nabla X}{X}+\frac{\nabla\delta}{\delta} \tag{11B. 7}$$

在最近的一次通信中，Burman[4]建议取$\nabla p_0=0$。将 $p'_0=0$ 代入式(11B. 4)中，也可以得到与我们相同的结果。

致谢

本工作得到了美国国家科学基金的部分支持。

参考文献

1. Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1961.
2. Unz, H., Wave propagation in inhomogeneous gyrotropic warm plasmas, *Am. J. Phys.*, 35, 505–508, 1967.
3. Unz, H., Oblique wave propagation in a compressible general magneto-plasma, *Appl. Sci. Res.*, 16, 105–120, 1966.
4. Burman, R., Coupled wave equations for propagation in generally inhomogeneous compressible magnetoplasmas, *Proc. IEEE* (*Letters*), 55, 723–724, 1967.
5. Kalluri, D. and Unz, H., The first-order coupled differential equations for waves in inhomogeneous warm magnetoplasmas, reprinted from *Proceedings of the IEEE*, 55(9), pp. 1620–1621, 1967.

附录 11C

热漂移单轴电子等离子体的波导模式⊖

11C.1 引言

许多学者都研究过各向异性等离子体媒质中的导行波传播。Allis 等人[1]系统地总结了静止的冷各向异性等离子体的结果。Trivelpiece[2]考虑了漂移冷各向异性等离子体中导行慢波的传播。最近，Tuan[3]报道了填充静止单轴热等离子体波导的模式理论。Smullin、Chorney[4]和 Briggs[5]研究了波导中电子流体与冷等离子体的相互作用。

本附录研究导行波在无限大静磁场中的漂移热等离子体内的传播，重点分析波的相位特性。这一研究的动机源自于 Articolo[6]的一项研究，他将漂移热各向异性等离子体模拟成具有时域和空间色散特性的电介质，其研究基于以下几个假设：1)中性分子和正离子是冷的；2)电子是热的且具有平均温度，并且在其热运动上叠加有定向漂移；3)漂移速度和热运动速度是非相对论性的。这里再给出几条补充假设：1)漂移速度 v_0 是沿 z 轴的；2)无限大强度的静磁场也是沿 z 轴方向的；3)忽略碰撞效应。

11C.2 基本方程

让所有场量按如下规律变化：

$$F_1(x,y,z,t)=F(x,y)e^{j\omega t-\gamma z} \tag{11C.1}$$

那么，麦克斯韦方程是

$$\nabla\times\overline{H}=j\omega\varepsilon_0\,\overline{\varepsilon}\cdot\overline{E} \tag{11C.2}$$

$$\nabla\times\overline{H}=-j\omega\mu_0\,\overline{H} \tag{11C.3}$$

对于无限大静磁场和漂移速度 v_0 均沿 z 轴正方向的情况，可以证明[6]

$$\overline{\varepsilon}(\omega,\gamma)=\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+\varepsilon_3\hat{z}\hat{z} \tag{11C.4}$$

$$\varepsilon_3(\omega,\gamma)=1-\frac{\omega_p^2}{(\omega+j\gamma v_0)+a^2\gamma^2} \tag{11C.5}$$

式中，a 是声速，它表征了等离子体的平均温度，ω_p 为等离子体的频率。根据式(11C.1)、式(11C.2)和式(11C.3)，可以得到用 E_z 和 H_z 表示横向场$\overline{E}_t$ 与$\overline{H}_t$ 的表达式，以及 H_z 的波动方程。这些结果与 Tuan[3]在静止情况下得到的结果相同，这里就省略了。根据 H_z 的波动方程，可以得出结论：TE 模式不受等离子体存在的影响。

根据 E_z 的波动方程，可以得到

$$[\nabla_t^2+(\gamma^2+k_0^2)\varepsilon_3]=0 \tag{11C.6}$$

式中，$k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$ 且∇_t是∇算子的横向部分。可以证明，TM 模式的色散关系为

$$(\gamma^2+k_0^2)\varepsilon_3=\left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2 \tag{11C.7}$$

式中，ω_c 是空波导的截止频率，c 是光速。令 $\gamma=j\beta$，其中 β 是传播常数，那么式(11C.7)可以写为

⊖ 经过允许转载，资料源自 *Proceedings of the IEEE*，58(2)，pp. 278-280，February 1970。

$$(\omega^2 - \beta^2 c^2)\left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - v_0\beta)^2 + a^2\beta^2}\right] = \omega_c^2 \tag{11C. 8}$$

利用下列归一化变量，可使色散曲线 ω-β(见图 11C. 1)的讨论得到简化：

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad a = \frac{\beta c}{\omega_p}, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{\omega_p}, \quad \alpha = \frac{v_0}{c}, \quad \delta = \frac{a}{c} \tag{11C. 9}$$

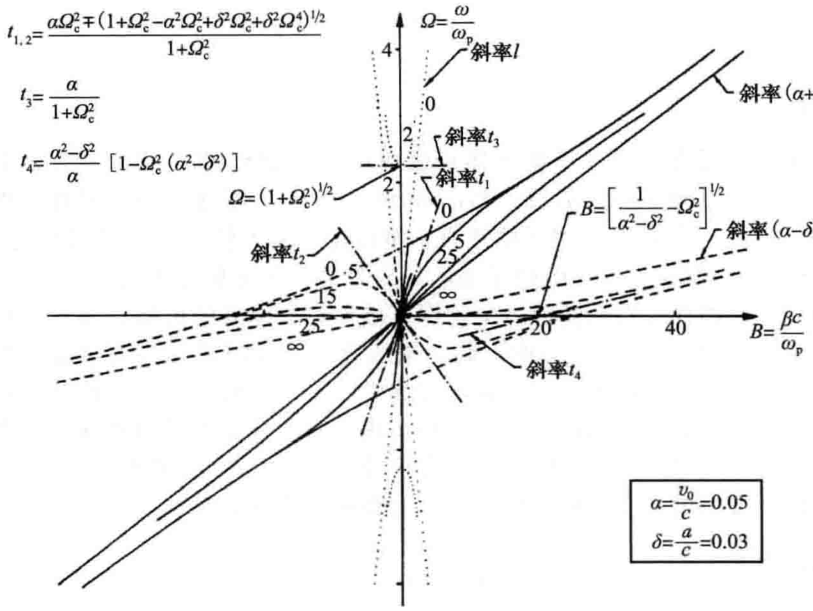


图 11C. 1 在漂移速度 v_0 大于声速 a 的条件下，热单轴漂移电子等离子体中导行波对于等离子体频率 ω_p 归一化的色散曲线 ω-β。曲线上的数字表示 Ω_c 的值，空波导的模式截止频率 ω_c 对于等离子体频率归一化(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D., Waveguide modes of a warm drifting uniaxial electron plasma, *Proceedings of the IEEE*, 58(2), pp. 278-280. © 1970 IEEE.)

将式(11C. 9)代入式(11C. 8)中，可以得到

$$(\Omega^2 - B^2)[(\Omega - \alpha B)^2 - \delta^2 B^2 - 1] = \Omega_c^2[(\Omega - \alpha B)^2 - \delta^2 B^2] \tag{11C. 10}$$

这是一个关于 Ω、B 的四次多项式方程。图 11C. 1 中每一点的径向矢量都正比于相速度[$v_0 = c(\Omega/B)$]且每一点的切线斜率都正比于群速度($v_g = c\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}B$)。$\Omega$-$B$ 图在原点处有一个二重点，且在该点处的切线为

$$t_{1,2} = \frac{\alpha\Omega_c^2 \mp \sqrt{1 + \Omega_c^2 - \alpha^2\Omega_c^2 + \delta^2\Omega_c^4}}{1 + \Omega_c^2} \tag{11C. 11}$$

在 $\Omega = \mp(1 + \Omega_c^2)^{1/2}$ 处，图形将 Ω 轴切断，该点处曲线的正切为

$$t_3 = \frac{\alpha}{1 + \Omega_c^2} \tag{11C. 12}$$

在 $B = \{[1/(\alpha^2 - \delta^2)] - \Omega_c^2\}^{1/2}$ 处，图形将 B 轴切断，该点处曲线的正切为

$$t_4 = \frac{\alpha^2 - \delta^2}{\alpha}[1 - \Omega_c^2(\alpha^2 - \delta^2)] \tag{11C. 13}$$

对于一个给定的 Ω_c，通过分析 $\Omega_c = 0$(一维情况)和 $\Omega_c = \infty$ 这两种极端情况，可以得到 Ω-B 图的一般特征。对于前一种情况，四次曲线退化为两条直线 $\Omega = \pm B$ 和双曲线 $(\Omega - \alpha B)^2 - \delta^2 B^2 - 1 = 0$。对于后一种情况($\Omega_c = \infty$)，曲线退化为两条直线 $\Omega = (\alpha \mp \delta)B$。对于其他的 Ω_c 值，四次曲线的各个分支将被限定在由两种极端情况的曲线分支所形成的分

隔空间中。图 11C.1 和图 11C.2 说明了这一点。在这些图形中，我们可以认出[2,6]“快波”，其相速度 $v_{0_1}>c(\alpha-\delta)$，同样可以认出“慢波”，其相速度 $v_{0_2}<c(\alpha-\delta)$，以及“波导波”。在图 11C.1 中，给出了 $\alpha=0.05$ 和 $\delta=0.03$ 时的 Ω-B 图，其中参数是 Ω_c。对于 $\omega<\omega_p$，其中的一条曲线(例如，标有 $\Omega_c=5$ 的虚线)表明存在着反向行波(具有正群速度与负相速度)和一个驻波($v_g=0$)。然而，当 $\Omega_c\geqslant(\alpha^2-\delta^2)^{-1/2}$ 时(例如，参见图 11C.1 中标有 $\Omega_c=25$的虚线)，这些波都消失了。图 11C.2 所示为 $\alpha<\delta$($\alpha=0.03$，$\delta=0.05$)时的 Ω-B 图。在图 11C.3中，非常详细地示出了 $\alpha=0.05$，$\delta=0.03$ 且 $\Omega_c=0.1$ 时波导波的相位特

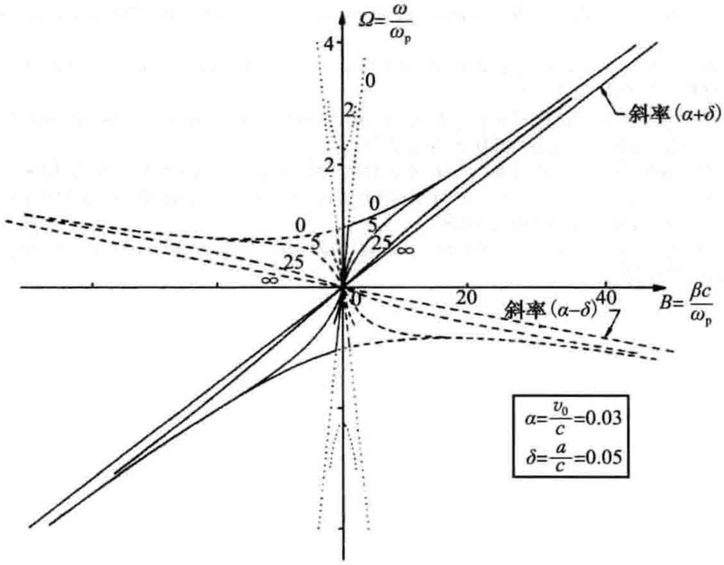


图 11C.2　在漂移速度 v_0 小于声速 a 的条件下，热单轴漂移电子等离子体中导行波的色散曲线 ω-β，其中相对等离子体频率 ω_p 进行了归一化。曲线上的数字与图 11C.1 中的数字相同(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D.，Waveguide modes of a warm drifting uniaxial electron plasma，*Proceedings of the IEEE*，58(2)，pp. 278-280. © 1970 IEEE.)

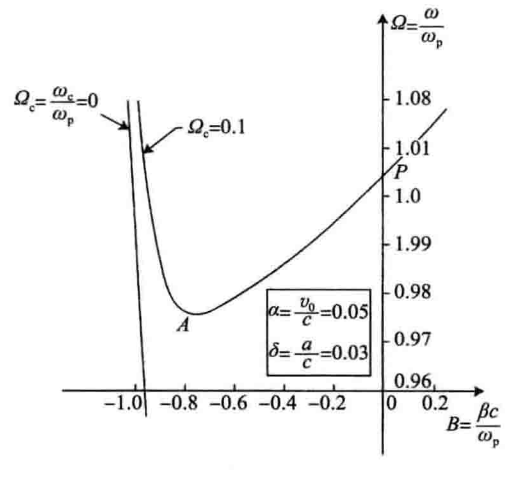


图 11C.3　在 $\Omega=[1+(\omega_c/\omega_p)^2]^{1/2}$ 点附近，热单轴漂移电子等离子体中“波导波”的相位特性，其中 ω_c 为空波导的模式截止频率(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D.，Waveguide modes of a warm drifting uniaxial electron plasma，*Proceedings of the IEEE*，58(2)，pp. 278-280. © 1970 IEEE.)

性。从这个图中可以看到，当波导波的前向行波的低频截止频率给定为$(1+\Omega_c^2)^{1/2}$(图 11C.3 中的 P 点)时，在低于截止频率$(1+\Omega_c^2)^{1/2}$的一个窄频带内还存在着反向行波(分支 AP)。随着 Ω_c 减小，该频带的宽度变宽，其最大可达 $\alpha/(1+\alpha)$。在群速度 $v_g=ct_3$ 处，波导波会发生从前向行波到反向行波的转变。

参考文献

1. Allis, W. P., Buchbaum, S. J., and Bers, A., *Waves in Anisotropic Plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
2. Trivelpiece, A. W., *Slow-Wave Propagation in Plasma Waveguides*, San Francisco Press, San Francisco, CA, 1967.
3. Tuan, H. S., Mode theory of waveguide filled with warm uniaxial plasma, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, MTT-17, 134–137, 1969.
4. Smullin, L. D. and Chorney, P., Propagation in ion loaded waveguide, *Proc. Symp. Electron. Waveguides*, Polytechnic Press, Brooklyn, NY, 1958.
5. Briggs, R. J., *Electron–Stream Interaction with Plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
6. Articolo, G. A., Derivation of an equivalent dielectric tensor for a warm, drifting, lossy, electron plasma, *J. Appl. Phys.*, 40, 1896–1902, 1969.
7. Kalluri, D., Waveguide modes of a warm drifting uniaxial electron plasma, *Proceedings of the IEEE*, 58(2), pp. 278–280, 1970.

附录12A
法拉第旋转与自然旋转

式(12.31)给出了在磁等离子体媒质中传播时线性极化波的 ψ 角的表达式。本附录将论述这个角度是如何得到的，也将说明法拉第旋转在测量电离层中的总电子量方面的应用[1]。

这种旋转也会出现在 9.3 节讨论过的自然旋转或光旋性的手性介质中。然而，法拉第旋转与自然旋转之间存在着重要的差别。本附录也会对这一点做出一些解释(见图 12A.1)。

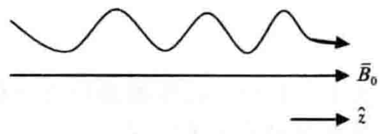


图 12A.1　纵向传播的定义

12A.1　法拉第旋转

在 $z=0$ 处，考虑沿 z 轴方向传播的线性极化波的电场，其表达式为

$$\tilde{\bar{E}}|_{z=0} = \hat{x}E_0 e^{-j\beta z}|_{z=0} = E_0\hat{x} \tag{12A.1}$$

这是一个沿 x 轴极化的(线性)波，它可以写为 R 波和 L 波的叠加：

$$\tilde{\bar{E}}|_{z=0} = \frac{E_0}{2}(\hat{x} - \mathrm{j}\,\hat{y}) + \frac{E_0}{2}(\hat{x} + \mathrm{j}\,\hat{y}) \tag{12A.2}$$

由于波沿 z 轴正方向传播，所以在 $z=d$ 处的波可以写为

$$\tilde{\bar{E}}|_{z=d} = \frac{E_0}{2}(\hat{x} - \mathrm{j}\,\hat{y})e^{-jk_{pR}d} + \frac{E_0}{2}(\hat{x} + \mathrm{j}\,\hat{y})e^{-jk_{pL}d} \tag{12A.3}$$

式中

$$k_{pR} = k_0\sqrt{\varepsilon_{pR}} \tag{12A.4}$$

$$k_{pL} = k_0\sqrt{\varepsilon_{pL}} \tag{12A.5}$$

$$\varepsilon_{pR} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_b)} \tag{12A.6}$$

$$\varepsilon_{pL} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_b)} \tag{12A.7}$$

式(12A.3)可以写为(见图 12A.2)

$$\tilde{\bar{E}} = E_0 e^{-j[k_{pR}+k_{pL}]d}\left\{\cos\left[\frac{(k_{pR} - k_{pL})d}{2}\right]\hat{x} - \sin\left[\frac{(k_{pR} - k_{pL})d}{2}\right]\hat{y}\right\} \tag{12A.8}$$

这是一个线性极化波，但它不再是沿 x 轴极化的。电场的轨迹是一条直线，但是在角度 ψ_F 处的直线可以表示为(见图 12A.3)：

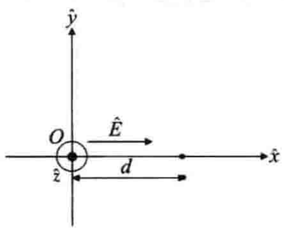


图 12A.2　$z=0$ 处的电场

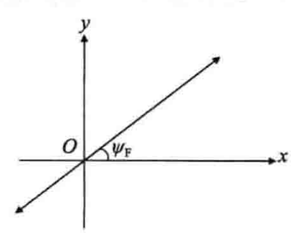


图 12A.3　$z=d$ 处的电场

$$\psi_F = \arctan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = -\arctan^{-1}\left\{\frac{\tan[k_{pR}-k_{pL}]d}{2}\right\}$$

$$\psi_F = \frac{(k_{pL}-k_{pR})d}{2} \tag{12A. 9}$$

根据式(12A. 4)至式(12A. 7)以及式(12A. 9)，并且利用 ω_p 和 ω_b 的定义，可以得到

$$\psi_F = \frac{q^3 B_0}{2m^2 \varepsilon_0 \omega^2 c} N_0 d \tag{12A. 10}$$

式中，$\overline{L}$ 和$\overline{H}$分别是电子电荷的绝对值和电子的质量，$\overline{m}=\gamma_m \overline{L}$为电子密度。如果电子密度随空间距离变化，且 B_0 近似为常数，则净旋转角度为：

$$\psi_F = \frac{q^3 B_0}{2m^2 \varepsilon_0 \omega^2 c}\int N_0(z)\mathrm{d}z$$

式中，积分沿波传播路径进行积分。利用卫星-地球通信，通过测量 ψ_F 可以测量在 $1\mathrm{m}^2$ 柱形体内的总电子电量。

12A. 2 自然旋转和比较

注意，手性介质也会引起线性极化波的旋转。在计算角 $\psi=\psi_c$ 时，我们使用 k_{cL} 和 k_{cR} 而不是 k_{pR} 和 k_{pL}。参见附录 9B。

然而，对于自然旋光与法拉第旋转两种情况来说，在"往返"计算中的旋转角存在一个重要的差别。

通过观察(图 12A. 4)，可以计算出返回路径。

我们先考虑法拉第旋转。

对于一个反向行波，B_0 的方向与波的传播方向相差 180°。在式(12A. 6)和式(12A. 7)中用$(-\omega_b)$替换 ω_b，可以得到波数 k_{pR} 和 k_{pL}。这等相当于在式(12A. 9)中进行替换

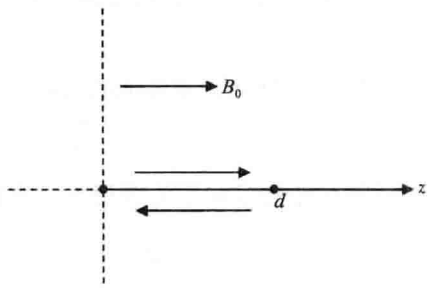


图 12A. 4 $\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t}=\overline{T}$处的电场

$$k_{pL} \rightarrow k_{pR}$$

和

$$k_{pR} \rightarrow k_{pL}$$

同样，由于起始点的 z 坐标与终点的 z 坐标不同，终点的 z 坐标为 $-d$，因此需要在式(12A. 9)中做替换 $d \rightarrow -d$。

因此，ψ_F 角的值保持不变。这样，往返路径的旋转角为单程路径的旋转角的两倍。

另一方面，对于手性介质，k_{cL} 和 k_{cR} 不变，但必须用 $-d$ 来替换 d。因此，返回路径的旋转角与单程路径的旋转角相等，但符号相反。往返路径的旋转角为 0。

参考文献

1. Inan, S. I. and Inan, S. A., Electromagnetic Waves, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

附录12B
铁氧体和磁导率张量

第 12 章利用介电常数为张量的各向异性电介质模型，讨论了磁化等离子体的各向异性特性。在外部静磁场存在的条件下，铁氧体的行为类似于一种磁导率为张量的各向异性磁性材料。这种材料在微波工程中有广泛的应用[1]。这里简要讨论磁导率张量。

由于电子自旋转产生的磁偶极矩 $\overline{m}$，铁氧体主要呈磁性。在外磁场$\overline{H}$存在的条件下，施加在电子上的转矩 $\overline{T}$ 为

$$\overline{T} = \mu_0\, \overline{m} \times \overline{H} \tag{12B.1}$$

机械角运动的力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{L}}{\mathrm{d}t} = \overline{T} \tag{12B.2}$$

式中，$\overline{L}$是角动量。

电子围绕$\overline{H}$作回旋运动。机械回旋与电子自旋运动之间的差别是，电子自旋运动的转矩来源于磁场力而不是机械力。在式(12B.1)中，磁偶极矩由下式给出

$$\overline{m} = \gamma_{\mathrm{m}}\, \overline{L} \tag{12B.3}$$

式中

$$\gamma_{\mathrm{m}} = \frac{q}{m_{\mathrm{e}}} \tag{12B.4}$$

m_{e} 为电子质量，γ_{m} 为回旋比($=1.76\times10^{11}\ \mathrm{rad/sT}$)。

根据式(12B.1)至式(12B.3)，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{m}}{\mathrm{d}t} = \gamma_{\mathrm{m}}\mu_0\, \overline{m} \times \overline{H} \tag{12B.5}$$

式(12B.5)描述了(拉莫)旋进运动，其频率 ω_0(拉莫频率)为：

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma_{\mathrm{m}} \left|\overline{H}\right| \tag{12B.6}$$

如果单位体积内有 N 个电子，每个电子自旋产生的磁偶极矩为$\overline{m}$，则磁化强度矢量$\overline{M}$为

$$\overline{M} = N\,\overline{m} \tag{12B.7}$$

现在，式(12B.5)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{M}}{\mathrm{d}t} = \gamma_{\mathrm{m}}\mu_0\, \overline{M} \times \overline{H} \tag{12B.8}$$

当$\overline{M}$以频率 ω 做正弦变化时，有

$$\widetilde{\overline{M}} = \frac{\gamma_{\mathrm{m}}\mu_0}{\mathrm{j}\omega}\, \widetilde{\overline{M}} \times \overline{H} \tag{12B.9}$$

式(12B.9)说明了磁导率为各向异性的起源。假设外磁场为

$$\overline{H}_0 = \hat{z}\, H_0 \tag{12B.10}$$

并且忽略在 z 轴方向上的小信号 H_1。根据式(12B.9)，可以得到$\overline{M}$的小信号值与 q' 和 H_y 的小信号值之间的关系如下：

$$\overline{B} = \mu_0(\overline{H}_1 + \overline{M}_1) \tag{12B.11}$$

现在，可以写出

$$\overline{B} = \overline{\mu}_{\mathrm{eff}} \cdot \overline{H} \tag{12B.12}$$

式中

$$\overline{\mu}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{eff}}^{11} & \mu_{\text{eff}}^{12} & 0 \\ \mu_{\text{eff}}^{21} & \mu_{\text{eff}}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \tag{12B.13}$$

其中，矩阵中的各个元素分别为

$$\mu_{\text{eff}}^{11} = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_{\text{M}}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \mu_{\text{eff}}^{22} \tag{12B.14a}$$

$$\mu_{\text{eff}}^{12} = (\mu_{\text{eff}}^{21})^* = \mathrm{j}\mu_0 \frac{\omega_{\text{M}} \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{12B.14b}$$

$$\omega_{\text{M}} = \mu_0 \gamma_{\text{m}} M_0 \tag{12B.14c}$$

如果已知铁氧体材料的 μ_r，则有

$$M_0 = \mu_0 (\mu_r - 1) H_0 \tag{12B.14d}$$

看上去，式(12B.13)与12章讨论过的介电张量 $\overline{\boldsymbol{K}}$ 相类似。因此，可以预计到会出现法拉第旋转现象。Sohoo[2]讨论了铁氧体材料在微波技术和工程中的许多应用问题。

参考文献

1. Inan, S. I. and Inan, S. A., *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall, New Jersey, NJ, 2000.
2. Sohoo, R. F., *Microwave Magnetics*, Harper and Row, New York, NY, 1985.

附录 14A 电磁波与运动有界等离子体的相互作用

Dikshitulu Kalluri 和 R. K. Shrivastava ⊖

14A.1 引言

近来有关电磁波与有界相对论性等离子体之间相互作用的研究一般都忽略了斜入射的情况，其结果都仅局限于垂直入射的情况。在之前的一篇论文中[1]，我们研究了电磁波斜入射到一个相对运动的单轴等离子体平板的反射和透射问题，揭示了随归一化平板运动速度变化时反射系数产生振荡的性质。如果在相对于平板静止的参考系中求解该问题，我们会发现当平板向远离入射波方向运动时，则从观察者的参考系中来看，对于某一个临界平板速度，反射角将翻转 90°，这样就解释了在该速度下所出现的 0 反射功率现象。这与 Yeh[2] 发现的有关电介质半空间沿垂直于分界面方向运动的结果相吻合。然而，他观察到的超过这个临界点时反射波是倏逝波的结果似乎是不正确的。

本章旨在揭示当平板速度超过上述临界速度时所发生的有趣现象。我们得到了一般性的结论，当一平面波斜入射到沿垂直于分界面方向运动的媒质上时，这些结论都是成立的。

对于电磁波斜入射到各向同性等离子体平板的情况，我们也给出了功率反射系数的最大值和最小值随归一化平板速度变化的函数。这里考虑了波的平行极化和垂直极化两种情况。

14A.2 基本方程

在相对于运动等离子体平板是静止的坐标系 Σ' 中，用带撇的量表示被测试的量，而在相对于观察者是静止的坐标系 Σ 中用不带撇的量表示相应的测试量。假设等离子体中的场量具有如下指数变化形式

$$\Psi'_{\mathrm{p}} = \exp\{[\omega' t' - k'_0(S'x' + q'z')]\} \tag{14A.1}$$

式中

$$\omega' = [\gamma(1 - C\beta)]\omega = p\omega \tag{14A.2}$$

$$S' = \sin\theta' = \frac{S}{p} \tag{14A.3}$$

利用等离子体中的麦克斯韦方程，可以得到色散方程的根 q' 为

$$q' = \pm(\varepsilon' - S'^2)^{1/2} = \pm\left[\frac{(p^2 - S^2)\Omega^2 - 1}{p^2\Omega^2}\right]^{1/2} \tag{14A.4}$$

在上面各式中，$S=\sin\theta$，$C=\cos\theta$（θ 是入射角），$\Omega=\omega/\omega_{\mathrm{p}}$ 且 $\varepsilon'=1-(\omega_{\mathrm{p}}/\omega')^2=1-1/p^2\Omega^2$。

其他符号的意义与其通常的意义相同[1]。参数 p 的重要意义在于它将入射波频率变换

为等离子体的静止参考系中的频率。参考文献[1]给出了带撇的量和不带撇的量之间的关系。

在 q' 为实数的范围内，功率反射系数和透射系数可写为下式的形式[1]：

$$\rho = \frac{\alpha}{1 + B\csc^2 A}, \quad \tau = \frac{1}{1 + (1/B)\sin^2 A} \tag{14A.5a}$$

而在 q' 为虚数的范围内，它可以写为，

$$\rho = \frac{\alpha}{1 + B\operatorname{csch}^2 |A|}, \quad \tau = \frac{1}{1 + (1/B)\sinh^2 A} \tag{14A.5b}$$

其中，对于两种不同的极化情况，下面分别给出了 α、A 和 B 的表达式。

平行极化情况：

$$\alpha_{\parallel} = \beta'\left(\frac{C-\beta}{C+\beta\beta'}\right)^2 = \frac{(1+\beta^2-2\beta C)(1+\beta^2-2\beta/C)}{(1-\beta^2)^2} \tag{14A.6a}$$

$$A_{\parallel} = k'_0 q' d' = 2\pi[(p^2 - S^2)\Omega^2 - 1]^{1/2} d'_{\mathrm{p}} \tag{14A.6b}$$

$$B_{\parallel} = \left(\frac{2q'\varepsilon' C'}{q'^2 - \varepsilon'^2 C'^2}\right)^2$$

$$= \frac{4p^4\Omega^2(p^2-S^2)(p^2\Omega^2-1)^2(\overline{p^2-S^2}\Omega^2-1)}{[(p^2-S^2)(2p^2\Omega^2-1)-p^4\Omega^2]^2} \tag{14A.6c}$$

垂直极化情况：

$$\alpha_{\perp} = \frac{1}{\beta'}\left(\frac{1-\beta C}{1+\beta C/\beta'}\right)^2 = \frac{(1+\beta^2-2\beta C)(1+\beta^2-2\beta/C)}{(1-\beta^2)^2} \tag{14A.7a}$$

$$A_{\perp} = 2\pi[(p^2-S^2)\Omega^2-1]^{1/2} d'_{\mathrm{p}} \tag{14A.7b}$$

$$B_{\perp} = \left(\frac{2q'C'}{q'^2 - C'^2}\right)^2$$

$$= 4\Omega^2(p^2-S^2)(\overline{p^2-S^2}\Omega^2-1) \tag{14A.7c}$$

在上述各个表达式中，有

$$C' = \cos\theta' = \frac{C-\beta}{1-C\beta} \tag{14A.7d}$$

$$\beta' = \frac{1+\beta^2-2\beta C}{1+\beta^2-2\dfrac{\beta}{C}} \tag{14A.7e}$$

且 $d'_{\mathrm{p}} = d'/\lambda_{\mathrm{p}}$，$\lambda_{\mathrm{p}}$ 为对应于等离子体频率的自由空间中的波长，d' 为等离子体平板的厚度。

14A.3 数值结果与讨论

功率反射系数随归一化波频率(Ω)的变化关系曲线与参考文献[3]中给出的曲线在形状上相似，因此本附录省略了该曲线。

按照参考文献[1]中所列出的步骤，可以导出功率反射系数随归一化平板速度(β)变化的函数，本附录也列出了在振荡区间内最大值和最小值所满足的方程。

尽管对于垂直入射这种极限情况，两种波极化情况得到的结果相同[4,5]，但是对于斜入射情况，结果并非如此，因此我们给出了两种极化情况的数值结果，取参数 $C=0.5$，$d'_{\mathrm{p}}=1.0$ 且 $\Omega=2.0$(见图 14A.1 和图 14A.2)。可以看出，平行极化的振荡要比垂直极化的振荡衰减得更快一些。β 大于 $\beta=(1-S)/C$ 的曲线用虚线画出，为了说明在这个范围内反射波是朝向平板传播这一值得注意的事实。这一点可以解释如下。

从物理意义上来说，式(14A.5)中的因子 α 是由运动镜面所反射的功率，而平板所反射

的功率等于因子 α 与一个适当项的乘积，这一适当项考虑到等离子体是部分导电的且在平行边界之间会引起内反射波的干涉。α 与 β 的关系曲线如图 14A.3 所示(同时给出了 θ_r 和 θ' 随 β 的变化曲线)，其中在 β 大于 $\beta=(1-S)/C$ 时 α 为负值的部分用虚线表示。在 $\beta=(1-S)/C$ 时，α 等于 0，这是因为在这个 β 值时，在 Σ 坐标系中所观察到的反射角 $\theta_r[\arccos(C/\beta')]$ 等于 q'。可以看到，在 $(1-S)/C<\beta<C$ 范围内，$\theta_r>90°$，因此 α 为负值。这意味着在 β 的这个范围内，反射波实际上是朝向等离子体媒质运动的。更为有趣的是，注意，在 $C<\beta<1$ 时，α 仍表示运动镜面的反射功率。然而，在这个范围内，当来自运动镜面下方的入射波永远赶不上运动镜面时，运动镜面却可以与在运动镜面上已经存在的平面波发生相互作用。毫无疑问，这个平面波会离开镜面，但是由于镜面运动速度大于入射波相速度的垂直分量，可以这样说，镜面会撞击自由空间中的波。

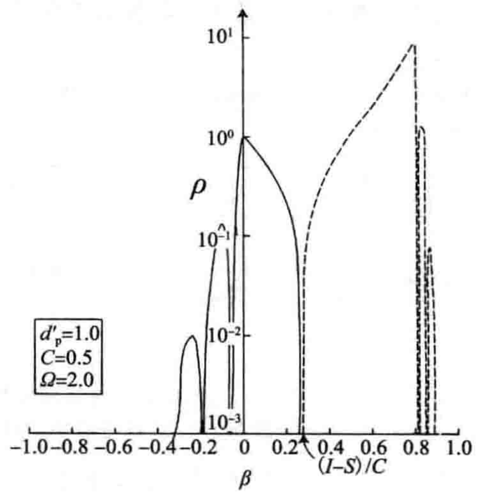


图 14A.1 平行极化波的功率反射系数 ρ 随归一化平板速度 β 变化的曲线。大于临界平板速度 $[\beta=(1-S)/C]$ 的曲线表示 $-\rho$ 并用虚线表示。重点是当 $p>(1-S)/C$ 时反射波沿 z 轴正方向传播(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D., and Shrivastava, R. K., Electromagnetic wave interaction with moving bounded plasma, *J. Appl. Phys.*, 44, 4518-4521, 1973. Copyright (1973), American Institute of Physics.)

在图 14A.4 与图 14A.5 中，定性地解释了在整个 $-1<\beta<1$ 范围内入射波与等离子体平板间的相互作用。

图 14A.4a 描绘了在 $-1<\beta<(1-S)/C$ 范围内的情况。入射波(I 波)和反射波(R 波)位于平板下方，反射波向远离平板的方向传播。正如之前我们注意到的(图 14A.4b)，反射角 θ_r 连续不断地增大并且在 $\beta=(1-S)/C$

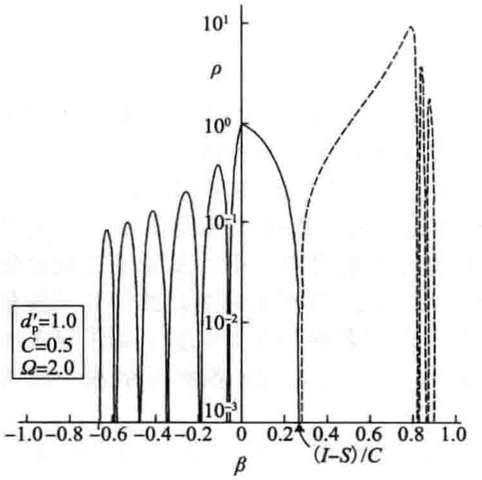


图 14A.2 垂直极化波的 ρ 与 β 的关系曲线。与平行极化情况曲线中的快速衰减振荡相比，应注意此时的慢振荡

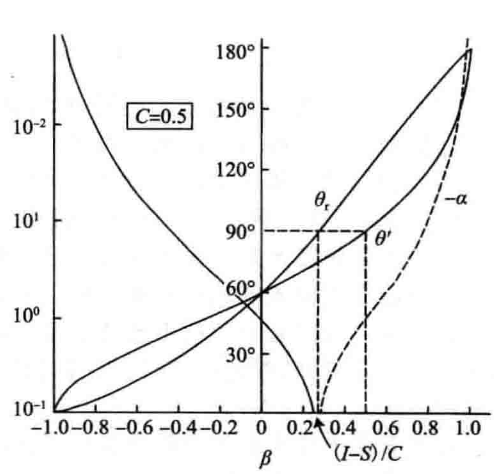


图 14A.3 Σ' 中的入射角 θ' 和 Σ 中观察到的反射角 θ_r 随 β 变化的函数关系。同时给出了 α 与 β 的关系曲线。α 是由运动镜面所反射的功率的一个因子

处变为 90°。透射波(T 波)在平板上方。其中同时描绘了在参考系Σ'中所看到的情况。在该β值处，在坐标系Σ中反射波似乎沿着与平板平行的方向传播，该波的坡印亭矢量的垂直分量等于 0。

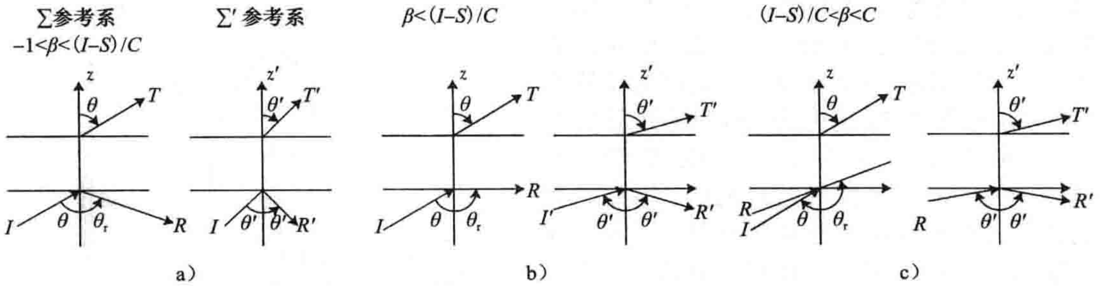


图 14A.4 在$-1<\beta<C$范围内，定性解释波与等离子体平板相互作用的几何图形。清楚地描绘了各自由空间波在Σ和Σ'参考系中的取向

在$(1-S)/C<\beta<C$范围内，R 波仍然是位于平板下方，因为它的相速度的垂直分量小于平板运动速度，但波是朝向平板方向传播的。因此，Yeh 得到的因为$\theta_r>90°$，所以反射波是倏逝波这一观察结论是错误的。

当$\beta=C$时，入射波相速度的垂直分量等于平板运动速度，像在坐标系Σ'中所看到的(如图 14A.5a)，波是沿着平行于平板分界面方向传播的。因此，当$\beta=C$时，波与平板之间没有相互作用。

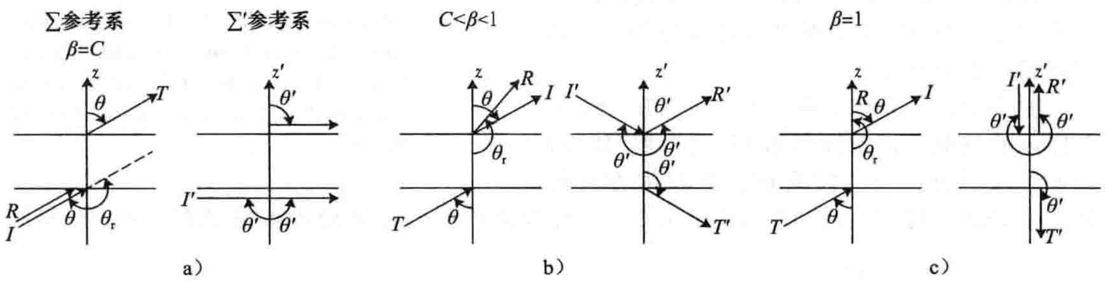


图 14A.5 在$-1<\beta<C$范围内解释波与等离子体平板相互作用的几何图形

当$C<\beta<1$时，参考系Σ与Σ'中的情况如图 14A.5b 所示。I 波和 R 波都位于平板上方，它们向远离平板方向传播。当然，T 波位于平板下方，朝向平板传播。

正如我们已经知道的，仅当$\beta=0$时，反射功率(ρ，R 波中的功率)和透射功率(τ，T 波中的功率)的总和等于入射功率，而当β取其他值时，功率守恒关系要求新产生波的时间平均功率所超过入射功率的部分必须是来自于所储存能量的减小率以及为了克服辐射压力而维持运动所输入的机械功率。利用 Daly 和 Gruenberg[6] 所指出的更详细的有关能量平衡分析方法，我们验证了低于或高于电介质平板分界面的各种自由空间波(如图 14A.4 和 14A.5 所给出的)的假定的方向，这种验证是充分的，因为给定波的取向不依赖于所考虑媒质的性质。

对于等离子体平板的类似分析也正在进行中，这需要对储存能量和压力张量的表达式作适当的修正㊀，以后会讨论。

㊀ 经过许可转载，资料源自 *J. Appl. Phys.*，44(10)，1973，4518-4521。

附录

在 ρ/α 中，p 的最小值为：

$$p_{\min,n}=\left[\left(S^2+\frac{1}{\Omega^2}\right)+\frac{n^2}{16\Omega^2 d'^2_{\mathrm{p}}}\right]^{1/2}_{(n\text{为偶数})} \tag{14A.8}$$

在 ρ/α 中，p 的最大值满足超越方程 $\tan A=f_{\mathrm{p}}A$，其中

$$(f_{\mathrm{p}})_{\parallel}=\frac{K_1K_2}{K_1[K_2+K_3+K_5(p^2p^2\Omega^2-1+2p^2\Omega^2\overline{p^2-S^2})]-p^2K_3K_4}$$

$$K_1=2(p^2-S^2)p^2\Omega^2-p^4\Omega^2-(p^2-S^2)$$

$$K_2=p^2\Omega^2(p^2-S^2)(p^2\Omega^2-1)$$

$$K_3=2(p^2-S^2)(p^2\Omega^2-1)(\overline{p^2-S^2}\Omega^2-1)$$

$$K_4=2(p^2-S^2)\Omega^2-1$$

$$K_5=(p^2-S^2)\Omega^2-1$$

$$(f_{\mathrm{p}})_{\perp}=\frac{(p^2-S^2)\Omega^2-1}{2(p^2-S^2)\Omega^2-1} \tag{14A.9}$$

参考文献

1. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *IEEE Trans. Antennas Propag.*, AP-21, 63, 1973.
2. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 38, 5194, 1967.
3. Kalluri, D., and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.*, to be published.
4. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 37, 3079, 1966.
5. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 38, 2871, 1967.
6. Daly, P. and Gruenberg, H., *J. Appl. Phys.*, 38, 4486, 1967.
7. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Electromagnetic wave interaction with moving bounded plasmas, *J. Appl. Phys.*, 44(10), 4518–4521, 1973.

附录14B

平面电磁波斜入射到运动媒质时所产生的辐射压力⊖

Dikshitulu K. Kalluri 和 R. K. Shrivastava

在电磁场理论中，作用在电介质内一个给定体积元上的力可以用该体积元表面上的电场和磁场来表示，与之有关的表面应力张量的概念已经为人们所熟悉[1]。在相对论电动力学中，计算施加于两种媒质之间的运动分界面上的辐射压力是一个很有趣的研究专题。该研究的动机来源于解释由一个垂直于分界面运动的媒质所产生的过剩的辐射功率。Daly 和 Gruenberg[2]在研究由运动媒质所反射的垂直极化平面波的能量平衡问题时，已经考虑了这个问题。后来，Yeh[3]在研究运动电介质媒质的布儒斯特角时也涉及了这一研究专题[4]。

在整个速度范围内，本附录详细考虑了有关平行或垂直极化平面电磁波(xz 平面是入射面)斜入射到一个运动导电半空间所产生的辐射压力，以及为了维持系统匀速运动所需提供的机械功率(P_m)。通过包括大于临界媒质速度[4] $\beta=C(C=\cos\theta$，θ 为入射角)的速度范围，可以把 Yeh[3]的研究结果扩展到电介质媒质的类似研究中。所使用符号的意义与它们通常所表达的意义相同。

利用麦克斯韦应力张量[5]的概念，按照 Daly 和 Gruenberg[2]所给出的步骤，可以得到在分界面上的单位面积所受的力为

$$(F_z)_{\parallel}=\varepsilon_0(E_x^{\mathrm{I}})^2\gamma^2\left(1-\frac{\beta}{C}\right)^2 \tag{14B.1a}$$

且

$$(F_z)_{\perp}=\varepsilon_0(E_x^{\mathrm{I}})^2\gamma^2(C-\beta)^2 \tag{14B.1b}$$

下标 $\parallel$ 和 $\perp$ 表示所涉及的波极化的类型。

此时，外界提供给导体用于克服这个辐射压力的机械功率由下式给出

$$P_m=(-F_z)v=S_z^{\mathrm{I}}\left[-\frac{2\beta}{C}\gamma^2(C-\beta)^2\right] \tag{14B.2}$$

式中，S_z^{I} 是与入射波有关的坡印亭矢量的垂直分量，入射波由下式给出

$$(S_z^{\mathrm{I}})_{\parallel}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0(E_x^{\mathrm{I}})^2c}{C} \tag{14B.3a}$$

且

$$(S_z^{\mathrm{I}})_{\perp}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0(E_y^{\mathrm{I}})^2c}{C} \tag{14B.3b}$$

从式(14B.1)中可以清楚地看到，电磁力随 C 的增大而增大，并且在垂直入射时达到最大值。进一步看到，对于两种类型的波极化来说，归一化机械功率 P_m/S_z^{I} 是相同的。图 14B.1所示为由外界所提供的该归一化机械功率随媒质速度变化的曲线。可以看到，外界提供的功率在 $-1<\beta<0$ 范围内是正的。当导体朝向波运动时，作用在导体上的电磁力为压缩力，这样就必须给导体提供机械功率以维持其匀速运动。外界提供的这个功率将以辐射的形式出现，也即是说，反射功率大于入射功率。对于正的 β，即导体背离入射波运

动的情况，我们应考虑三个范围。在第一个范围 $0<\beta<(1-S)/C$ 内，场对导体不做功，这样 P_m 是负的。单位面积上机械功率的归一化变化率的大小在增大并达到一个最大值。由于场所做的功和在系统内储存能量的增加，所有反射功率小于入射功率，即功率反射系数小于 1。最终，反射系数在 $\beta=(1-S)/C$ 处减小为 0。在第二个范围 $(1-S)/C<\beta<C$ 内，反射波朝向导体传播[4]且反射系数一直小于 1。在 $\beta=C$ 时，导体与波之间没有相互作用，这样 P_m 等于 0。最后一个范围 $C<\beta<1$ 对应于导体撞击前面已存在的一个平面波的问题，除符号的改变外，P_m 随 β 的变化与在 $-1<\beta<0$ 范围内的情况类似。根据参考文献[4]中的图 5 所描绘的自由空间波的取向，取负号的原因就变得很清楚了。

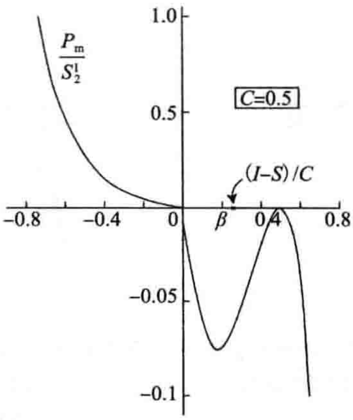


图 14B.1 对于运动导电半空间情况，由外部提供的归一化机械功率(P_m/S_z^I)与归一化速度(β)的函数关系曲线。注意，纵坐标的单位是不均匀的。(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D., and Shrivastava, R. K., Radiation pressure due to plane electromagnetic waves obliquely incident on moving media, *J. Appl. Phys.*, 49, 3584-3586, 1978. Copyright(1978), American Institute of Physics.)

假设电介质媒质中的场量(Σ')具有下式的指数变化形式

$$\Psi'_p = \exp\{j[\omega' t' - k'_0(S' x' + q' z')]\} \tag{14B.4a}$$

可以通过求解坐标系 Σ' 中的麦克斯韦方程组这一常规方法得到特征根 q'：

$$q' = (\varepsilon' - S'^2)^{1/2} \tag{14B.4b}$$

我们可以根据 Daly 和 Gruenberg[2] 的方法来计算施加于运动电介质分界面上的辐射压力。或者也可以，在运动媒质(Σ')的静止坐标系中先计算出辐射压力，然后根据下式的变换关系将其变换到实验室坐标系[3](Σ)中，

$$F_z = F'_z \tag{14B.5}$$

这样，

$$(F_z)_{\parallel} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E_x^I)^2 \gamma^2 \left(1-\frac{\beta}{C}\right)^2 \left[1+\left(\frac{q'-\varepsilon' C'}{q'+\varepsilon' C'}\right)^2 - \frac{4\varepsilon' q'^2}{(q'+\varepsilon' C')^2}\right] \tag{14B.6}$$

最终，得到

$$(P_m)_{\parallel} = -S_z^I\left[\beta C\left(1-\frac{\beta}{C}\right)^2 \gamma^2 \left(\frac{q'^2+\varepsilon'^2 C'^2 - 2\varepsilon' q'^2}{(q'+\varepsilon' C')^2}\right)\right] \tag{14B.7}$$

对于垂直极化波，可以得到

$$(P_m)_{\perp} = S_z^I\left[2\beta C\left(1-\frac{\beta}{C}\right)^2 \gamma^2 \frac{\varepsilon'-1}{(q'+C')^2}\right] \tag{14B.8}$$

我们得到的关于垂直极化的结果(式(14B.8))与 Daly 和 Gruenberg 使用另一种方法所得到的结果相一致。令他们所得到的表达式中的 Q 等于 $(1-\beta C)q'$，就可以验证这一点。

图 14B. 2 所示为 $e'=2$ 时两种波极化的归一化 P_m 随 β 的变化的曲线。除符号的改变外，这些曲线的整体特征与运动导体情况中的曲线相同。这是因为作用在导体和电介质上的力的方向相反[2]。在图 14B. 3 中已画出了这一点，其中给出了 cF/S_z^I 随 β 变化的曲线。辐射压推动导体表面，因而它对电介质有吸吮作用。从图 14B. 3 中可以得到的另一个结论是：垂直极化波在电介质上产生的辐射压力小于平行极化波在电介质上产生的辐射压力。

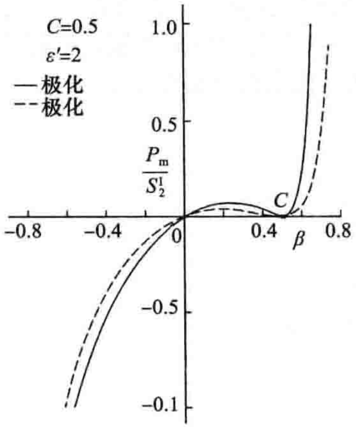


图 14B. 2　对于运动电介质半空间，由外部提供的归一化机械功率随 β 变化的曲线

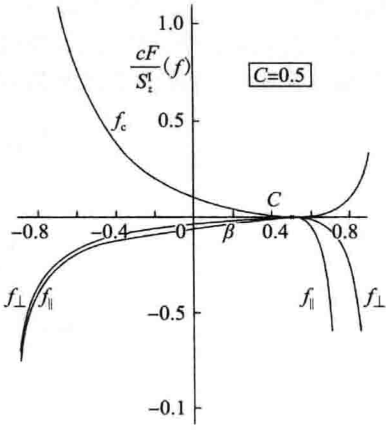


图 14B. 3　运动导体（f_c）和运动电介质（$f_{\parallel}$、$f_{\perp}$）的归一化辐射压力 $f(=cF/S_z^I)$ 与 β 的函数关系曲线。下标 $\parallel$ 和 $\perp$ 表示波的极化类型。作用在导体和电介质上的力是方向相反的

参考文献

1. Panofsky, W. K. H. and Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
2. Daly, P. and Gruenberg, H., *J. Appl. Phys.*, 38, 4486, 1967.
3. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 38, 5194, 1967.
4. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.*, 44, 4518, 1973.
5. Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic Press, New York, NY, 1964.
6. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Radiation pressure due to plane electromagnetic waves obliquely incident on moving media, *J. Appl. Phys.*, 49, 3584–3586, 1978.

附录14C

斜入射在相对运动单轴等离子体平板上的电磁波的反射和透射[⊖]

Dikshitulu K. Kalluri 和 R. K. Shrivastava

14C.1 引言

在最近的一些文献中，电磁波与相对论性等离子体之间的相互作用已经得到了很多关注。很多研究者[1~14]研究了半无限大运动电介质媒质和等离子体以及电介质平板对电磁波的反射与透射的问题。Yeh[15,16]研究了一各向同性运动等离子体平板对电磁波的反射与透射，而 Chawla 和 Unz[17]考虑了电磁波垂直入射到一运动等离子体平板上的情况，而运动等离子体平板处于一个与平板相垂直的有限静磁场中。Kong 和 Cheng[18]得到了当单轴等离子体平板沿分界面运动时，电磁波垂直入射时透射系数的数值结果，所使用的方法是基于双各向异性的概念。

本附录旨在给出平行极化电磁波入射到一相对运动的各向异性等离子体平板时的反射和透射系数的解，而相对运动的各向异性等离子体平板处于与平板相垂直的很强的静磁场中。重点是讨论反射和透射系数的振荡性质(由内反射波的干涉引起)与入射波频率以及平板速度之间的关系，特别是对后者更感兴趣。

我们先在平板的静止坐标系中求解问题，然后利用相对论变换关系得到在实验室坐标系中所观察到的反射系数和透射系数。

14C.2 问题的公式表示

问题的几何图形如图 14C.1 所示。考虑在实验室坐标系Σ中所激发的一个平面波，它在自由空间中的 xz 平面内沿与 z 轴正向成θ角的方向传播。假设波随时间做正弦变化，具有下式的形式

$$E^{\mathrm{I}}=(E_x^{\mathrm{I}}\,\hat{x}+E_z^{\mathrm{I}}\,\hat{z})\Psi_{\mathrm{I}}$$

$$\Psi_{\mathrm{I}}=\exp\{\mathrm{j}[\omega t-(k_x x+k_z z)]\}\tag{14C.1}$$

式中，$k_x=k_0\sin\theta=K_0S$，$k_z=k_0\cos\theta=k_0C$，$k_0=\omega/c$ 且 $c=1/(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$ = 自由空间中的光速。

将该波变换至相对于运动等离子体平板静止的坐标系Σ'中，等离子体平板位于平面 $z'=0$ 和 $z'=d'$之间。假设无限大的强静磁场与平板垂直，这样就可以把等离子体媒质模拟成一个单轴各向异性电介质媒质，其相对介电常数是一个张量：

$$\bar{\bar{\varepsilon}}'_{\mathrm{r}}=\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+e'_z\,\hat{z}\hat{z},\quad \varepsilon'_z=1-\left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega'}\right)^2\tag{14C.2}$$

式中，ω_{p} 为等离子体频率，ω'是在Σ'坐标系中波的频率。

在运动坐标系Σ'中，各个场分量的指数变化具有下式的形式

$$\Psi'_{\mathrm{I}}=\exp\{\mathrm{j}[\omega't'-(k'_x x'+k'_z z')]\}\tag{14C.3}$$

⊖ 资料来自 *IEEE Trans. Antennas Propag.*，21(1)，63-70，January 1973。

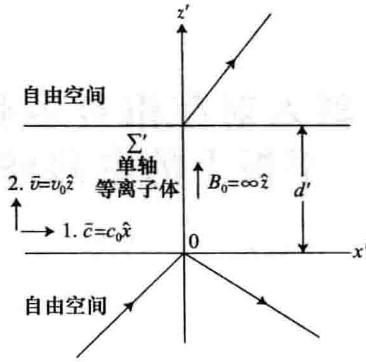


图 14C.1 问题的几何形状(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans. Antennas Propagat.*，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

式中，$k'_x=k'_0S'$，$k'_z=k'_0C$ 且 $k'_0=\omega'/c$。

现在，反射波和透射波必须分别具有下列指数变化形式：

$$\Psi'_{\mathrm{R}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega't' - (k'_x x' - k'_z z')]\} \tag{14C.4}$$

$$\Psi'_{\mathrm{T}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega't' - (k'_x x' + k'_z z')]\} \tag{14C.5}$$

在静止坐标系Σ中，反射波与透射波的相应形式分别为

$$\Psi_{\mathrm{R}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega_r t - (k_x^r x - k_z^r z)]\} \tag{14C.6}$$

$$\Psi_{\mathrm{T}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega_t t - (k_x^t x - k_z^t z)]\} \tag{14C.7}$$

利用自由空间中的麦克斯韦方程组，可以得到在Σ'坐标系中的所有其他场量分量：

$$\eta_0 H'^{\mathrm{I,T}}_y = \frac{1}{C'}E'^{\mathrm{I,T}}_x, \quad \eta_0 H'^{\mathrm{R}}_y = -\frac{1}{C'}E'^{\mathrm{R}}_x \tag{14C.8}$$

而在Σ参考系中，则有

$$\eta_0 H_y^{\mathrm{I,T}} = \left(\frac{k_0^{\mathrm{I,T}}}{k_z^{\mathrm{I,T}}}\right)E_x^{\mathrm{I,T}}, \quad \eta_0 H_y^{\mathrm{R}} = -\left(\frac{k_0^{\mathrm{R}}}{k_z^{\mathrm{R}}}\right)E_x^{\mathrm{R}} \tag{14C.9a}$$

$$k_0^{\mathrm{I,T,R}} = \frac{\omega^{\mathrm{I,T,R}}}{c} \tag{14C.9b}$$

利用平面波的相位不变性原理、麦克斯韦方程的协变性以及洛伦兹变换，对于平板运动的两种情况，可以得到带撇量与不带撇量[4,11,19]之间的如下关系。

情况 1：$\bar{v}=v_0\hat{x}$

$$\omega' = p_x\omega, \quad k'_x = \gamma k_0(S-\beta), \quad k'_z = k_0C \tag{14C.10a}$$

$$\omega_r = \omega_t = \omega, \quad k_x^r = k_x^t = k_0S, \quad k_z^r = k_z^t = k_0C \tag{14C.10b}$$

$$C' = \frac{C}{p_x}, \quad S' = \frac{S-\beta}{1-S\beta}, \quad E'^{\mathrm{I,T,R}}_x = E_x^{\mathrm{I,T,R}} \tag{14C.10c}$$

式中

$$\beta = \frac{v_0}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad p_x = g(1-S\beta) \tag{14C.10d}$$

情况 2：$\bar{v}=v_0\hat{z}$

$$\omega' = p_x\omega, \quad k'_x = k_0S, \quad k'_z = \gamma k_0(C-\beta) \tag{14C.11a}$$

$$\omega_r = \gamma^2\omega(1+\beta^2-2\beta C), \quad k_z^r = k_0S$$

$$k_z^r = \gamma^2 k_0[(1+\beta^2)C-2\beta] \tag{14C.11b}$$

$$\omega_t = \omega,\quad k_x^t = k_0 S,\quad k_z^t = k_0 C \tag{14C.11c}$$

$$C = \frac{C-\beta}{1-C\beta},\quad S = \frac{S}{p_z} \tag{14C.11d}$$

$$E'^{I,T}_x = \gamma\left(1-\frac{\beta}{C}\right)E^{I,T}_x,\quad E'^R_x = \gamma\left(1+\frac{\beta\beta'}{C}\right)E^R_x \tag{14C.11e}$$

式中

$$p_z = \gamma(1-C\beta),\quad \beta' = \frac{1+\beta^2-2\beta C}{1+\beta^2-2\dfrac{\beta}{C}} \tag{14C.11f}$$

容易看出

$$\cos\theta_r = \frac{C}{\beta'} \tag{14C.11g}$$

式中，θ_r 是在坐标系Σ中的反射角。

14C.3　色散关系和其他关系

让在等离子体中的波具有如下指数变化的形式：

$$\Psi'_P = \exp\{j[\omega' t' - (k'_x x' + k'_0 q' z')]\} \tag{14C.12}$$

利用等离子体中的麦克斯韦方程组，可以得到

$$\eta_0 H'^P_y = \frac{1}{q'}E'^P_x,\quad q' = \pm\left(1-\frac{S'^2}{\varepsilon'_z}\right)^{1/2} \tag{14C.13}$$

将 z 和 ε'_z 代入式(14C.2)、式(14C.10)和式(14C.11)中，与平板运动相关的两种情况的色散系数 q' 可以写为

$$q'_x = \pm\left(\frac{C^2\Omega^2-1}{p_x^2\Omega^2-1}\right)^{1/2}$$

和

$$q'_z = \pm\left[\frac{(p_z^2-S^2)\Omega^2-1}{p_z^2\Omega^2-1}\right]^{1/2} \tag{14C.14}$$

其中，$\Omega(=\omega/\omega_p)$为归一化入射波频率。

14C.4　反射系数和透射系数

在等离子体的静止坐标系Σ'中，利用电磁场切向分量在边界 $z'=0$ 和 $z'=d'$ 处的连续性条件，再根据式(14C.10c)和式(14C.11e)将场强变换至观察者所在的坐标系Σ中，就可以推导出在坐标系Σ中所观察到的功率反射系数和透射系数(分别用 ρ 和 τ 表示)的表达式。

情况 1：$\overline{v}=v_0\hat{x}$

$$\rho_x = \left|\frac{E_x^R}{E_x^I}\right|^2 = \frac{1}{1+[2q'_x C'/(q'^2_x - C'^2)\csc k'_0 q'_x d']^2} \tag{14C.15a}$$

$$\tau_x = \left|\frac{E_x^T}{E_x^I}\right|^2 = \frac{1}{1+\{[(q'^2_x - C'^2)/2q'_x C']\sin k'_0 q'_x d'\}^2} \tag{14C.15b}$$

情况 2：$\overline{v}=v_0\hat{z}$

$$\rho_z = \beta'\left|\frac{E_x^R}{E_x^I}\right|^2 = \beta'\left|\frac{C-\beta}{C+\beta\beta'}\right|^2\frac{1}{1+[2q'_z C'/(q'^2_z - C'^2)\csc k'_0 q'_z d']^2} \tag{14C.16a}$$

$$\tau_z = \left|\frac{E_x^T}{E_x^I}\right|^2 = \frac{1}{1+\{[(q'^2_z - C'^2)/2q'_z C']\sin k'_0 q'_z d'\}^2} \tag{14C.16b}$$

14C.5 数值结果与讨论

代入 q'，在 q'为实数的范围内，反射系数和透射系数具有如下形式：

$$\rho=\frac{\alpha}{1+B\csc^2 A},\quad \tau=\frac{1}{1+(1/B)\sin^2 A} \tag{14C.17a}$$

在 q'为虚数的范围内，它们具有下式的形式：

$$\rho=\frac{\alpha}{1-B\operatorname{csch}^2|A|},\quad \tau=\frac{1}{1-(1/B)\sinh^2|A|} \tag{14C.17b}$$

式中，对于两种平板运动情况，α · arccos$C$ 和 x 由下列各式分别给出。

情况 1：

$$\alpha_x=1 \tag{14C.18a}$$

$$A_x=2\pi\Omega p_x\left(\frac{C^2\Omega^2-1}{p_x^2\Omega^2-1}\right)^{1/2}d'_{\mathrm{p}} \tag{14C.18b}$$

$$B_x=\frac{4p_x^2C^2(p_x^2\Omega^2-1)(C^2\Omega^2-1)}{(p_x^2-C^2)^2} \tag{14C.18c}$$

情况 2：

$$\alpha_z=\frac{(1+\beta^2-2\beta C)(1+\beta^2-2\beta/C)}{(1-\beta^2)^2} \tag{14C.19a}$$

$$A_z=2\pi\Omega p_z\left[\frac{(p_z^2-S^2)\Omega^2-1}{p_z^2\Omega^2-1}\right]^{1/2}d'_{\mathrm{p}} \tag{14C.19b}$$

$$B_z=\frac{4p_z^2(p_z^2-S^2)(p_z^2\Omega^2-1)[(p_z^2-S^2)\Omega^2-1]}{S^4} \tag{14C.19c}$$

式中，$d'_{\mathrm{p}}=d'/\lambda_{\mathrm{p}}$，$\lambda_{\mathrm{p}}$ 是相应于等离子体频率的自由空间波长。

这样可以看到，在 q'为实数的范围内，ρ 是一个振荡函数，而在 q'为虚数的范围内，ρ 是非振荡的。我们现在将反射系数看做归一化波频率(Ω)和归一化平板速度(β)的函数来加以讨论。

14C.5.1 随 Ω 的变化

我们得到了 $C=0.5$，$d'_{\mathrm{p}}=1$ 且 $\beta=C$ 时的数值结果。图 14C.2 和图 14C.3 所示为对于平板运动的两种情况，q' 和 ρ 随 Ω 变化的曲线。为得到在振荡范围内的最大值和最小值[20]，应该注意 $\rho_{\min}=0$ 且 Ω 满足如下方程：

$$A=k'_0q'd'=\frac{n\pi}{2},\quad n\ \text{是偶数} \tag{14C.20a}$$

这是与边界条件 $2q'd'=(n/2)\lambda'$(n 为偶数)等价的，这个条件意味着两个连续反射波(在等离子体平板中存在一无穷系列的内反射)之间的光程差是波长的整数倍，因此这些波相位相同并会彼此增强，在这种情况中，来自下边界的第一个反射波恰好抵消了剩余反射波的总和，因此给出了零反射[21]。

这样，经过一系列代数运算后，可以得到

$$(\Omega_{\min,n})_x=\left[\frac{(n^2+16d'^2_{\mathrm{p}})\pm[(n^2+16d'^2_{\mathrm{p}})^2-(8Cnd'_{\mathrm{p}}/p_x)^2]^{1/2}}{32C^2d'^2_{\mathrm{p}}}\right]^{1/2} \tag{14C.20b}$$

和

$$(\Omega_{\min,n})_z=\left[\frac{(n^2+16d'^2_{\mathrm{p}})\pm[(n^2+16d'^2_{\mathrm{p}})^2-(8((p_z^2-S^2)/p_z^2)^{1/2}nd'_{\mathrm{p}})^2]^{1/2}}{32(p_z^2-S^2)d'^2_{\mathrm{p}}}\right]^{1/2} \tag{14C.20c}$$

在前面一个公式中，负号给出了在第一个振荡区间中的最小值，正号则给出了在另一

振荡区间中的最小值。因此，在任一范围内存在无穷多个振荡。

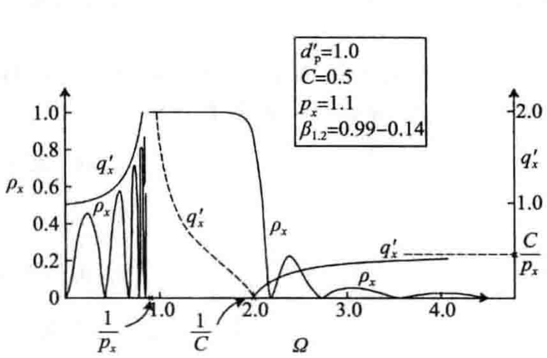


图 14C.2　平板平行于分界面运动时，特征根(q'_x)和功率反射系数(ρ_x)与归一化波频率的关系曲线。虚线部分表示 q'_x 取虚部(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21, 63-70. © 1973 IEEE.)

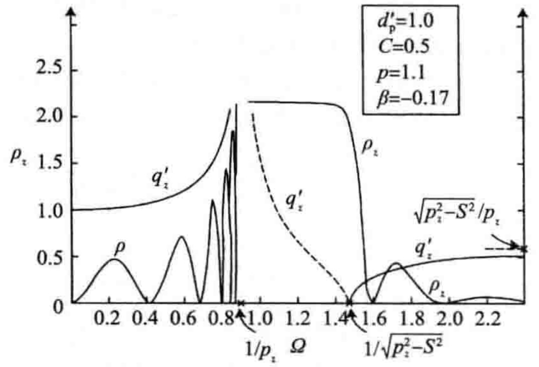


图 14C.3　平板垂直于分界面运动时，特征根(q'_z)和功率反射系数(ρ_z)与归一化波频率的关系。虚线部分表示 q'_z 取虚部(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D., and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21, 63-70. © 1973 IEEE.)

ρ 中的最大值出现在当 Ω 满足下式的超越方程时：

$$\tan A = f_\Omega A \tag{14C.21a}$$

式中

$$(f_\Omega)_x = \frac{2C^2\Omega^2 - p_x^2 C^2 \Omega^4 - 1}{\Omega^2(p_x^2 - 2p_x^2 C^2 \Omega^2 + C^2)} \tag{14C.21b}$$

且

$$(f_\Omega)_z = \frac{\Omega^4 p_z^2(p_z^2 - S^2) - 2\Omega^2(p_z^2 - S^2) + 1}{2\Omega^4(p_z^2 - S^2) - \Omega^2(2p_z^2 - S^2)} \tag{14C.21c}$$

应用一个子例程求解上面的超越方程，先求出在一个循环的两最小值点之间的最大值点。当确定这个最大值点的位置后，将最小值点和 ρ 最大值点之间的每一个区间划分成很多个小区间，然后在每一个点上逐一进行计算。重复该步骤得到第二个循环等。

从图 14C.2 和图 14C.3 中的曲线可以看出，当 q' 在其实值区间内趋于无穷时，ρ 的振荡变得越来越快且幅度越来越大。在其他范围内(此时 q' 接近其渐近极限值 C')，振荡随 Ω 的增大而逐渐减慢并最终消失。在这个范围内出现的剧烈振荡是由于 q' 随 Ω 的变化而急剧上升所引起的。振荡的幅度由 q' 的大小来控制。这一点很容易观察到，注意，如果我们忽略振荡而画出一条表示平均值的曲线，这条曲线就是半无限大情况下 ρ 随 Ω 变化的曲线。在这种情况下，当自由空间场与等离子体场是极不匹配($q' \neq C'$)时，反射将很强，而当自由空间场与等离子体场完全匹配($q' = C'$)时，反射就等于零。

正如我们所知道的，当平板朝向入射波运动时，$\rho + \tau > 1$ 且反射波出现并被放大。这是因为储存的能量减少，且必须从外部给媒质提供机械功率以平衡电磁场施加在媒质上的辐射压力。当媒质有一个切向速度时，作用在媒质表面上的力不做功且时间平均储存能量保持为常数，因此对于平行运动我们得到 $\rho + \tau = 1$[11]。

14C.5.2　随 β 的变化

我们将看到，反射系数和透射系数都是平板速度的复杂函数。直接研究这两个系数与

β的关系太过于复杂。因此，我们采用如下所述的方法。

1）首先研究q'随p的变化，并画出ρ/α随p的变化曲线，因为该曲线的最大值与最小值都与前面一样很容易地得到。

2）研究p随β的变化。在将入射波频率变换至等离子体的静止坐标系中时，参数$p(=\omega'/\omega)$很重要。在β中它是一个二次项，且对任意p、β的两个值由下式给出

$$(\beta_{1,2})_x = \frac{S}{p_x^2+S^2} \pm \left[\left(\frac{S}{p_x^2+S^2}\right)^2 + \frac{p_x^2-1}{p_x^2+S^2}\right]^{1/2} \tag{14C.22a}$$

和

$$(\beta_{1,2})_z = \frac{C}{p_z^2+C^2} \pm \left[\left(\frac{C}{p_z^2+C^2}\right)^2 + \frac{p_z^2-1}{p_z^2+C^2}\right]^{1/2} \tag{14C.22b}$$

图 14C.4 中给出了$C=0.5$时p随β变化的曲线。它说明了ω'会随β的变化而变化。

3）现在，综合前两步就可以画出ρ/α随β变化的曲线。以另一条水平轴线（$\rho/\alpha=1$）为参考，这就表示τ。

4）根据式(14C.19a)可以研究α与β的关系，并且画出$C=0.5$时α随β变化的曲线及ρ/α随β变化的曲线。

5）最后，利用步骤3)和4)可以得到ρ，它是β的函数。

应当注意，因为对于平板的平行运动有$\alpha=1$，所以在这种情况下画出ρ随β变化的曲线只需要三步，且q'随p变化的曲线给出了有趣的结果。当平板相对于分界面做平行运动时，在Ω的不同范围内，即$\Omega<1/C$，$\Omega=1/C$和$\Omega>1/C$，可以看到q'随p变化的方式是不同的，当平板相对于分界面做垂直运动时，对于Ω的不同范围$\Omega<1/S$和$\Omega>1/S$，也有相同结论。

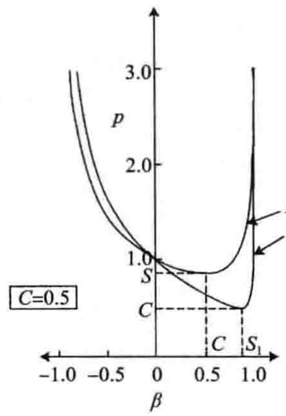


图 14C.4 参数p与归一化平板速度($\beta=v_0/c$)的函数关系。因为$p=\omega'/\omega_0$，所以曲线表示ω'随β的变化。p的下标x和z表明了平板运动的方向(经过允许转载，图片源自 Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21, 63-70. © 1973 IEEE.)

14C.5.3 平板相对于分界面平行运动($\bar{v}=v_0\hat{x}$)

当$C=0.5$和$d'_p=1$时，我们得到了前面所提到的Ω的三个区间内的数值结果。当$\Omega=1/C$，$q'=0$时，可以证明在这种情况下ρ_x为

$$\rho_x = \frac{1}{1+(1/\pi^2)d'^2_p} = 0.908$$

对于其他两种情况，即$\Omega<1/C$和$\Omega>1/C$，我们分别得到了$\Omega=1.2$和$\Omega=2.5$时的曲线($1/C=2$)。

图 14C.5 给出了q'_x和ρ_x随p_x变化的曲线(当$\Omega<1/C$时)。在振荡区间内，$(\rho_{\min})_x$等于0，且出现在当p_x满足下式时：

$$A_x = 2\pi\Omega p_x\left(\frac{C^2\Omega^2-1}{p_x^2\Omega^2-1}\right)^{1/2} d'_p = \frac{n\pi}{2}, \quad n\text{ 是偶数}$$

因此，可以得到

$$(p_{\min,n})_x = \frac{n}{\Omega}\frac{1}{[n^2-16d'^2_p(\Omega^2C^2-1)]^{1/2}} \tag{14C.23}$$

也应当注意，在$p_x=C$处有一个额外的最小值点。令式(14C.18c)中的$B_x=\infty$，就可以很容易地看出这一点。在这种条件下，$q'=C'=1$反映出自由空间场与等离子体场是完

全匹配的，入射波被全部透射。

当 p_x 满足超越方程 $\tan A_x=(f_{\rm p})_x A_x$ 时，出现 ρ_x 的最大值，其中

$$(f_{\rm p})_x=\frac{p_x^2-C^2}{p_x^2(\Omega^2C^2-1)+C^2(p_x^2\Omega^2-1)} \tag{14C.24}$$

情况 1：$\Omega<1/C$

应当注意，在式(14C.23)中 $n=0$ 并不是一个容许的偶数，因为它对应于 p_x 等于零。容许的最小偶数可以从 z 的最小值求出，p_x 的最小值等于 C。p_x 的这个值对应于 $n=n'=4d'_{\rm p}\Omega C$。因为这个值不可能是一个偶数，所以容许的最小偶数是大于 n' 的某一个最小偶数。当 $p_x=1/\Omega$ 时，n 的最大容许值为无穷大。当超出振荡区间时，ρ_x 是单调变化的。

借助之前已经解释过的 p_x 随 β 变化的曲线，最终可以将 ρ_x 随 p_x 变化的曲线转化为 ρ_x 随 β 变化的曲线(见图 14C.6)。由于对于任何 p_x 都存在两个 β 值，因此在 ρ_x 随 p_x 变化曲线中的一个振荡环会在 p_x 随 β 变化曲线中产生两个振荡环，这两个振荡环分别处于 $\beta=S$ 的两侧(对应于在 ρ_x 随 p_x 变化曲线中的起点 $p_x=C$)。

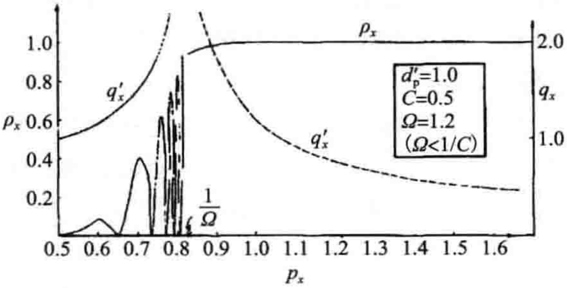


图 14C.5 平板平行于分界面运动且 $\Omega>1/C$ 时，q'_x 和 ρ_x 随 p_x 变化的曲线，虚线部分表明 q'_x 取虚部(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obl-iquely incident on a relativistically moving unia-xial plasma slab，*IEEE Trans*. *Ante-nnas Propagat*.，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

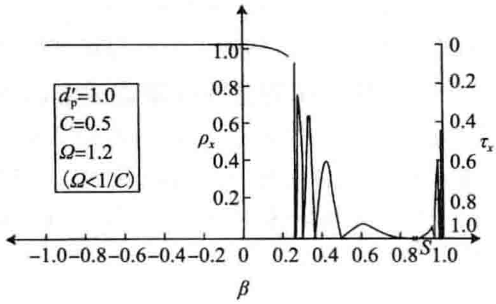


图 14C.6 平板平行于分界面运动且 $\Omega>1/C$ 时 ρ_x 和 τ_x 随 β 变化的曲线(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans*. *Antennas Propagat*.，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

可以看出，在 β 从 0.23 变化到 0.98 的区间内，ρ_x 是振荡的，而对于其他 β 值，ρ_x 是单调变化的。当靠近 $\beta=S$ 两侧的振荡区域的末端时，振荡(幅度上升)的速度增大。振荡在 $\beta=S$ 的右侧比在左侧更快。这是因为波长 λ' 在右侧范围内比在左侧范围内减小更快，这可以从 p_x 随 β 变化的曲线中观察到。

情况 2：$\Omega>1/C$

再一次参照式(14C.23)，应注意到 n 不能取所有的偶数值。对 n 的这种限制是由于要求 $p_{\min}$ 必须介于 C 和 ∞ 之间。$p_x=C$ 对应于 $n=n'=4d'_{\rm p}\Omega C$ 而 $p_x=\infty$ 对应于

$$n=n''=4d'_{\rm p}(\Omega^2C^2-1)^{1/2} \tag{14C.25}$$

注意，$n''<n'$，n 的最小容许取值是一个大于或等于 n'' 的偶数。同样，n 的最大容许取值是一个小于或等于 n' 的偶数。

如果选择 $d'_{\rm p}=1$，$C=0.5$ 且 $\Omega=2.5$，由式(14C.25)给出的 n 的范围是 3～5，由于仅允许 n 是偶数，因此应该取 $n=4$。这个值对应于 $p_x=0.6$。这样，我们仅有 ρ_x 的两个最小值，一个在 $p_x=0.5$ 处，另一个在 $p_x=0.6$ 处，它们给出了在区域内的一个振

荡环。

对于任何其他数据，振荡环的数目可能会改变。例如，若 $d'_p=10$，$C=0.5$ 且 $\Omega=2.1$，可以得到$n'=42$ 且 $n''=12.8$。因此，n''必须取 14(紧邻的一个更大的偶数)，给出 n 的范围为 14～42。这将导致 14 个振荡环，因为 $n=14$ 对应于 $p_x=1.18$，将会看到所有这些振荡环都将在 p_x 从 0.5 到 $\rho_{\|}$ 的范围内，这意味着在这一区域内振荡环分布非常密集。

当 p_x 趋于无穷大时，A_x 趋于 $2\pi d'_p(\Omega^2C^2-1)^{1/2}$，$B_x$ 趋于 $4\Omega^2C^2(\Omega^2C^2-1)$(参照式(14C.18))。这样，当 p_x 不断地增大，一旦超出振荡区时，ρ_x 渐近地增大到下式给出的值

$$(\rho_x)_{p_x\to\infty}=\frac{1}{1+4\Omega^2C^2(\Omega^2C^2-1)\csc^2 2\pi d'_p(\Omega^2C^2-1)^{1/2}}=0.22,\quad 选择\ d'_p=1,\quad C=0.5$$

且

$$\Omega=2.5 \tag{14C.26}$$

我们只给出了 ρ_x 随β 变化的最终图形(见图 14C.7)，从图 14C.7 中可以看出，在经过某一次振荡后，反射系数都增大至它在 $\beta=S$ 的任一侧的最终值，与左边区域中的缓慢增长相比，在 $\beta=S$ 右侧的上升部分极其陡峭。我们已经对此给出了一个物理解释。

14C.5.4 平板相对分界面垂直运动($\bar{v}=v_0\hat{x}$)

取 $d'_p=1$ 和 $C=0.5$，我们得到了在 $\Omega=0.5(<1/S)$和 $\Omega=2.0(>1/S)$两种情况下的曲线。对于Ω 的这两个范围，图 14C.8 和 14C.11 给出了 q_z 和ρ_z/α_z 随 p_z 变化的曲线。像前面一样，也可以求出 ρ_z/α_z 的最大值和最小值，当 ρ_z/α_z 取最大值或最小值时，p_z 由下式给出：

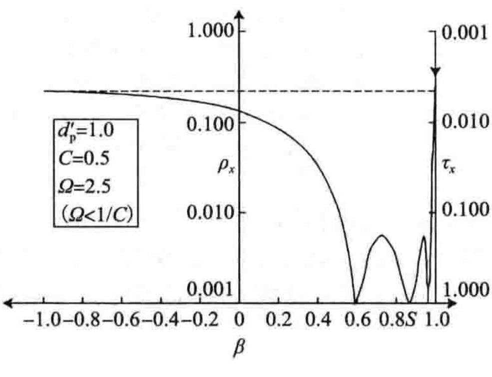


图 14C.7 平板平行于分界面运动且 $\Omega>1/C$ 时 ρ_x 和 τ_x 随 β 变化的曲线(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans. Antennas Propagat.*，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

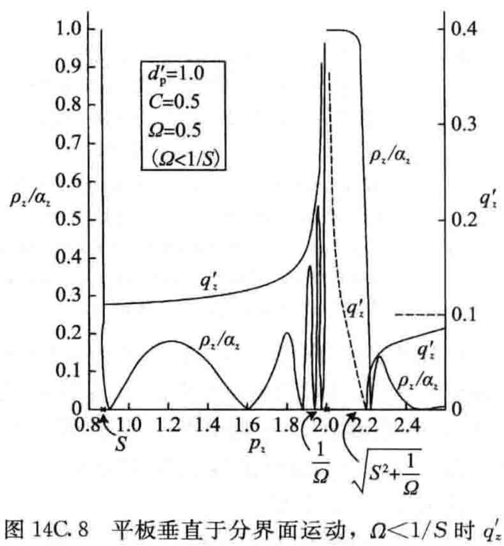


图 14C.8 平板垂直于分界面运动，$\Omega<1/S$ 时 q'_z 和 ρ_z/α_z 随 p_z 变化的曲线。虚线部分表明 q'_z 取虚部(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans. Antennas Propa-gat.*，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

$$(p_{\min,n})_z = \left\{ \frac{[n^2 + 16d'^2_p(1+\Omega^2 S^2)] \pm \{[n^2 + 16d'^2_p(1+\Omega^2 S^2)]^2 - (8nd'_p)^2\}^{1/2}}{32\Omega^2 d'^2_p} \right\}^{1/2},$$

$$n \text{ 是偶数} \tag{14C.27}$$

对于 $\Omega > 1/S$ 的情况，平方根符号前面的负号是不允许的，因为在这种情况下，q'_z 仅在一个范围内是实数，也即 $[S^2 + (1/\Omega^2)]^{1/2} < p_z < \infty$) 且 $\tan A_z = (f_p)_z A_z$，其中

$$(f_p)_z = \frac{1/p_z^2 + \Omega^2/[(p_z^2 - S^2)\Omega^2 - 1] - \Omega^2/(p_z^2\Omega^2 - 1)}{1/p_z^2 + \Omega^2/[(p_z^2 - S^2)\Omega^2 - 1] + 1/(p_z^2\Omega^2 - 1)} \tag{14C.28}$$

情况 1：$\Omega < 1/S$

p_z 的最小值是 S，它对应于 $n = n' = 4d'_p\Omega S/(1 - \Omega^2 S^2)^{1/2}$。因为这个值可能不是一个偶数，所以容许的最小偶数是一个大于 n' 的偶数。当然，n 的最大容许取值是无穷大，对应于 $p_z = 1/\Omega$。

按照前面所描述的步骤，图 14C.8～图 14C.10 说明了 ρ_z 随 β 变化曲线的发展过程。在这里需要注意的关键一点是，在反射系数的表达式中出现了一个额外因子 α_z。这实际上是理想运动镜面的反射系数[11]，而乘数因子 $1/(1 + B_z \csc^2 A_z)$ 是因为平板的单轴各向异性所产生的。

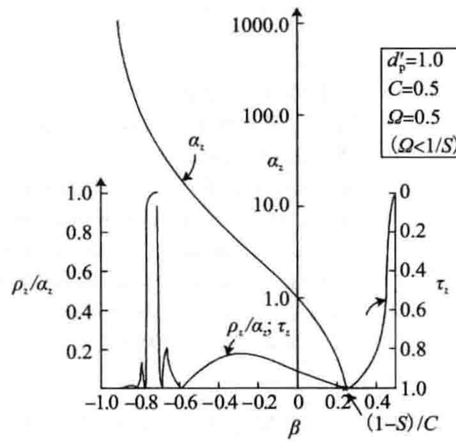


图 14C.9 平板垂直于分界面运动且 $\Omega < 1/S$ 时，ρ_z/α_z 和 τ_z 随 β 变化的曲线。图中还给出了 α_z 随 β 变化的曲线（经过允许转载，图片源自 Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21, 63-70. © 1973 IEEE.）

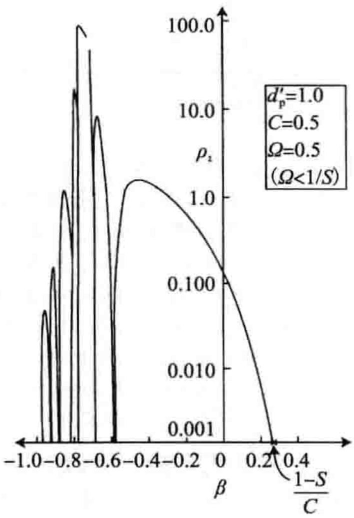


图 14C.10 平板垂直于分界面运动且 $\Omega < 1/S$ 时，ρ_z 随 β 变化的曲线（经过允许转载，图片源自 Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-21, 63-70. © 1973 IEEE.）

可以看到（图 14C.9），当 β 从 -1 变为 0 时，α_z 从无穷大减小到 1。因此，在这个范围内反射波被放大（前面已给出了物理解释）。在 $0 < \beta < (1-S)/C$ 范围内，α_z 从 1 减小到 0。这样，在上述范围内反射系数小于 1，最终在 $\beta = (1-S)/C$ 处变为 0。在这个范围内，能量平衡关系可写为如下形式

入射功率 ＝ 反射功率 ＋ 透射功率 ＋ 场提供的机械功率 ＋ 储存能量的变化

因此，当媒质远离入射波运动时，场对媒质做功。在 $\beta = (1-S)/C$ 处，反射角 $\theta_R =$

90°，这样就解释了零反射功率的现象。

前面已经解释过反射系数的振荡现象。

情况 2：$\Omega \geqslant 1/S$

取 $d'_p=1$ 且 $C=0.5$，图 14C.12 给出了 $\Omega=2.0(>1/S)$时 ρ_z 随β 变化的曲线。比较该曲线与前面给出的 $\Omega<1/S$ 的曲线(见图 14C.10)，注意，二者之间存在的差异源于前者仅有一个 ρ_z 振荡区而后者有两个 ρ_z 振荡区。

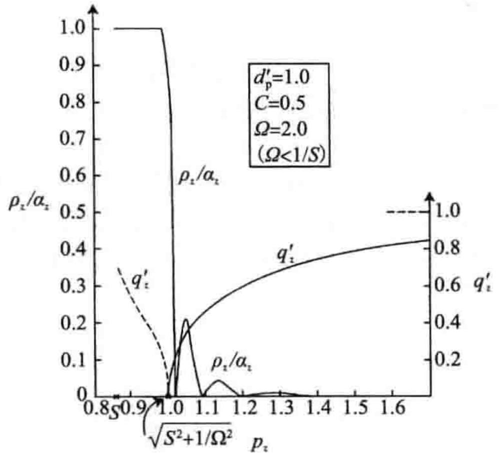


图 14C.11 平板垂直于分界面运动且 $\Omega>1/S$ 时，q'_z 和 ρ_z/α_z 随 p_z 变化的曲线(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans. Antennas Propagat.*，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

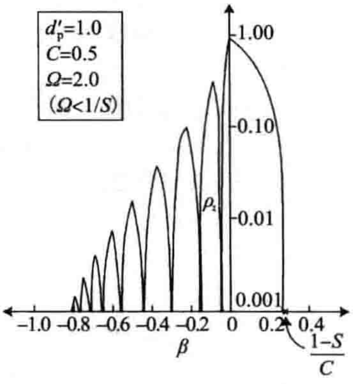


图 14C.12 平板垂直于分界面运动且 $\Omega>1/S$ 时，ρ_z 随β变化的曲线(经过允许转载，图片源自 Kalluri，D. and Shrivastava，R. K.，Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab，*IEEE Trans. Antennas Propagat.*，AP-21，63-70. © 1973 IEEE.)

$\Omega=1/S$ 的曲线与前面类似，因此这里没有给出。

当β大于或等于C 时，来自下方的入射波(见图 14C.1)与平板没有相互作用，因为波的相速度的法向分量小于或等于平板运动速度的法向分量。然而，如果我们将问题理解成平板去撞击平板上方已存在的入射波，这里给出的结果甚至在 $\beta>C$ 时也是可用的。这个问题将在后面专门讨论。

参考文献

1. Landecker, K., Possibility of frequency multiplication and wave amplification by means of some relativistic effect, *Phys. Rev.*, 86, 449–455, 1952.
2. Tai, C. T., *Two scattering problems involving moving media*, Antenna Lab., Ohio State Univ., Columbus, Rep. 1691–1697, 1964.
3. Yeh, C., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium, *J. Appl. Phys.*, 36, 3513–3517, 1965.
4. Yeh, C. and Casey, K. F., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab, *Phys. Rev.*, 144, 665–669, 1966.
5. Yeh, C., Brewster angle for a dielectric medium moving at relativistic speed, *J. Appl. Phys.*, 38, 5194–5200, 1967.

6. Yeh, C., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab II. Parallel polarisation, *Phys. Rev.*, 167, 875–877, 1968.
7. Pyati, V. P., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium, *J. Appl. Phys.*, 38, 652–655, 1967.
8. Lee, S. W. and Lo, Y. T., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium, *J. Appl. Phys.*, 38, 870–875, 1967.
9. Tsai, C. S. and Auld, B. A., Wave interaction with moving boundaries, *J. Appl. Phys.*, 38, 2106–2115, 1967.
10. Shiozawa, T., Hazama, K., and Kumagai, N., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a dielectric half-space moving perpendicular to the plane of incidence, *J. Appl. Phys.*, 38, 4459–4461, 1967.
11. Daly, P. and Gruenberg, H., Energy relations for plane waves reflected from moving media, *J. Appl. Phys.*, 38, 4486–4489, 1967.
12. Shiozawa, T. and Kumagai, N., Total reflection at the interface between relatively moving media, *Proc. IEEE*, 55, 1243–1244, 1967.
13. Kong, J. A. and Cheng, D. K., Wave behavior at an interface of a semi-infinite moving anisotropic medium, *J. Appl. Phys.*, 39, 2282–2286, 1968.
14. Cheng, D. K. and Kong, J. A., Time-harmonic fields in source-free bi-anisotropic media, *J. Appl. Phys.*, 39, 5792–5796, 1968.
15. Yeh, C., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium, *J. Appl. Phys.*, 37, 3079–3082, July 1966.
16. Yeh, C., Reflection and transmission of electromagnetic waves by moving plasma medium, II. Parallel Polarization, *J. Appl. Phys.*, 38, 2871–2873, 1967.
17. Chawla, B. R. and Unz, H., Reflection and transmission of electromagnetic waves normally incident on a plasma slab moving uniformly along a magnetostatic field, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-17, 771–777, 1969.
18. Kong, J. A. and Cheng, D. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic slab, *J. Appl. Phys.*, 40, 2206–2212, 1969.
19. Chawla, B. R. and Unz, H., *Electromagnetic Waves in Moving Magneto-Plasmas*, Kansas University Press, Lawrence, KS, 1971.
20. Kalluri, D. and Prasad, R. C., Thin film reflection properties of isotropic and uniaxial plasma slabs, *Appl. Sci. Res.*, 27, 415–424, 1973.
21. Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1961, p. 111.
22. French, I. P., Cloutier, G. G., and Bachynski, M. P., The absorpitivity spectrum of a uniform anisotropic plasma slab, *Can. J. Phys.*, 39, 1273–1290, 1961.
23. Kalluri D. and Shrivastava, R. K., Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident on a relativistically moving uniaxial plasma slab, *IEEE Trans Antennas Propagat.*, AP-21, 63–70, 1973.

附录 14D

以相对论速度运动的等离子体媒质的布儒斯特角⊖

Dikshitulu K. Kalluri 和 R. K. Shrivastava

本附录研究了向以相对论速度运动的各向同性等离子体半空间入射时，平行极化电磁波的布儒斯特角。无论媒质相对于分界面是平行运动还是垂直运动，在媒质速度的某一特定范围内都存在着两个布儒斯特角。在平行运动的情况中，可以发现当入射波频率低于等离子体频率时不存在布儒斯特角。

Yeh[1]研究了一个电介质媒质以相对论速度运动时的布儒斯特角。Lee 和 Lo[2]研究了当电磁波入射到一个电介质媒质和平行于分界面运动的单轴等离子体之间的分界面上时发生全透射的条件。然而，这些研究都仅限于入射平面与运动方向相平行的情况。后来，Kong 与 Cheng[3]和 Pyati[4]去掉了这一限制条件，考虑入射波平面为任意方向的一般情况。在最近的一篇论文中，Chuang 和 Ko[5]得到了相对于其表面平行运动的电介质媒质的一般化的布儒斯特定律。

本篇论文报告了运动等离子体半空间的布儒斯特角现象。希望所得的结果有助于使得穿过一个以相对论速度运动的有界等离子体的透射信号的强度最大。从本质上来说，等离子体媒质是色散的，因此在一般情况下，布儒斯特角将是入射波频率和媒质速度的函数。由于考虑完全一般化的问题太过于复杂，因此现在的处理方法仅限于入射平面与媒质运动方向平行的情况。在下面将考虑媒质运动方向与分界面平行和垂直这两种情况。

考虑一个平行极化平面电磁波斜入射(入射平面为 xz 平面)到一个各向同性等离子体半空间(μ_0，ε')，该等离子体半空间以相对论速度在自由空间(μ_0，ε_0)中运动。应用反射与透射的传统理论，容易得到功率反射系数(ρ_x，对于媒质平行于分界面运动情况，例如，$v=v_0\,\hat{x}$)以及 ρ(对于媒质垂直于分界面运动情况，例如，$v=v_0\,\hat{z}$)：

$$\rho_x=\left(\frac{q'-\varepsilon' C'}{q'+\varepsilon' C'}\right)^2 \tag{14D.1a}$$

$$\rho_x=\frac{(1+\beta^2-2\beta C)\left(1+\beta^2-2\,\dfrac{\beta}{C}\right)}{(1-\beta^2)^2}\left(\frac{q'-\varepsilon' C'}{q'+\varepsilon' C'}\right)^2 \tag{14D.1b}$$

在上式中，色散方程的根 q' 为

$$q'=(\varepsilon'-S'^2)^{1/2}$$

且

$$C'=\begin{cases}\dfrac{C}{\gamma(1-S\beta)}, & v=v_0\hat{x}\\[2ex] \dfrac{C-\beta}{1-C\beta}, & v=v_0\hat{z}\end{cases}$$

其中，$C=\cos\theta$ 且 $S=\sin\theta$(θ 为入射角)。

所使用的符号和表达式与参考文献[6，7]中的相同。

当 $q'=\varepsilon' C'$ 时，功率反射系数等于 0。这一条件实际上意味着等离子体中的切向电场和磁场分量之比（$E'^{p}_{x}/H'^{p}_{y}=\eta_0 q'/\varepsilon'$）与自由空间中的切向电场和磁场分量之比（$E'_x/H'_y=\eta_0 C'$）是相等的，因此等离子体-自由空间系统完全匹配。代入 q'，上述条件可重写为以下形式：

$$C'^2 = (\varepsilon'+1)^{-1} \tag{14D.2}$$

对于一个运动电介质媒质，由式(14D.2)将得到平行(垂直)运动情况时 $S(C)$ 所满足的一个二次方程，可以很容易地求解这个方程从而得到布儒斯特角[1]。然而，当运动媒质是等离子体时，相对介电常数 ε' 是入射角、媒质速度和入射波频率的函数，此时 S 或 C 满足如下四次方程：

$$v = v_0\hat{x}$$

$$S^4 + a_1 S^3 + b_1 S^2 + c_1 S + d_1 = 0 \tag{14D.3}$$

式中

$$a_1 = \frac{-4}{\beta(2-\beta^2)}$$

$$b_1 = \frac{2(1+\beta^2+\beta^4)}{\beta^2(2-\beta^3)} - \frac{(1-\beta^2)^2}{\beta^2\Omega^2(2-\beta^2)}$$

$$c_1 = \frac{-4\beta}{2-\beta^2}$$

且

$$d_1 = \frac{2\beta^2-1}{\beta^2(2-\beta^2)} + \frac{(1-\beta^2)^2}{\beta^2\Omega^2(2-\beta^2)}$$

$$v = v_0\hat{z}$$

$$C^4 + a_2 C^3 + b_2 C^2 + c_2 C + d_2 = 0$$

式中

$$a_2 = \frac{-4}{\beta(2-\beta^2)}$$

$$b_2 = \frac{2(1+\beta^2+\beta^4)}{\beta^2(2-\beta^2)} - \frac{1-\beta^2}{\beta^2\Omega^2(2-\beta^2)}$$

$$c_2 = \frac{2(1-\beta^2)}{\beta\Omega^2(2-\beta^2)} - \frac{4\beta}{2-\beta^2}$$

且

$$d_2 = \frac{2\beta^2-1}{\beta^2(2-\beta^2)} - \frac{1-\beta^2}{\Omega^2(2-\beta^2)}$$

以入射波的频率作为参数，下面讨论布儒斯特角与媒质速度的函数关系。

情况 1：等离子体半空间平行于分界面运动($v=v_0\hat{x}$)

这种情况下的布儒斯特角为 $\arcsin S$，其中 S 由式(14D.3)给出。这是一个 8 次 S-β 曲线，在画出这条复杂的曲线之后我们发现，当 $\Omega<1$ 时，在与问题相关的 S 和 β 的有物理意义的范围内($0<S<1$ 且 $-1<\beta<1$)不存在这样的曲线。因此，当 $\Omega<1$ 时，不存在布儒斯特角。这是因为在这个范围内等离子体只能支持倏逝波[6]。

图 14D.1 表明在参数 $\Omega>1$ 的范围内，布儒斯特角的正弦是媒质速度的函数。可以看出，布儒斯特角依赖于运动速度的大小和方向；对于平行运动(β 为正值)，角度从静止值 $\arcsin\{[(\Omega^2-1)(2\Omega^2-1)^{-1}]^{1/2}\}$ 开始随着速度的增大而增大，而对逆向平行运动(β 是负的)，角度随速度增大而减小。另一个布儒斯特角出现在 $\beta=\beta_0=[(1-\Omega^2)+\Omega^2(\Omega^2-1)^{1/2}]^{1/2}$ 处，并且在媒质速度的一个很窄范围内会超过 β_0。对于一个给定的速度，布儒斯特角随入射波频率的增大而增大。

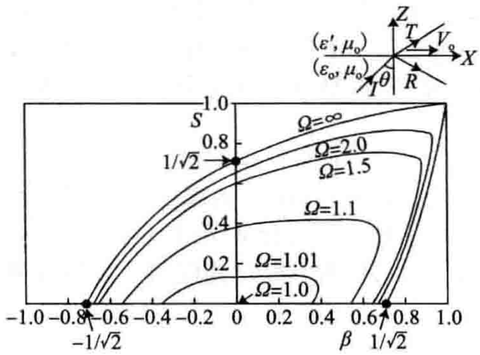


图 14D.1 布儒斯特角的正弦值(S)随媒质速度(β)(介质运动方向平行于分界面)变化的函数关系曲线。参数 Ω 的所有值都处于 $\Omega>1$ 的范围内，因为 $\Omega<1$ 时不存在布儒斯特角(经过允许转载，图片源自 *J. Appl. Phys.*，46(3)，1408-1409，1975. Copyright(1975)，American Institute of Physics)

情况 2：等离子体半空间垂直于分界面运动($v=v_0\,\hat{z}$)。

这种情况下的布儒斯特角为 $\arccos C$，C 由方程式(14D.4)的解得到。我们在整个 Ω 范围内绘出了 C 随 β 变化的曲线，与平行运动的情况一样，曲线中的一些分支处于 C 和 β 有物理意义的区域之外。

在图 14D.2 合并了全部有意义的分支，它表明布儒斯特角的余弦是媒质速度的函数。在静止情况下，布儒斯特角为 $\arccos(2-1/\Omega^2)^{-1/2}$。当媒质向远离入射波($\beta$ 为正值)方向运动时，会有一个附加入射角，使得从观察者的坐标系中看反射波似乎“掠”过了分界面，因此得到零反射功率[7]。此时，有 $\beta=(1-S)/C$，即 $C_0=2\beta/(1+\beta^2)$，如图 14D.2 中的虚线所示。C_0 的存在与运动媒质的性质无关，正是这一点刚好检验了 Yeh[1] 有关电介质媒质的结论。

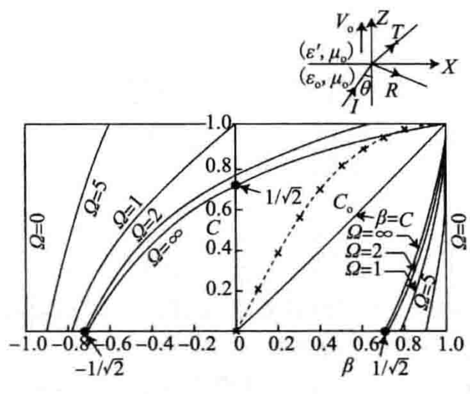


图 14D.2 布儒斯特角的余弦值(C)随媒质速度(垂直运动)变化的函数关系曲线。虚线由 $C_0=2\beta/(1+\beta^2)$ 给出。直线 $\beta=C$ 右侧的分支对应于媒质撞击入射波的情况(经过允许转载，图片源自 *J. Appl. Phys.*，46(3)，1408-1409，1975. Copyright(1975)，American Institute of Physics.)

当 $\Omega<2\sqrt{2}$ 时，在 $\beta=(1-S)/C$ 和 $\beta=C$ 之间(在这个范围内反射波朝向运媒质运动[7])不存在布儒斯特角。其原因是对于 β 和 Ω 的这个范围，在等离子体中仅能支持倏逝波。当 $\Omega<2\sqrt{2}$ 时，相应的布儒斯特角由曲线 C_0 和 $\beta=C$ 所包络部分的曲线给出。对于大的 Ω 值，存在两个布儒斯特角，其中一个是由 $\beta=C$ 线的右侧分支所产生的，它对应于媒质撞击在波上的情况。而且，应注意，$\beta=(\Omega^2-1)/(\Omega^2+1)$ 对应于在 C 随 β 变化曲线中的

C=1，这意味着在这些媒质速度下布儒斯特角等于 0°。

最后，当媒质朝向入射波运动(β为负值)时，可以看到布儒斯特角随速度的增加而增大，并在$-\beta_0=-\left\{\frac{1}{2}\left[1-2\Omega^2+(4\Omega^4+1)^{1/2}\right]\right\}^{1/2}$处变为 90°。对于$-\beta_0>\beta>-1$的情况，不存在布儒斯特角。

参考文献

1. Yeh, C., *J. Appl. Phys.* 38, 5194, 1967.
2. Lee, S. W. and Lo, Y. T., *J. Appl. Phys.* 38, 870, 1967.
3. Kong, J. A. and Cheng, D. K., *J. Appl. Phys.* 39, 2282, 1968.
4. Pyati, V. P., *J. Appl. Phys.* **38**, 652, 1967.
5. Chuang, C. W. and Ko, H. C., *J. Appl. Phys.* 45, 1154, 1974.
6. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.* 44, 2440, 1973.
7. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.* 44, 4518, 1973.

附录14E

运动等离子体对电磁波的全反射⊖

Dikshitulu K. Kalluri 和 R. K. Shrivastava

当一个平面电磁波斜入射到一个电介质边界上时，存在一个特定的入射角可产生全反射的条件。这个临界角由 $\arcsin(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1/2}$ 给出，因此从一种光密媒质不可能发生全反射[1]。Shiozawa 和 Kumagai[2] 研究了两个相对运动的电介质媒质的情况。如果在自由空间中传播的波入射到一个等离子体媒质上，在特定条件下也会发生全反射；当垂直入射时，其频率低于等离子体频率的波会被全反射[3]，而对于斜入射的情况，波发生全反射的频率范围通常会被拓宽[4]。本附录旨在研究这个频率范围如何随等离子体媒质的运动情况而变动，等离子体媒质可以是各向同性或单轴各向异性的。这里将考虑斜入射的平行极化波和垂直极化波两种情况。有一些研究者[5~7]在对运动媒质电磁波的反射和透射分析方法做了一些限制的条件下，分析了全反射现象。

考虑一个平面电磁波斜入射(入射平面为 xz 平面)到等离子体半空间中，该等离子体半空间在自由空间中以相对论速度运动。令在运动等离子体(Σ')中的透射波具有指数变化形式：

$$\Psi'_{\mathrm{P}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega' t' - (k'_x x' + k'_0 q' z')]\} \tag{14E. 1}$$

式中，q'是在Σ'中的色散方程的根，对于单 z 轴[8](沿 z 轴方向磁场强度极强)、单 x 轴[9]、单 y 轴和各向同性等离子体[10]，可以在Σ'中用通常的方法通过求解麦克斯韦方程组求出 q'。我们所使用的符号意义与参考文献[8]中的相同。

在实验室坐标系(Σ)中，透射波的形式可以写为

$$\Psi_{\mathrm{P}} = \exp\{\mathrm{j}[\omega^{\mathrm{P}} t - (k_x^{\mathrm{P}} x + k_z^{\mathrm{P}})]\} \tag{14E. 2}$$

在实验室坐标系(Σ)中的等离子体波的波矢量 k^{P} 和频率 ω^{P} 是通过一般的变换方程[11]与在静止坐标系(Σ')中的波矢量和频率相关联的。下面考虑媒质运动的两种情况。

第一种情况是等离子体半空间平行于分界面运动($\bar{v}=v_0\,\hat{x}$)：

$$\begin{aligned}\omega^{\mathrm{P}} &= \gamma(\omega' + v_0 k'_x) = \omega \\ k_x^{\mathrm{P}} &= \gamma\left[k'_x + \left(\frac{\omega'}{c^2}\right)v_0\right] = k_0 S \\ k_z^{\mathrm{P}} &= k'_0 q'\end{aligned} \tag{14E. 3}$$

对于全反射，透射波的波数 k_z^{P} 必须等于 0 或虚数。当 k_z^{P} 等于 $k'_0 q'$时，很容易推导出使得 q'成为虚数的条件，如下式所示：

$$\begin{aligned}&\text{a) 各向同性(两种极化)和单 } y \text{ 轴(垂直极化)}, \Omega \leqslant 1/C \\ &\text{b) 单 } x \text{ 轴(平行极化)}, \Omega \leqslant 1/p_x \\ &\text{c) 单 } z \text{ 轴(平行极化)}, 1/p_x \leqslant \Omega \leqslant 1/C\end{aligned} \tag{14E. 4}$$

在式(14E. 4)中，$\Omega=(\omega/\omega_{\mathrm{p}})$是归一化入射波频率，且 $p_x=\gamma(1-S\beta)$。

可以看出，“各向同性”等离子体产生全反射的条件与媒质速度无关。这一结论同样适用于单 y 轴垂直极化波的情况。对于一个平行极化波入射到单 y 轴等离子体或一个垂直极

⊖ 资料源自 *J. Appl. Phys.*，49(12)，6169-6170，December 1978。

化波入射到单x轴或单z轴等离子体的情况，有$q'=C'$，即是说等离子体没有产生任何效应，并且反射功率等于 0。

然而，平行极化波入射到一个单 x 轴或单 z 轴等离子体半空间所发生的全反射现象却会被媒质速度以一种有趣的方式而改变。图 14E.1 所示为全反射的频率范围如何随媒质运动情况增大或减小。区域Ⅰ，即曲线 $\Omega=1/p_x$ 下面所包围的面积，给出了单 x 轴等离子体发生全反射的区域，然而，对单 z 轴的情况，相应的区域为由曲线 $\Omega=1/p_x$ 和直线 $\Omega=1/C$ 所围成的面积(区域Ⅱ)。可以看出，对于单 x 轴(单 z 轴)的情况，对于随着 β 从 -1 增大到 S 的一个给定的入射角，频率范围 $AB(BC)$会增大(变小)，并在 $\beta=S$ 处达到其临界值 $1/C(0)$。在 $S<\beta<1$ 范围内，结论恰好相反。

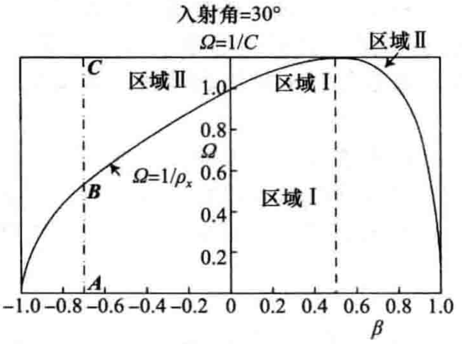


图 14E.1 媒质速度对于单 x 轴和单 z 轴等离子体全反射频率范围的影响(经过允许转载，图片源自 *J. Appl. Phys.*，49(12)，6169-6170，1978. Copyright(1975)，American Institute of Physics)

我们用图 14E.2 来说明对于一个给定的媒质速度，入射角如何影响频率范围。对于负 β 来说，随着入射角的增大，发生全反射的频率范围在单 x 轴的情况时减小，而在单 z 轴的情况时增大。

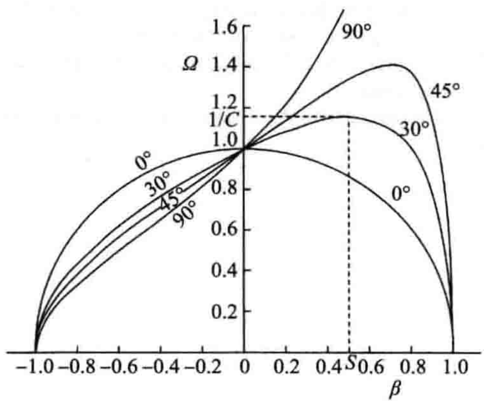


图 14E.2 入射角对全反射频率范围的影响(经过允许转载，图片源自 *J. Appl. Phys.*，49(12)，6169-6170，1978. Copyright(1975)，American Institute of Physics)

对于正的 β 来说，随着入射角的增大，单 x 轴情况的频率范围增大，而对 z 单轴的情况，频率范围可能增大也可能减小，不可能得出一个一般性的推论，关于这一点，因为在这种情况下发生全反射的频率范围由曲线 $\Omega=1/p_x$ 和直线 $\Omega=1/C$ 所包围部分确定，后者随入射角增大而上升，而前者却随着 β 的增大先增大再减小。

对于单 x 轴等离子体，用另一种形式来表示条件 $\Omega \leqslant 1/p_x$，即意味着入射角应当等于或大于 $\arcsin(1/\beta)[1-(1/\Omega)(1-\beta^2)^{1/2}]$，这与 Lee 和 Lo[5] 给出的结果一致。对于单 z 轴情况，相应的关系式为 $[1-(1/\Omega)^2]^{1/2} \leqslant \theta \leqslant \arcsin[1-(1/\Omega)(1-\beta^2)^{1/2}]$。

另一种情况是等离子体半空间垂直于分界面运动($\bar{v}=v_0\ \hat{z}$)：

$$
\begin{aligned}
\omega^{\mathrm{P}} &= \gamma(\omega' + v_0 k'_0 q') = \gamma\omega'(1+\beta q') \\
K_x^{\mathrm{P}} &= k'_x = k'_0 S' = k_0 S \\
K_z^{\mathrm{P}} &= \gamma\left[k'_0 q' + \left(\frac{\omega'}{c^2}\right)v_0\right] = \gamma k'_0(\beta + q')
\end{aligned}
\tag{14E.5}
$$

与前面所述的情况不同，q' 为虚数不会引起全反射。其原因是尽管虚数 q' 会在 Σ' 坐标系中产生倏逝波，但是在坐标系 Σ 中所观察到的透射波频率和波矢量都是复数，因此等离子体的静止坐标系中的倏逝波，在实验室坐标系中却似乎是一个有衰减的行波[12,13]。而且，等离子体中波的复频率的虚数部分可能代表等离子体波的一种阻尼，其能量转化为辐射场。

全反射的一般定义是没有功率透入第二个媒质中的情况。当等离子体静止时，q' 取虚数即意味着会发生全反射，但当等离子体运动时，这不是一个必要条件。有关等离子体半空间相对于分界面垂直运动情况的更深入的研究工作正在进展之中。

参考文献

1. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, NY, 1965.
2. Shiozawa, T. and Kumagai, N., *Proc. IEEE*, 55, 1243, 1967.
3. Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionsphere*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1961.
4. Kalluri, D. and Prasad, R. C., *Appl. Sci. Res.*, 27, 415, 1973.
5. Lee, S. W. and Lo, Y. T., *J. Appl. Phys.*, 38, 870, 1967.
6. Pyat, V. P., *J. Appl. Phys.*, 38, 652, 1967.
7. Kong, J. A. and Cheng, D. K., *J. Appl. Phys.*, 39, 2282, 1968.
8. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *IEEE Trans. Antennas Propag.*, AP-21, 63, 1973.
9. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-2, 206, 1974.
10. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.*, 44, 2440, 1973.
11. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1965.
12. Yeh, C., *Appl. Phys. Lett.*, 9, 184, 1966.
13. Chawla, B. R. and Unz, H., *Electromagnetic Waves in Moving Magneto-plasmas*, Regents Press of Kansas, Lawrence, KS, 1973.

附录14F

电磁波与垂直于入射面运动的有界等离子体间的相互作用[⊖]

Dikshitulu K. Kalluri 和 R. C. Prasad

14F.1 引言

在先前的一篇论文[1]中，我们研究了各向同性和单轴各向异性有界静止等离子体的反射和透射特性。很多研究者[2~8]研究了当等离子体在入射平面内相对于分界面平行运动或垂直运动这两种情况的结果，Kalluri 和 Shrivastava[9]总结了这些研究结果。

文献[10，11]报导了当媒质为电介质且媒质的运动方向垂直于入射面时的研究进展情况。Shiozawa 等人[10]研究了在垂直极化情况下，一个相对于入射平面垂直运动的各向同性电介质半空间的电磁波反射和透射问题。Pyati[11]也研究了各向同性电介质半空间的情况，但波的入射平面是任意的。因此，垂直于入射面的运动只是他的研究中的一个特例。

当运动媒质是等离子体时，由于色散效应，反射和透射系数同样依赖于入射波的频率，本章主要涉及垂直于入射平面(xz 平面)运动(沿 y 轴)的几个例子的有关这一专题的系统与综合研究。我们考虑了下列几种情况：运动媒质是(a)各向同性等离子体，(b)单 x 轴($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{x}$)等离子体，(c)单 y 轴($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{y}$)等离子体，以及(d)单 z 轴($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{z}$)等离子体。对于每一种情况，也涉及了入射波(平行或垂直)在自由空间中的极化效应。Kong 和 Cheng[12]求解了情况(c)；然而，他们的结果与作者现在所讨论的内容属于不同的专题。

在文献中，采用了两种方法求解这种涉及运动边界的问题。第一种方法[12,13]是在实验室坐标系Σ中求解问题，并强加在坐标系Σ中所测到的电场和磁场的合适的边界条件。在另一种方法[2,5]中，各个场量被变换至相对于运动媒质静止的坐标系Σ'中，在该静止坐标系中将问题看做一个静止等离子体来进行求解[1,14]。为得到在实验室坐标系中的反射和透射系数，Σ'中的场量必须被变换回实验室坐标系中。现在，我们选择了使用这种方法，依我们的观点来看，因为这种方法允许把总效应分解为两个有明显区别的效应。一个是在Σ'中计算得到的静止等离子体与自由空间不匹配引起的效应，另一个是不依赖于运动媒质特性的运动边界的效应。像在坐标系Σ'中所看到的，入射波是入射平面任意的任意极化波。在坐标系Σ'中，等离子体中的场分量之比和特征根都可以以状态变量形式来写出合适的方程，并求出相应矩阵的特征值和特征向量。

14F.2 节概述求解过程，主要为了介绍符号和指出一些重要的步骤。

14F.2 问题的公式表示

让区域 $z>0$ 半空间中充满等离子体(线性、无损、均匀)，而区域 $z<0$ 为自由空间，xz 平面为自由空间中的一个均匀平面波的入射平面，且在实验室坐标系Σ中均匀平面波

⊖ 资料源自 *J. Appl. Phys.*，48(2)，587-591，February 1977。

具有如下指数变化形式

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \exp[-\mathrm{j}k_0(Sx + Cz) + \mathrm{j}\omega t] \tag{14F.1}$$

式中，ω 是入射波频率，$k_0 = \omega/c$ 是自由空间中的波数，c 是自由空间中的光速，$C=\cos\theta_{\mathrm{I}}$，$S=\sin\theta_{\mathrm{I}}$，$\theta_{\mathrm{I}}$ 是波法向与 z 轴正向之间的夹角。令媒质沿 y 轴方向以恒定速度 v_0 运动，Σ'为媒质的静止坐标系。在Σ'中所观察到的入射波似乎是入射平面任意的任意极化波，因此有

$$\Psi'_{\mathrm{I}} = \exp[-\mathrm{j}k'_0(S'_1y' + S'_2y' + C'z') + \mathrm{j}\omega't'] \tag{14F.2a}$$

式中

$$S'_1 = \frac{S}{\gamma},\quad S'_2 = -\beta,\quad C' = \frac{C}{\gamma},\quad \omega' = \gamma\omega,\quad \beta = \frac{v_0}{c}$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \tag{14F.2b}$$

当在Σ'中观察时，等离子体中的波的指数变化形式似乎如下所示

$$\Psi'_{\mathrm{P}} = \exp[-\mathrm{j}k'_0(S'_1x' + S'_2y' + q'z') + \mathrm{j}\omega't'] \tag{14F.3}$$

式中，q'是等离子体中波的特征根，可以分为如下四种情况。

a)各向同性等离子体($\boldsymbol{B}_0=0$)：

$$q'_{1,3} = q'_{2,4} = \pm[\varepsilon - (S'^2_1 + S'^2_2)]^{1/2} \tag{14F.4a}$$

b)单 x 轴等离子体($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{x}$)：

$$q'_{1,3} = \pm[C'^2 - X'(1-S'^2_1)]^{1/2},\quad q'_{2,4} = \pm C' \tag{14F.4b}$$

c)单 y 轴等离子体($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{y}$)：

$$q'_{1,3} = \pm[C'^2 - X'(1-S'^2_2)]^{1/2},\quad q'_{2,4} = \pm C' \tag{14F.4c}$$

d)单 z 轴等离子体($\boldsymbol{B}_0=\infty\hat{z}$)：

$$q'_{1,3} = \pm[C'^2 - X'/(1-X')]^{1/2},\quad q'_{2,4} = \pm C' \tag{14F.4d}$$

式中，$\varepsilon'=(1-X')=[1-(\omega_{\mathrm{p}}/\omega')^2]$，$\omega_{\mathrm{p}}$ 为等离子体频率。相应的 q 值(在坐标系Σ中测量)可以由关系式(式(14F.14))$q=k^{\mathrm{t}}_z/k_0=\gamma q'$得到。

可以看出，q'_1(或 q_1)在每种情况中既可能是实数也可能是虚数，而 q'_2(或 q_2)在后三种情况中总是实数。对于各向同性等离子体情况，特征根为重根。对于半无限大等离子体，对应于 $q'_i(i=1,2)$的正值，仅存在两个前向行波。对于假定的场变量，当把等离子体模拟为各向异性介质，且把从等离子体中的麦克斯韦方程所得到的方程写成如下形式的状态变量方程[14]时，式(14F.4)中的 q'_i 可通过求解 $\hat{T}'$矩阵的特征值得到[14,15]。

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}'}{\mathrm{d}z'} = -\mathrm{j}k'_0\hat{T}'\hat{F}' \tag{14F.5}$$

式中，$\hat{F}'$是一个元素为(E'^{P}_{xi}，E'^{P}_{yi}，$\eta_0H'^{\mathrm{P}}_{xi}$，$\eta_0H'^{\mathrm{P}}_{yi}$)的列矩阵，$\eta_0=(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$，$\mu_0$ 与 ε_0 分别为自由空间的磁导率和介电常数，我们还得到了四种不同情况下的$\hat{T}'$。对于每一种模式，现在场分量的比值可以通过求出对应的特征向量而得到[14,15]。(特征向量方法总能给出正确的比值，而参考文献[16]中的方法对于这里所考虑的某些情况，给出的比值形式是不确定的。)现在，对于半无限大的情况，未知量减少为 E'^{P}_{x1}、E'^{P}_{x2}(或 E'^{P}_{y1}、E'^{P}_{y2})、E'^{R}_x 和 E'^{R}_y。在边界上，让切向电场和切向磁场分别相匹配，这些量现在就可以由 E'^{I}_x 和 E'^{I}_y 来求得。

在坐标系Σ中，令自由空间中的反射波的电场为

$$E^{\mathrm{R}} = (E^{\mathrm{R}}_x\hat{x} + E^{\mathrm{R}}_y\hat{y} + E^{\mathrm{R}}_z\hat{z})\Psi_{\mathrm{R}} \tag{14F.6a}$$

式中

$$\Psi_{\mathrm{R}} = \exp[-\mathrm{j}(k^{\mathrm{R}}_xx + k^{\mathrm{R}}_yy - k^{\mathrm{R}}_zz) + \mathrm{j}\omega^{\mathrm{R}}t] \tag{14F.6b}$$

可以得到

$$E_x^{\rm R}=\left(\frac{1}{\gamma}\right)E'^{\rm R}_x-\beta SE'^{\rm R}_y \tag{14F.7a}$$

$$E_y^{\rm R}=E'^{\rm R}_y \tag{14F.7b}$$

$$k_x^{\rm R}=k_0S,\quad k_y^{\rm R}=0,\quad k_z^{\rm R}=k_0C,\quad \omega^{\rm R}=\omega \tag{14F.8}$$

对于坐标系Σ中的平行极化入射波$[\boldsymbol{E}^{\rm I}=(E_x^{\rm I}\,\hat{x}+E_z^{\rm I}\,\hat{z})\Psi_{\rm I}]$，在坐标系$\Sigma'$中可以得到

$$E'^{\rm I}_x=\gamma E_x^{\rm I} \tag{14F.9a}$$

$$E'^{\rm I}_y=0 \tag{14F.9b}$$

现在，利用式(14F.7)和式(14F.9)，可以求得反射系数${}_{\parallel}R_{\parallel}=E_x^{\rm R}/E_x^{\rm I}$和${}_{\parallel}R_{\perp}=E_y^{\rm R}/E_x^{\rm I}$。

对于坐标系Σ中的垂直极化入射波$(\boldsymbol{E}^{\rm I}=E_y^{\rm I}\,\hat{y}\,\Psi_{\rm I})$，在坐标系$\Sigma'$中可以得到

$$E'^{\rm I}_x=\gamma\beta SE_y^{\rm I} \tag{14F.10a}$$

$$E'^{\rm I}_y=E_y^{\rm I} \tag{14F.10b}$$

同样地，根据式(14F.7)和式(14F.10)，可以得到${}_{\perp}R_{\parallel}=E_x^{\rm R}/E_y^{\rm I}$，${}_{\perp}R_{\perp}=E_y^{\rm R}/E_y^{\rm I}$。

令在坐标系Σ中等离子体中的透射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_i^{\rm P}=(E_{xi}^{\rm P}\,\hat{x}+E_{yi}^{\rm P}\,\hat{y}+E_{zi}^{\rm P}\,\hat{z})\Psi_{{\rm P}i}\quad(i=1,2) \tag{14F.11a}$$

式中

$$\Psi_{{\rm P}i}=\exp[-{\rm j}(k_x^{\rm t}x+k_y^{\rm t}y+k_z^{\rm t}z)+{\rm j}\omega^{\rm t}t] \tag{14F.11b}$$

利用洛伦兹变换和运动媒质中的闵可夫斯基本构关系[17]，可以得到

$$E_{xi}^{\rm P}=\left(\frac{1}{\gamma}\right)E'^{\rm P}_{xi}-\beta SE'^{\rm P}_{yi} \tag{14F.12a}$$

$$E_{yi}^{\rm P}=E'^{\rm P}_{yi} \tag{14F.12b}$$

$$H_{xi}^{\rm P}=\left(\frac{1}{\gamma}\right)H'^{\rm P}_{xi}-\beta SH'^{\rm P}_{yi} \tag{14F.13a}$$

$$H_{yi}^{\rm P}=H'^{\rm P}_{yi} \tag{14F.13b}$$

$$k_x^{\rm t}=k_0S,\quad k_y^{\rm t}=0,\quad k_z^{\rm t}=k_0\gamma q'_i,\quad \omega^{\rm t}=\omega \tag{14F.14}$$

根据式(14F.7)、式(14F.8)和式(14F.12)到式(14F.14)，推断出：对于入射 E 平面波(垂直极化)或入射 H 平面波(平行极化)，在坐标系Σ中的反射波和透射波都不再是 E 平面波或 H 平面波，而是 E 平面波和 H 平面波二者的一种线性组合(除了在单 y 轴等离子体情况中，此时透射波和反射波的极化都与入射波相同)，而入射波、反射波和透射波的传播矢量都在同一个平面上，即在入射平面上。这与先前一些研究者[10~12]所得到的结论是一致的。

到目前为止，我们已经概述了在坐标系Σ中求等离子体和自由空间中场量分量的方法。下面将讨论功率反射系数和透射系数。

14F.3　功率反射系数和透射系数

功率反射系数ρ和功率透射系数τ分别由下面两个公式所定义：

$$\rho=-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_{\rm R}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_{\rm I}} \tag{14F.15}$$

和

$$\tau=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_{\rm t}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_{\rm I}} \tag{14F.16}$$

式中，$\boldsymbol{n}$是z轴方向的单位矢量，$S_{\rm I}$、$S_{\rm R}$和$S_{\rm t}$分别是入射波、反射波和透射波的坡印亭矢量的时间平均值。对于平行极化和垂直极化，式(14F.15)可分别简化为下列形式[16]：

表 14F.1 平行极化波和垂直极化波在不同情况下的功率反射系数(ρ)和功率透射系数(τ)

种类		$\rho_{\parallel}$	$\rho_{\perp}$	$\tau_{\parallel}$	$\tau_{\perp}$
单 x 轴	q_1'为实数	$\frac{\gamma^2 C^2}{\gamma^2-S^2}\left\|\frac{C'-q_1'}{C'+q_1'}\right\|^2$	$\left(\frac{\beta^2 S^2}{C^2}\right)\rho_{\parallel}$	$\frac{\gamma^2 C^2}{\gamma^2-S^2}\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}+\frac{\gamma^2\beta^2 S^2}{\gamma^2-S^2}$	$\frac{\gamma^2\beta^2 S^2}{\gamma^2-S^2}\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}+\frac{\gamma^2 C^2}{\gamma^2-S^2}$
	q_1'为虚数	$\frac{\gamma^2 C^2}{\gamma^2-S^2}$	$\left(\frac{\beta^2 S^2}{C^2}\right)\rho_{\parallel}$	$\frac{\gamma^2\beta^2 S^2}{\gamma^2-S^2}$	$\frac{\gamma^2 C^2}{\gamma^2-S^2}$
	q_1'为实数	0	$\left\|\frac{C'-q_1'}{C'+q_1'}\right\|^2$	1	$\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}$
单 y 轴	q_1'为虚数	0	1	1	0
	q_1'为实数	$\frac{\gamma^2 S^2}{\gamma^2-C^2}\left\|\frac{C'-q_1'}{C'+q_1'}\right\|^2$	$\left(\frac{\beta^2 C^2}{S^2}\right)\rho_{\parallel}$	$\frac{\gamma^2 S^2}{\gamma^2-C^2}\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}+\frac{\gamma^2\beta^2 C^2}{\gamma^2-C^2}$	$\frac{\gamma^2\beta^2 C^2}{\gamma^2-C^2}\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}+\frac{\gamma^2 S^2}{\gamma^2-C^2}$
单 z 轴	q_1'为虚数	$\frac{\gamma^2 S^2}{\gamma^2-C^2}$	$\left(\frac{\beta^2 C^2}{S^2}\right)\rho_{\parallel}$	$\frac{\gamma^2\beta^2 C^2}{\gamma^2-C^2}$	$\frac{\gamma^2 S^2}{\gamma^2-C^2}$
	q_1'为实数	$\left[\left(\frac{C'-q_1'}{C'+q_1'}\right)^2-\frac{4S^2X'^2C'q_1'}{[(C'+q_1')(\varepsilon'C'+q_1')]^2}\right]$	$\left[\left(\frac{(C'-q_1')}{(C'+q_1')}\right)^2-\frac{4\beta^2C^2X'^2C'q_1'}{[(C'+q_1')(\varepsilon'C'+q_1')]^2}\right]$	$\left(\frac{4\varepsilon q_1'C'}{(q_1'+C'\varepsilon')^2}-\frac{4\beta^2C^2X'^2C'q_1'}{[(C'+q_1')(q_1'+\varepsilon'C')]^2}\right)$	$\left(\frac{4C'q_1'}{(C'+q_1')^2}+\frac{4\beta^2C^2X'^2C'q_1'}{[(C'+q_1')(q_1'+\varepsilon'C')]^2}\right)$
各向同性	q_1'为虚数	1	1	0	0

资料来源：经过允许转载，来自 *J. Appl. Phys.*，48(2)，587-591. Copyright(1977)，American Institute of Physics.

$$\rho_{\parallel} = |_{\parallel}R_{\parallel}|^2 + C^2 |_{\parallel}R_{\perp}|^2 \tag{14F.17a}$$

和

$$\rho_{\perp} = |_{\perp}R_{\perp}|^2 + \frac{1}{C^2 |_{\perp}R_{\parallel}|^2} \tag{14F.17b}$$

式(14F.16)具有下式的形式

$$\tau = \mathrm{Re}[(E_{x1}^{\mathrm{P}}\Psi_{\mathrm{P1}} + E_{x2}^{\mathrm{P}}\Psi_{\mathrm{P2}})(H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*} + H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*}) - (E_{y1}^{\mathrm{P}}\Psi_{\mathrm{P1}} + E_{y2}^{\mathrm{P}}\Psi_{\mathrm{P2}})(H_{x1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*} + H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*})](n \cdot S_1)^{-1} \tag{14F.18}$$

在 q'_1 的实数和虚数范围内，我们利用式(14F.17)和式(14F.18)已经分别得到了平行极化与垂直极化波在不同情况下的功率反射系数(ρ)及透射系数(τ)。这些结果见表 14F.1。可以看出，$\rho+\tau=1$。当媒质为电介质时，表 14F.1 给出的各向同性等离子体的 $\rho_{\perp}$ 和 $\tau_{\perp}$ 的表达式与 Shiozawa 等人[10]给出的结果一致。表 14F.1 给出的单 y 轴情况下 $\rho_{\perp}$ 的表达式与 Kong 和 Cheng[12]的结果一致。(但是他们在论文中图 14F.4 给出的 $\theta=20°$和 $30°$时的数值结果，表明反射功率先随 β 增大再随 β 减小，然而，实际上，在媒质静止时反射功率为最大值，且随媒质速度的增大而减小。)

14F.4 功率传输到等离子体中的机制

当入射波为垂直极化波时，对于各向同性电介质的情况，Shiozawa 等人[10]将反射功率和透射功率分解为由 E 波分量和 H 波分量分别所产生的贡献，结果表明反射功率和透射功率的 H 波分量之和等于 0，而反射功率和透射功率的 E 波分量之和等于 1。

我们分析发现对于各向同性等离子体情况，当 q'_1 为实数时，同样的结论依然成立。但当 q'_1 为虚数时，透射功率的 H 波分量和 E 波分量大小相等，但符号相反，因此净透射功率等于 0，而反射功率的 H 波分量和 E 波分量之和等于 1。

在单 y 轴情况中，对于入射 E 波(垂直极化)，在等离子体中只能激发出对应于 q'_1 模式的 E 波。因此，每当 q'_1 是虚数时，透射功率等于 0。对于入射 H 波(平行极化)，在等离子体中仅能激发出对应于 q'_2 模式的 H 波，并且由于 $q'_2=C'(q_2=C)$，所以在分界面处是完全匹配的，全部入射功率都会透射到等离子体中去。

对于单 x 轴和单 z 轴这两种情况，在等离子体中会激发出两种模式。即使 q'_1 变为虚数(对波频率和媒质速度的某一个特定范围)，对应的波是倏逝波，仍然随第二个波会有一定量的功率透射，q'_2 总是实数。下面讨论这种功率传输的机理。

当 q'_1 为实数时，根据式(14F.18)可以证明，对于透射功率来说，$\mathrm{Re}(E_{x1}^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*} + E_{x2}^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$确实等于 $\mathrm{Re}(E_{y1}^{\mathrm{P}}H_{x2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*} + E_{y2}^{\mathrm{P}}H_{x1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$。因此，这些分量在等离子体中贡献的净功率任何时候都等于 0。这时，功率的贡献来自分量 $\mathrm{Re}(E_{x1}^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*} + E_{x2}^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*})$和 $\mathrm{Re}(E_{y1}^{\mathrm{P}}H_{x2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*} + E_{y2}^{\mathrm{P}}H_{x2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*})$，这样与 q'_1 和 $q'_2=C'$对应的模式均携带功率。

当 q'_1 为虚数时，根据式(14F.18)可以证明，$\mathrm{Re}(E_{x1}^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*} + E_{x2}^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$确实等于 $\mathrm{Re}(E_{y1}^{\mathrm{P}}H_{x2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*} + E_{y2}^{\mathrm{P}}H_{x1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$。因此，在这种情况中，这些分量在等离子体中贡献的净功率在任何时候也等于 0。由 $\mathrm{Re}(E_{x1}^{\mathrm{P}}H_{y1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$和 $\mathrm{Re}(E_{y1}^{\mathrm{P}}H_{x1}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P1}}\Psi_{\mathrm{P1}}^{*})$贡献的功率也等于 0。因此，当 q'_1 为虚数时，透入等离子体中的功率仅由分量 $\mathrm{Re}(E_{x2}^{\mathrm{P}}H_{y2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*})$和 $\mathrm{Re}(E_{y2}^{\mathrm{P}}H_{x2}^{\mathrm{P}*}\Psi_{\mathrm{P2}}\Psi_{\mathrm{P2}}^{*})$所产生。该功率由等离子体中对应于特征根 $q'_2=C'$的模式所携带。

14F.5 数值结果与讨论

图 14F.1～图 14F.3 分别给出了 $C=0.5$，β 取不同值时对于单 y 轴、单 x 轴和单 z 轴

等离子体，ρ随归一化频率$\Omega=\omega/\omega_p$变化的曲线。对于上述各种情况，在插图给出了$C=0.5$，$\beta=0$和0.75时，q_1'随Ω变化的曲线。从物理图形以及仅出现β的偶次项的相关公式中可以明显看出，β的符号并不影响最终的结果。对于单y轴等离子体和E波入射的情况(见图14F.1)，当$0<\Omega<(1/\gamma)C$时q_1'是虚数，而当$(1/\gamma)C\leqslant\Omega<\infty$时$q_1'$是实数。对于在$\Omega\geqslant 1/C$范围内的一个给定值$\Omega$，当$0\leqslant\beta\leqslant 1$时$q_1'$是实数，且$\rho_\perp$随$\beta$增大而减小。而且，当$\Omega<1/C$时，在$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1[=(1-C^2\Omega^2)^{1/2}]$范围内$q_1'$是虚数，而在$\beta_1\leqslant\beta\leqslant 1$范围内$q_1'$是实数。在这个$\Omega$范围内，当$\beta\leqslant\beta_1$时$\rho_\perp$等于1，而在$\beta>\beta_1$时$\rho_\perp$随$\beta$增大而减小。

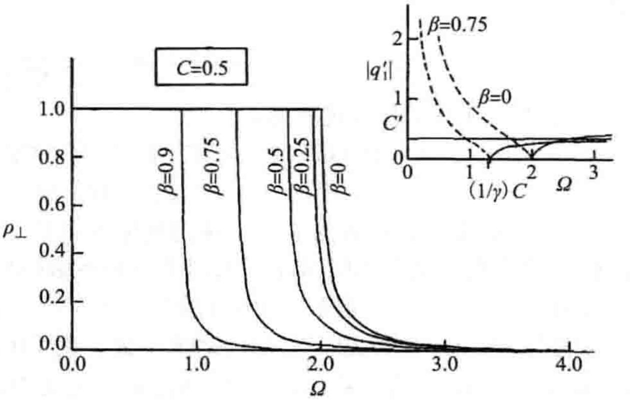


图14F.1 β为参数，垂直极化波入射到一个运动单y轴等离子体上时的功率反射系数。在插图中给出了特征根的变化曲线(虚线：q_1'为虚数；实线：q_1'为实数)(经过允许转载，图片源自*J. Appl. Phys.*，48(2)，587-591. Copyright (1977)，American Institute of Physics.)

对于单x轴等离子体和H波入射的情况(见图14F.2)，在$0\leqslant\Omega\leqslant\Omega_1[=(1-S_1'^2)^{1/2}/C]$范围内$q_1'$是虚数，而在$\Omega_1<\Omega\leqslant\infty$范围内$q_1'$是实数。在这种情况下，我们对$\Omega$的三个范围很感兴趣。对于在$\Omega\geqslant 1/C$范围内的一个给定$\Omega$值，$q_1'$在整个$\beta$范围内都是实数，且$\rho_\parallel$随$\beta$的增大而增大。当$\Omega\leqslant 1$时，$q_1'$在整个$\beta$范围内都是虚数，且$\rho_\parallel$随$\beta$的增大而减小。当$1<\Omega<1/C$时，当$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1[=C(\Omega^2-1)^{1/2}/S]$时$q_1'$是实数，而当$\beta_1\leqslant\beta\leqslant 1$时$q_1'$是虚数。在这个$\Omega$范围内，当$\beta\leqslant\beta_1$时$\rho_\parallel$随$\beta$的增大而增大，而当$\beta\geqslant\beta_1$时$\rho_\parallel$随$\beta$的增大而减小。然而，当$\Omega$在$q_1'$的虚数范围内时，$\rho_\parallel$是常数(见图14F.2)。

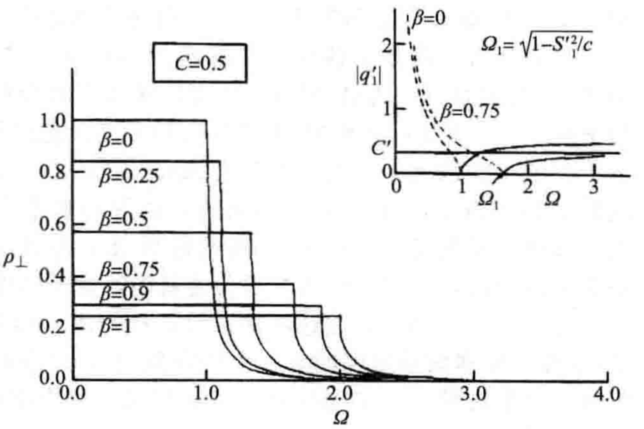


图14F.2 β为参数，平行极化波入射到一个运动单x轴等离子体上时的功率反射系数。在插图中给出了特征根的变化曲线(虚线：q_1'为虚数；实线：q_1'为实数)(经过允许转载，图片源自*J. Appl. Phys.*，48(2)，587-591. Copyright (1977)，American Institute of Physics.)

图14F.3所示为单z轴等离子体的情况。在这种情况下，在$1/\gamma<\Omega\leqslant 1/C$范围内$q_1'$是虚数，而在$0<\Omega<1/\gamma$和$1/C<\Omega<\infty$范围内$q_1'$是实数。这里，我们同样对$\Omega$的三个范围很感兴趣。对于在$\Omega\leqslant 1$范围内的一个给定$\Omega$值，当$0<\beta\leqslant\beta_1[=(1-\Omega)^{1/2}]$时$q_1'$是实数，当$\beta_1<\beta\leqslant 1$时$q_1'$是虚数。当$\beta=\beta_1$时，$q_1'$等于无穷大，而当$\beta=1$时，$q_1'$等于0。在$\Omega$的这个范围内，$\rho_\parallel$在$\beta<\beta_1$范围内先随$\beta$的增大而增大，而后在$\beta>\beta_1$范围内随$\beta$的增大而减小。当$1<\Omega<1/C$时，对于任何$\beta$值$q_1'$都是虚数，且$\rho_\parallel$随$\beta$增大而减小。当$\Omega>1/C$时，对于任何$\beta$值$q_1'$都是实数，且$\beta$增大时$\rho_\parallel$会增大，但这个效应是可以忽略不计的，因而在这个范围内仅给出了一条曲线。在这种情况下，我们也注意到有趣的现象：在q_1'取虚数时，

$\rho_{\parallel}$ 是一个不随 Ω 变化的常数(见图 14F.3)。

这里没有给出各向同性等离子体的数值结果。在这种情况下，对于所有的 β 值，我们将看到在 $0<\Omega\leqslant 1/C$ 范围内 q'_1 是虚数，而在 $1/C<\Omega\leqslant\infty$ 范围内 q'_1 是实数。对于所有的 β 值，在 q'_1 为虚数的范围内 $\rho_{\parallel}$ 等于 1。在 q'_1 为实数的范围内，$\rho_{\parallel}$ 随 β 的增大而增大，但 β 的影响却很小。

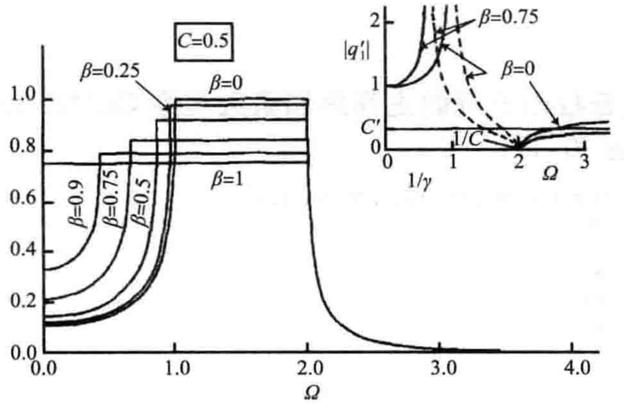


图 14F.3 β 为参数，平行极化波入射于一个运动单 z 轴等离子体上时的功率反射系数。在插图中给出了特征根的变化曲线(虚线：q'_1 为虚数；实线：q'_1 为实数)(经过允许转载，图片源自 *J. Appl. Phys.*，48(2)，587-591. Copyright (1977)，American Institute of Physics.)

同样，我们也推导出了等离子体平板情况的表达式，计算结果表明在 q'_1 为实数的范围内存在振荡，其振荡的性质可以像前面一样给出定性的解释[1,18]。

致谢

作者们感谢评阅人所提出的宝贵意见。

参考文献

1. Kalluri, D. and Prasad, R. C., *Appl. Sci. Res.*, 27, 415, 1973.
2. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 37, 3079, 1966.
3. Yeh, C., *J. Appl. Phys.*, 38, 2871, 1967.
4. Lee, S. W. and Lo, Y. T., *J. Appl. Phys.*, 38, 870, 1967.
5. Chawla, B. R. and Unz, H., *IEEE Trans. Antenna Propag.*, AP-17, 771, 1969.
6. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *IEEE Trans. Antenna Propag.*, AP-21, 63, 1973.
7. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.*, 44, 2440, 1973.
8. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *J. Appl. Phys.*, 44, 4518, 1973.
9. Kalluri, D. and Shrivastava, R. K., *IEEE Trans. Plasma Sci.*, PS-2, 206, 1974.
10. Shiozawa, T., Hazma, K., and Kumgai, N., *J. Appl. Phys.*, 38, 4459, 1967.
11. Pyati, V. P., *J. Appl. Phys.*, 38, 652, 1967.
12. Kong, J. A. and Cheng, D. K., *J. Appl. Phys.*, 39, 2282, 1968.
13. Cheng, D. K. and Kong, J. A., *Proc. IEEE*, 56, 248, 1968.
14. Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1961.
15. Derusso, P. M., Roy, R. J., and Close, C. M., *State Variables for Engineers*, Wiley, New York, NY, 1965, p. 232.
16. Chawla, B. R., Kalluri, D., and Unz, H., *Radio Sci.*, 2, 869, 1967.
17. Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic press, New York, 1964, p. 287.
18. Kalluri, D. and Prasad, R. C., *Int. J. Electron.*, 35, 801, 1973.

附录16A

MATLAB 程序

16A.1 求解拉普拉斯方程的主程序和函数程序 GLANT 的例子(参见图 16.12)

```
function [S,T]=GLANT(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,xn,yn);
% 总体合成基于节点的二维三角形单元
for e=1:Ne;
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        n(3,e)=n3L(e);
end
% 初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
        % 各个单元的节点坐标
        for i=1:3;
                x(i)=xn(n(i,e));
                y(i)=yn(n(i,e));
        end
        % 计算单元矩阵元素
        b(1)=y(2) -y(3);
        b(2)=y(3) -y(1);
        b(3)=y(1) -y(2);
        c(1)=x(3) -x(2);
        c(2)=x(1) -x(3);
        c(3)=x(2) -x(1);
        Area=0.5*abs (b(2)*c(3) - b(3)*c(2));
        % 计算单元矩阵元素
        for i=1:3;
                for j=1:3;
                        Se(i,j)=(0.25/Area)*(b(i)*b(j)+c(i)*c(j));
                        if i==j
                                Te(i,j)=Area/6;
                        else
                                Te(i,j)=Area/12;
                        end
% 将单元矩阵合成到总体FEM矩阵中
                        S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+Se(i,j);
                        T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+Te(i,j);
                end
        end
end
    >> Ne=2;
    >> Nn=4;
    >> n1L=[1,2];
    >> n2L=[2,3];
    >> n3L=[4,4];
    >> xn=[0.8,1.4,2.1,1.2];
    >> yn=[1.8,1.4,2.1,2.7];
    >> [S,T]=GLANT(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,xn,yn);
    >> S
```

```
S =
 1.2357      -0.7786       0            -0.4571
-0.7786       1.2500      -0.4571       -0.0143
 0           -0.4571       0.8238       -0.3667
-0.4571      -0.0143      -0.3667        0.8381

>> T

T =

0.0583       0.0292       0             0.0292
0.0292       0.1458       0.0438        0.0729
0            0.0438       0.0875        0.0438
0.0292       0.0729       0.0438        0.1458

>> %frn: 自由节点数组
>> frn = [1,3];
>> %prn: 指定节点数组
>> prn = [2,4];
>> %Vprn: 指定节点上的电位
>> Vprn = [10,-10];
>> Sff = S(frn,frn)

Sff =

1.2357     0
0          0.8238

>> Sfp = S(frn,prn)

Sfp =

-0.7786       -0.4571
-0.4571       -0.3667

>> Vf = -inv(Sff)*Sfp*(Vprn)'

Vf =

2.6012
1.0983

>>
```

16A.2 求解泊松方程的主程序和函数程序 PGLANT2 的例子(参见图 16.14)

```
function [S,T,g] = PGLANT2(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,Rho,Epr,xn,yn);
% 泊松方程的解
% V=-Rho/(epsilon0*epr)的拉普拉斯算子
% Rho是每个单元中电荷体密度值的数组
% Epr是每个单元中介电常数数值的数组
% 总体合成基于节点的二维三角形单元
for e=1:Ne;
       n(1,e)=n1L(e);
       n(2,e)=n2L(e);
       n(3,e)=n3L(e);
end

% 初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
g=zeros(Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
```

```
        % 各个单元的节点坐标
        for i=1:3;
                x(i)=xn(n(i,e));
                y(i)=yn(n(i,e));
        end
        % 计算单元矩阵元素
        b(1)=y(2) - y(3);
        b(2)=y(3) - y(1);
        b(3)=y(1) - y(2);
        c(1)=x(3) - x(2);
        c(2)=x(1) - x(3);
        c(3)=x(2) - x(1);
        Area = 0.5 * abs (b(2)*c(3) - b(3) * c(2));
        % 计算单元矩阵元素
        ge = Rho(e) * Area/3;
        for i=1:3;
                        g(n(i,e))=g(n(i,e)) +ge;
                for j=1:3;
                        Se(i,j) = (0.25/Area)*(b(i)*b(j) +c(i)
*c(j))*Epr(e)*8.854*10^(-12);
                        if i==j
                                Te(i,j)=Area/6;
                        else
                                Te(i,j)=Area/12;
                        end
% 将单元矩阵合成到总体FEM矩阵中
                        S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+Se(i,j);
                        T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+Te(i,j);
                end
        end
end
>> Nn=7;
>> Ne=6;
>> n1L=[1,1,1,1,1,1];
>> n2L=[2,3,4,5,6,7];
>> n3L=[3,4,5,6,7,2];
>> xn=[0.5,0,0,1,1,1,0];
>> yn=[1,1,0,0,1,2,2];
>> Rho=[1,1,1,0,0,0]*10^(-5);
>> Epr=[2.5,2.5,2.5,1,1,1];
>> [S,T,g] =PGLANT2(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,Rho,Epr,xn,yn);
>> frn=[1];
>> Sff=S(frn,frn);
>> gf=g(frn);
>> Vf=inv(Sff)*(gf)

Vf =

4.3026e+004

>>
```

16A.3 应用函数程序 GLANT 求解均匀矩形波导问题(参见图 16.18)的主程序例子

```
>> % 主程序: 矩形波导
>> Nn=16;
>> Ne=18;
>> xn=[0,1/3,2/3,3/3,0,1/3,2/3,3/3,0,0,3/3,3/3,1/3,2/3,1/3,2/3];
>> yn=[0,0,0,0,1/6,1/6,1/6,1/6,2/6,3/6,2/6,3/6,2/6,2/6,3/6,3/6];
>> n1L=[2,2,2,2,3,3,5,5,9,9,7,8,14,11,6,6,13,13];
>> n2L=[5,6,3,7,4,8,6,13,13,15,8,11,11,12,7,14,14,16];
>> n3L=[1,5,7,6,8,7,13,9,15,10,14,14,16,16,14,13,16,15];
>> [S,T] =GLANT(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,xn,yn);
```

```
>> ATE = inv(T) * S;
>> [EVTE,kcsqTE] = eig(ATE);
>> kcTE = sqrt(diag(kcsqTE));
>> kcTES = sort(kcTE)

kcTES =

 0.0000
 3.2795
 6.5158
 7.2817
 8.1754
10.3923
12.1165
14.3625
14.9742
17.1434
20.7846
21.1244
22.4283
23.3670
25.3472
26.6653

>> frn = [6,7,13,14];
>> STM = S(frn,frn);
>> TTM = T(frn,frn);
>> ATM = inv(TTM) * STM;
>> [EVTM,kcsqTM] = eig(ATM);
>> kcTM = sqrt(diag(kcsqTM));
>> kcTMS = sort(kcTM)

kcTMS =

 8.2014
12.1845
17.0024
20.4251

>>
```

16A.4 基于二阶三角形单元求解均匀矩形波导问题(参见图 16.23)的主程序和函数程序 GLAN2T 例子

```
>> % 应用二阶三角形单元的例子
>> % 等腰三角形波导
>> % 为了说明起见，取两个单元
>> % 程序由D.K. Kalluri编写
>> Nn = 9;
>> Ne = 2;
>> n1L = [1 1];
>> n2L = [2 3];
>> n3L = [3 7];
>> n4L = [4 6];
>> n5L = [5 8];
>> n6L = [6 9];
>> x([1 4 6 9]) = [ 0 1 0.5 0];
>> y([1 4 6 9]) = [ 0 0 0.5 1];
>> [S,T] = GLAN2T(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,n4L,n5L,n6L,x,y);
>> ATE = inv(T)*S;
>> [EVTE,kcsqTE] = eig(ATE);
>> kcTE = sqrt(sort(kcsqTE))

kcTE =
```

```
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
0        0        0        0       0       0        0       0       0
17.7247  14.7641  10.9545  4.6926  6.7702  13.7638  7.7460  0.0000  3.2492

>>
```

```
function [S,T]=GLAN2T(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,n4L,n5L,n6L,xn,yn);
% 总体合成基于节点的二维二阶三角形单元
% 程序由D.K. Kalluri编写
for e=1:Ne;
       n(1,e)=n1L(e);
       n(2,e)=n2L(e);
       n(3,e)=n3L(e);
       n(4,e)=n4L(e);
       n(5,e)=n5L(e);
       n(6,e)=n6L(e);
end
Q1=(1/6)*[0,0,0,0,0,0;0,8,-8,0,0,0;0,-8,8,0,0,0;
       0,0,0,3,-4,1;0,0,0,-4,8,-4;0,0,0,1,-4,3];
Q2=(1/6)*[3,0,-4,0,0,1;0,8,0,0,-8,0;-4,0,8,0,0,-4;
       0,0,0,0,0,0;0,-8,0,0,8,0;1,0,-4,0,0,3];
Q3=(1/6)*[3,-4,0,1,0,0;-4,8,0,-4,0,0;0,0,8,0,-8,0;
       1,-4,0,3,0,0;0,0,-8,0,8,0;0,0,0,0,0,0];
Tek=(1/180)*[6,0,0,-1,-4,-1;0,32,16,0,16,-4;0,16,32,-4,16,0;
       -1,0,-4,6,0,-1;-4,16,16,0,32,0;-1,-4,0,-1,0,6];
% 初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
       % 各个单元的节点坐标
       x(1)=xn(n(1,e));
       x(2)=xn(n(4,e));
       x(3)=xn(n(6,e));
       y(1)=yn(n(1,e));
       y(2)=yn(n(4,e));
       y(3)=yn(n(6,e));

% 计算单元矩阵元素
       b(1)=y(2)-y(3);
       b(2)=y(3)-y(1);
       b(3)=y(1)-y(2);
       c(1)=x(3)-x(2);
       c(2)=x(1)-x(3);
       c(3)=x(2)-x(1);
       Area=0.5*abs (b(2)*c(3) - b(3)*c(2));
       COTTH1=-(0.5/Area)*(b(2)*b(3)+c(2)*c(3));
COTTH2=-(0.5/Area)*(b(3)*b(1)+c(3)*c(1));
COTTH3=-(0.5/Area)*(b(1)*b(2)+c(1)*c(2));
Te=Area*Tek;
Se=COTTH1*Q1+COTTH2*Q2+COTTH3*Q3;
% 计算单元矩阵元素
for i=1:6;
       for j=1:6;
              % 将单元矩阵合成到总体FEM矩阵中
              S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+ Se(i,j);
              T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+ Te(i,j);
       end
```

```
        end
end
```

16A.5 求解均匀矩形波导问题(参见图 16.28)的主程序和函数程序 GLAET(基于一阶矢量形状函数的三角形单元)的例子

```
>> % 基于棱边的一阶有限元方法
>> % 应用两个三角形单元计算等腰三角形波导问题
>> Nn=4;
>> Neg=5;
>> Ne=2;
>> xn=[0,1,0.5,0];
>> yn=[0,0,0.5,1];
>> n1L=[1 1];
>> n2L=[2 3];
>> n3L=[3 4];
>> n1EL=[1,-3];
>> n2EL=[2,4];
>> n3EL=[3,5];
>> [E,F]=GLAET(Neg,Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,n1EL,n2EL,n3EL,xn,yn);
>> %TM模式(Htan是场量),所有棱边都是自由棱边
>> ATM=inv(F)*E;
>> [EVTM,kcsqTM]=eig(ATM);
>> kcTM=sqrt(diag(kcsqTM));
>> kcTMs=sort(kcTM)

kcTMs =

0
0.0000
0+0.0000i
6.0000
7.6345
>> %TE模式,Etan是场量,非导电棱边是3
>> %利用非导电棱边来定义nce数组
>> nce=[3];
>> ETE=E(nce,nce);
>> FTE=F(nce,nce);
>> ATE=inv(FTE)*ETE;
>> [EVTE,kcsqTE]=eig(ATE);
>> kcTE=sqrt(diag(kcsqTE));
>> kcTEs=sort(kcTE)

kcTEs =

3.4641

>>


% GLAET.M
function [E,F]=glaet(Neg, Nn, Ne, n1L, n2L, n3L, n1EL, n2EL, n3EL, xn, yn)
for e=1:Ne
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        n(3,e)=n3L(e);
        ne(1,e)=n1EL(e);
        ne(2,e)=n2EL(e);
        ne(3,e)=n3EL(e);
end

E=zeros(Neg, Neg);
F=zeros(Neg, Neg);
```

```
for e=1:Ne

        for i=1:3;
                x(i)=xn(n(i,e));
                y(i)=yn(n(i,e));
        end

        b(1)=y(2)-y(3);
        b(2)=y(3)-y(1);
        b(3)=y(1)-y(2);
        c(1)=x(3)-x(2);
        c(2)=x(1)-x(3);
        c(3)=x(2)-x(1);

        Area=0.5*abs(b(2)*c(3)-b(3)*c(2));
        l(1)=sqrt(b(3)*b(3)+c(3)*c(3));
        l(2)=sqrt(b(1)*b(1)+c(1)*c(1));
        l(3)=sqrt(b(2)*b(2)+c(2)*c(2));

        for i=1:3
                for j=1:3
                        ff(i,j)=b(i)*b(j)+c(i)*c(j);
           end
        end

        G(1,1)=2*(ff(2,2)-ff(1,2)+ff(1,1));
        G(2,2)=2*(ff(3,3)-ff(2,3)+ff(2,2));
        G(3,3)=2*(ff(1,1)-ff(3,1)+ff(3,3));
        G(2,1)=G(1,2);
        G(1,3)=ff(2,1)-2*ff(2,3)-ff(1,1)+ff(1,3);
        G(3,1)=G(1,3);
        G(2,3)=ff(3,1)-ff(3,3)-2*ff(2,1)+ff(2,3);
        G(3,2)=G(2,3);

        for i=1:3
                for j=1:3
                        Ee(i,j)=(1/Area)*(l(i)*l(j));
                        Fe(i,j)=(1/48)*(1/Area)*l(i)*l(j)*G(i,j);
                        if(ne(i,e)<0)
                        Ee(i,j)=-Ee(i,j);
                        Fe(i,j)=-Fe(i,j);
                else;
                end;

                if(ne(j,e)<0);
                        Ee(i,j)=-Ee(i,j);
                        Fe(i,j)=-Fe(i,j);
                else;
                end;

                ane(i,e)=abs(ne(i,e));
                ane(j,e)=abs(ne(j,e));
                E(ane(i,e),ane(j,e))=E(ane(i,e),ane(j,e))+Ee(i,j);
                F(ane(i,e),ane(j,e))=F(ane(i,e),ane(j,e))+Fe(i,j);
        end

    end
end
```

16A.6 应用函数程序 INHWGD 求解均匀矩形波导问题(参见图 16.28)的主程序例子

附录 18C 给出了函数 INHWGD，基于节点的一阶标量形状函数代表纵向分量，基于

棱边的一阶矢量形状函数代表横向分量。采用了三角形单元。

```
>> % 非均匀波导例子
>> Ne = 2;
>> Nn = 4;
>> Neg = 5;
>> xn = [0,1,1,0];
>> yn = [0,0,1,1];
>> n1L = [1,1];
>> n2L = [2,3];
>> n3L = [3,4];
>> mur = [1,1];
>> epr = [4,1];
>> k0 = 5;
>> n1EL = [1,-3];
>> n2EL = [2,4];
>> n3EL = [3,5];
>> [Att,Btt,Btz,Bzz,C] = INHWGD(epr,mur,k0,Neg,Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,n1EL,n2EL,
   n3EL,xn,yn);
>> ncE = 3;
>> nce = 3;
>> C = C(nce,nce);
>> [EVIN,GAMASQ] = eig(C);
>> GAMA = sqrt(sort(GAMASQ));
>> GAMA
GAMA =

0 + 6.5192i

>>
```

附录 16B 余切公式

16B.1 余切公式

根据式(16.52)，由三角单元三个顶点的坐标可以确定出 **S** 矩阵中的每一个元素，为了方便起见，在这里重新给出：

$$S_{jk}^{(e)} = \frac{1}{4A}(b_j b_k + c_j c_k)$$

另一方面，也可以应用式(16.53)，由三角单元三个顶点的内角给出 **S** 矩阵中的各个元素，为了方便在此重新给出：

$$[\boldsymbol{S}^{(e)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cot\theta_2 + \cot\theta_3 & -\cot\theta_3 & -\cot\theta_2 \\ -\cot\theta_3 & \cot\theta_1 + \cot\theta_3 & -\cot\theta_1 \\ -\cot\theta_2 & -\cot\theta_1 & \cot\theta_1 + \cot\theta_2 \end{bmatrix}$$

进一步可以证明，式(16.53)可以写为

$$[\boldsymbol{S}^{(e)}] = \sum_{i=1}^{3} \cot\theta_i \boldsymbol{Q}_i$$

式中，$[Q_i]$由式(16.108)～式(16.110)给出。在本附录中，我们将证明基于几何学知识和相关的三角恒等式[1]，可由式(16.51)得到式(16.53)。根据定义，应用式(16.39b)、式(16.39c)、式(16.42b)、式(16.42c)、式(16.44b)和式(16.44c)，由三角单元三个顶点坐标所得到的各个 b 和 c 如图 16B.1 所示。采用循环值记号法，我们有

$$b_i = y_{i+1} - y_{i+2}, i = 1,2,3,4,5 \tag{16B.1}$$

$$c_i = x_{i+2} - x_{i+1} \tag{16B.2}$$

这里 i 是循环值 1，2，3。$i=4$ 与 $i=1$ 相同，$i=5$与 $i=2$ 相同。

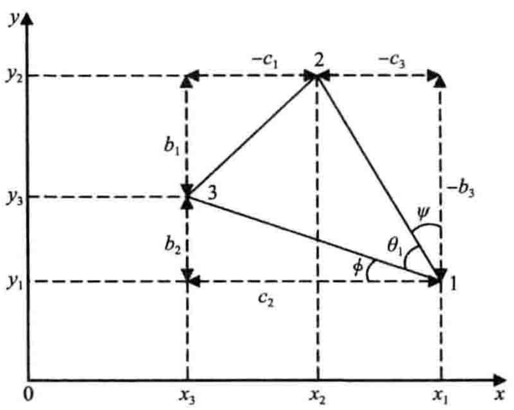


图 16B.1 利用坐标表示的 b 和 c 的定义

注意在 b 和 c 的有些表达式中的负号。例如

$$c_1 = x_3 - x_2$$

在图 16B.1 中可以看出，因为 x_3 小于 x_2，所以将 c_1 标记为$-c_1$。也应该注意，我们规定三个节点的编号按逆时针顺序标分别记为 1、2 和 3：

$$\cot\theta_1 = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \phi - \psi\right) = \tan(\phi + \psi) = \frac{\tan\phi + \tan\psi}{1 - \tan\phi\tan\psi}$$

$$\text{所以 } \cot\theta_1 = \frac{b_2/c_2 + (-c_3)/(-b_3)}{1-(b_2/c_2)(-c_3/-b_3)} = \frac{(b_2 b_3 + c_2 c_3)b_3 c_2}{(c_2 b_3 - b_2 c_3)b_3 c_2} = -\frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{b_2 c_3 - b_3 c_2} \tag{16B.3}$$

因为在式(16B.3)中的分母是两倍的三角单元面积，所以有

$$\cot\theta_1 = -\frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{2A} \tag{16B.4}$$

可以把式(16B.4)写成如下一般形式

$$b_i b_j + c_i c_j = -2A\cot\theta_k, \quad i \neq j \tag{16B. 5}$$

接下来，考虑如果 $i=j$，看看是否需要做任何修正。令 $i=j=1$，我们将证明有如下结果：

$$b_1^2 + c_1^2 = 2A(\cot\theta_2 + \cot\theta_3)$$

证明

$$\cot\theta_2 = -\frac{b_3 b_1 + c_3 c_1}{2A}$$

$$\cot\theta_3 = -\frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2A}$$

$$\begin{aligned}2A(\cot\theta_2 + \cot\theta_3) &= -(b_3 b_1 + c_3 c_1 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = -[b_1(b_2 + b_3) + c_1(c_2 + c_3)] \\ &= -[b_1(-b_1) + c_1(-c_1)] = b_1^2 + c_1^2\end{aligned}$$

上面的结果可以归纳为

$$b_i^2 + c_i^2 = 2A[\cot\theta_j + \cot\theta_k] \tag{16B. 6}$$

由式(16.51)、式(16B.5)和式(16B.6)，就可以得到式(16.53)。

16B.2 三角单元的面积

顺便提一下，从几何图形中也可以看出，式(16.37)中分母的行列式是两倍的三角单元面积。下面给出详细的证明过程。有向直线线段 $\overrightarrow{12} = \overline{D}$ 由下式给出

$$\overrightarrow{12} = \overline{D} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(y_2 - y_1) = \hat{x}c_3 - \hat{y}b_3 \tag{16B. 7}$$

有向直线线段 $\overrightarrow{13} = \overline{E}$ 为：

$$\overrightarrow{13} = \overline{E} = \overline{r}_3 - \overline{r}_1 = \hat{x}(x_3 - x_1) + \hat{y}(y_3 - y_1) = -\hat{x}c_2 + \hat{y}b_2$$

$\overline{D}$ 和 $\overline{E}$ 的向量积的模值为

$$|\overline{D} \times \overline{E}| = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ c_3 & -b_3 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left| \hat{x}(0-0) - \hat{y}(0-0) + \hat{z}(c_2 b_2 - c_2 b_3) \right| = \left| c_3 b_2 - c_2 b_3 \right|$$

由向量积的定义可知，这个模值就是两条边分别为 $\overline{D}$ 和 $\overline{E}$ 的平行四边形的面积，而平行四边形的面积是三角形面积的两倍。因此，三角单元的面积 A 为

$$A = \frac{1}{2}\left| c_3 b_2 - c_2 b_3 \right|$$

显然，如果我们将有向直线线段 $\overrightarrow{23}$ 和 $\overrightarrow{21}$ 都看做矢量，那么对于 A 我们应当得到相同的答案。另一种方法是将有向直线线段 $\overrightarrow{31}$ 和 $\overrightarrow{32}$ 都看做矢量。这样，面积 A 的另一种表达形式是：

$$A = \frac{1}{2}\left| c_1 b_3 - c_3 b_1 \right| = \frac{1}{2}\left| c_2 b_1 - c_1 b_2 \right|$$

参考文献

1. Silvester, P. P. and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers* (3rd Edition), Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.

附录16C

诺依曼边界条件：有限元方法

在这里，我们将证明自然边界条件(诺伊曼型)，即

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{16C.1}$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \tag{16C.2}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \tag{16C.3}$$

或

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{16C.4}$$

已包含在泛函极小化的要求之中，或者是被极值自然满足的，因此它不需要单独列出。在证明过程中将使用到矢量微积分中的格林第一定理和第二定理。下面先证明这两个定理。

16C.1 格林第一定理

格林第一定理可以表述为：

$$\iiint_V f_1 \nabla^2 f_2 \mathrm{d}V = \oiint_S f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_V (\overline{\nabla} f_1 \cdot \overline{\nabla} f_2)\mathrm{d}V \tag{16C.5}$$

式中，f_1 和 f_2 是两个标量函数，V 是由闭合曲面 S 所包围的体积，$\hat{n}$是垂直于该闭合曲面由内指向外的单位矢量。

参见图16C.1。

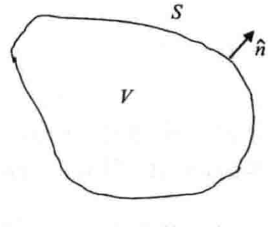


图16C.1 格林第一定理的几何图形

证明： 由矢量恒等式

$$\overline{\nabla}\cdot(f\overline{F}) = f\,\overline{\nabla}\cdot\overline{F} + \overline{\nabla} f\cdot\overline{F} \tag{16C.6}$$

$$\iiint_V (f\,\overline{\nabla}\cdot\overline{F})\mathrm{d}V = \iiint_V \overline{\nabla}\cdot(f\overline{F})\mathrm{d}V - \iiint_V \overline{\nabla} f\cdot\overline{F}\mathrm{d}V \tag{16C.7}$$

利用下面的散度定理，可以将上式右端的第一个体积分转化为一个闭合曲面积分：

$$\iiint_V \overline{\nabla}\cdot(f\overline{F})\mathrm{d}V = \oiint_S f\overline{F}\cdot\mathrm{d}S = \oiint_S fF_n\mathrm{d}S \tag{16C.8}$$

$$\therefore \iiint_V (f\,\overline{\nabla}\cdot\overline{F})\mathrm{d}V = \oiint_S fF_n\mathrm{d}S - \iiint_V \overline{\nabla} f\cdot\overline{F}\mathrm{d}V \tag{16C.9}$$

令

$$f = f_1 \tag{16C.10}$$

且

$$\overline{F} = \overline{\nabla} f_2 \tag{16C.11}$$

式中，f_1 和 f_2 是两个标量函数。将式(16C.10)和式(16C.11)代入式(16C.9)中，就可以得到式(16C.5)。

16C.2 格林第二定理

格林第二定理可以表述为：

$$\iiint_V (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1)\mathrm{d}V = \oiint_S \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{16C.12}$$

证明：交换式(16C.5)中的 f_1 和 f_2，可以得到

$$\iiint_V f_2 \nabla^2 f_1 \mathrm{d}V = \oiint_S f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_V \overline{\nabla} f_2 \cdot \overline{\nabla} f_1 \mathrm{d}V \tag{16C.13}$$

式(16C.5)与式(16C.13)的左右两边分别相减，可以得到式(16C.12)。

16C.3 格林定理的二维形式

如图 16C.2 所示，对于由一条封闭曲线 c 所限定的一个非闭合曲面，我们可以应用格林定理的二维形式。特别地，由式(16C.5)，可以得到

$$\iint_S f_1 \nabla_t^2 f_2 \mathrm{d}S = \oint_c f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n}\mathrm{d}l - \iint_S (\overline{\nabla}_t f_1 \cdot \overline{\nabla}_t f_2)\mathrm{d}S \tag{16C.14}$$

式中

$$\nabla_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} \tag{16C.15}$$

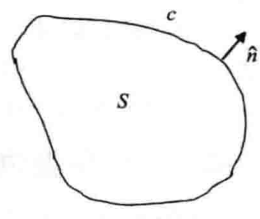


图 16C.2 由封闭曲线所界定的非闭合面

$W(\Phi+\theta h)$的展开

令

$$\nabla_t^2 \Phi = 0 \tag{16C.16}$$

且它的泛函为

$$W(\Phi) = I(\Phi) = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon\, |\overline{\nabla}_t \Phi|^2 \mathrm{d}S \tag{16C.17}$$

令 θ 是一个参数，而 h 是另一个与 Φ 具有相同的狄利赫里边界条件的函数。展开 $W(\Phi+\theta h)$，可以得到

$$W(\Phi+\theta h) = \frac{1}{2}\iint_S [\varepsilon\, \overline{\nabla}_t(\Phi+\theta h) \cdot \overline{\nabla}_t(\Phi+\theta h)]\mathrm{d}S$$

$$\overline{\nabla}_t(\Phi+\theta h) = \overline{\nabla}_t\Phi + \theta\,\overline{\nabla}_t h \tag{16C.18}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_t(\Phi+\theta h)\cdot\overline{\nabla}_t(\Phi+\theta h) &= (\overline{\nabla}_t\Phi + \theta\,\overline{\nabla}_t h)\cdot(\overline{\nabla}_t\Phi + \theta\,\overline{\nabla}_t h)\\ &= \overline{\nabla}_t\Phi\cdot\overline{\nabla}_t\Phi + 2\theta(\overline{\nabla}_t\Phi\cdot\overline{\nabla}_t h) + \theta^2\,\overline{\nabla}_t h\cdot\overline{\nabla}_t h\end{aligned} \tag{16C.19}$$

将式(16C.19)代入式(16C.18)中，可以得到

$$W(\Phi+\theta h) = W(\Phi) + \theta\iint_S \varepsilon(\overline{\nabla}_t\Phi\cdot\overline{\nabla}_t h)\mathrm{d}S + \theta^2 W(h) \tag{16C.20}$$

当 $f_2=\Phi$ 和 $f_1=h$ 时，由式(16C.14)可得

$$\iint_S (\overline{\nabla}_t\Phi\cdot\overline{\nabla}_t h)\mathrm{d}S = \oint_c h\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}l - \iint_S h\,\nabla_t^2\Phi\mathrm{d}S = \oint_c h\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}l \tag{16C.21}$$

由于$\nabla_t^2\Phi=0$，所以有

$$W(\Phi+\theta h) = W(\Phi) + \theta\oint_c \varepsilon h\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}l + \theta^2 W(h) \tag{16C.22}$$

16C.4 泛函极值的意义

$$\frac{W(\Phi+\theta h) - W(\Phi)}{\theta h} = \oint_c \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}l + \frac{\theta h}{h^2}W(h) \tag{16C.23}$$

根据微积分学，在取极限 $\theta\to0$ 时，上式左端的值就是 $\partial W/\partial\Phi$，且当 Φ 为精确解而使得泛函取极小值时，它必须等于零。当 $\theta\to0$ 时，上式右端的最后一项等于 0。这样，当下式成立时，泛函会取极值：

$$\oint_c \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}l = 0 \tag{16C.24}$$

16C.4.1 Φ 的近似选择的误差估计

令 Φ_a 是一个近似选取的 Φ，写为如下形式

$$\Phi_a = (\Phi + \theta h) \tag{16C.25}$$

由式(16C.22)，可以看到在泛函中的误差阶数是 θ^2。在式(16C.25)中，θ 是一个在估计 Φ 时表示误差的参数。当应用 Φ_a 求泛函极值时，结果所得到泛函 W 的误差阶数是 θ^2。对于现在所讨论的拉普拉斯方程来说，其对应的泛函 W 就是在物理上所说的电场能量。

当在近似解 $\Phi=\Phi_a$ 中的误差参数 $\theta=0.1$ 时，将导致在电场能量计算中的误差参数为 $\theta^2=(0.1)^2=0.01$。虽然本附录讨论拉普拉斯方程的解，相同的结论对于本附录最后一节中所讨论的特征值问题(波导问题)的有限元解也是成立的。

16C.5 诺伊曼边界条件

现在将式(16C.24)应用于图16C.3中所示的单元上。

考虑总体节点1、2、3和4。当完成闭合曲线积分时，在单元1中从[2]到[1]积分和在单元2中从[1]到[2]的积分会出现两个剩余的项

$$\oint_c \varepsilon h \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}l = \int_{[2][1]} \varepsilon_L h \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_L \mathrm{d}l + \int_{[1][2]} \varepsilon_R h \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_R \mathrm{d}l \tag{16C.26}$$

仅当下式成立时，式(16C.26)的左端将为0，

$$\varepsilon_L \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_L = \varepsilon_R \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_R \tag{16C.27}$$

这样在分界线[1][2]上，上式等效于

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{16C.28}$$

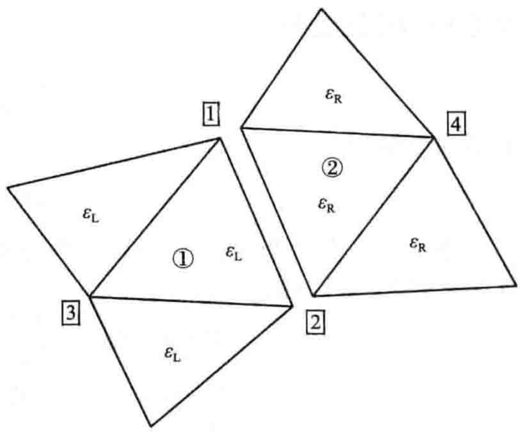


图16C.3 将诺伊曼边界条件应用于图示的单元上

16C.6 均匀波导问题

对于第2章中的均匀波导问题，式(2.97)和式(2.99)分别给出了亥姆霍兹方程及其对应的泛函，为了方便起见，在这里重新写出

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \tag{16C.29}$$

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}\iint_S |\nabla_t \Phi|^2 \mathrm{d}S - k_t^2 \iint_S \Phi^2 \mathrm{d}S \tag{16C.30}$$

式中，$k_t^2=\lambda$ 是特征值，k_t 是截止波数。如果用 Φ 乘以式(16C.29)的两边，并在波导的横截面上积分，可以得到

$$\iint_S \Phi\ \nabla_t^2 \Phi \mathrm{d}S = -k_t^2 \iint_S \Phi^2 \mathrm{d}S \tag{16C.31}$$

应用式(16C.14)，其中取 $f_1=f_2=\Phi$，则上式左端变为

$$\iint_S \Phi\ \nabla_t^2 \Phi \mathrm{d}S = \oint_c \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}l - \iint_S |\nabla_t^2 \Phi|^2 \mathrm{d}S \tag{16C.32}$$

对于一个均匀的理想导体波导，要么有 $\Phi=0$(TM模式)，或者 $\partial\Phi/\partial n=0$(TE模式)，因此上式右端的第一项等于0。这样，由式(16C.31)可得

$$-\iint_S |\nabla_t \Phi|^2 \mathrm{d}S = -k_t^2 \iint_S \Phi^2 \mathrm{d}S \tag{16C.33}$$

由式(16C.30)和式(16C.33)，我们可以断定精确解不仅会使泛函 $I(\Phi)$ 达到最小值，而且这个最小值等于 0。也可以将式(16C.23)写为

$$\lambda = k_t^2 = \frac{\iint_S |\nabla_t \Phi|^2 \mathrm{d}S}{\iint_S \Phi^2 \mathrm{d}S} \tag{16C.34}$$

并且可以将近似解 Φ_a 的误差估计解释如下：如果在某种意义下，Φ_a 有一个误差 ε，那么特征值 λ 的误差将仅为 ε^2。这与众所周知的矩阵特征值的不变性质是一致的。更深入的讨论，请参见 21.2 节。

附录 16D
标准面积积分

16D.1 标准面积积分

在 16.2.3 节中，式(16.78)给出了如下标准积分公式[1]：

$$\iint_{\Delta^{(e)}} (\zeta_1)^l (\zeta_2)^m (\zeta_3)^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} 2A^{(e)}$$

在整个 16 章中，我们都应用了这一积分公式。在本附录中，我们将证明这一结果[1]。在我们证明主要结果之前，先给出一些初步的结果。

证明 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A^{(e)} \mathrm{d}\zeta_1 \mathrm{d}\zeta_2$

这实际上是由面积坐标的定义所得到的一个几何结果。

不失一般性，可以认为三角形的一条边沿 x 轴，如图 16D.1 所示。

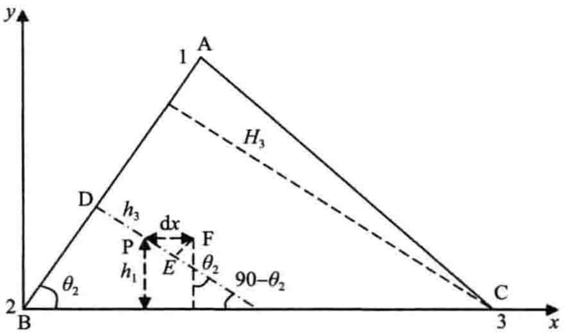


图 16D.1 计算 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的几何图形

令点 P 的坐标为$(x,\ y)$，或者面积坐标为 ζ_1、ζ_2 和 ζ_3，其中

$$\zeta_i = \frac{h_i}{H_i} \tag{16D.1}$$

注意，在直线段 BC 上方一点 P 的高度为 $h_1 = y$：

$$\therefore \mathrm{d}y = \mathrm{d}h_1 \tag{16D.2}$$

由三角形 PEF 可知，$h_3 = \mathrm{DP}$，且

$$PE = \mathrm{d}h_3 = \mathrm{d}x\sin\theta_2 \tag{16D.3}$$

$$\therefore \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}h_3}{\sin\theta_2}\mathrm{d}h_1 \tag{16D.4}$$

由式(16D.1)可得，$\zeta_3 = h_3/H_3$ 和 $\zeta_1 = h_1/H_1$，所以

$$\therefore \mathrm{d}h_3 = H_3 \mathrm{d}\zeta_3 \tag{16D.5}$$

$$\mathrm{d}h_1 = H_1 \mathrm{d}\zeta_1 \tag{16D.6}$$

由式(16D.4)～式(16D.6)，可以得到

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{H_3 \mathrm{d}\zeta_3 H_1 \mathrm{d}\zeta_1}{\sin\theta_2}$$

可以看出，$H_3/\sin\theta_2 = BC$ 和$(BC)H_1 = 2A^{(e)}$：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A^{(e)} \mathrm{d}\zeta_1 \mathrm{d}\zeta_3 \tag{16D.7}$$

同样地，可以证明 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也可以写为

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A^{(e)} \mathrm{d}\zeta_2 \mathrm{d}\zeta_3 = 2A^{(e)} \mathrm{d}\zeta_3 \mathrm{d}\zeta_1 \tag{16D.8}$$

即便是不借助于几何图形，也可以得到上述结果。可以用任何坐标来写出面积元，比如 ζ_1 和 ζ_2，假如包含了坐标变换的雅克比(Jacobian)行列式：

$$\mathrm{d}\zeta_1 \mathrm{d}\zeta_2 = \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(x, y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16D.9}$$

式中，雅克比行列式是如下行列式

$$\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{16D.10}$$

由于

$$\zeta_1 = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_1 + b_1 x + c_1 y) \tag{16D.11}$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_2 + b_2 x + c_2 y) \tag{16D.12}$$

所以雅克比行列式为

$$\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{b_1}{2A^{(e)}} & \frac{c_1}{2A^{(e)}} \\ \frac{b_2}{2A^{(e)}} & \frac{c_2}{2A^{(e)}} \end{vmatrix} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{4[A^{(e)}]^2} = \frac{2A^{(e)}}{4[A^{(e)}]^2} = \frac{1}{2A^{(e)}}$$

由式(16D.5)，可以得到

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A^{(e)}\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2$$

16D.2 积分的上下限

在将积分变量由(x, y)变换为(ζ_1, ζ_2)后，接下来我们需要确定在面积元 $\Delta^{(e)}$ 上积分的上下限。由图 16D.2 可知，带状面积微元与 $\zeta_1=0$ 平行，带的宽度是 $\mathrm{d}\zeta_1$。当 ζ_1 从 0 变化到 1 时，带状面积微元就扩展为三角形。

现在，可以很容易地看出 ζ_2 的积分上下限就是点 Q 和 R 的 ζ_2 坐标。在 Q 点处，$\zeta_2=0$。从下面关系式，可以很容易地求出在 R 点处的 ζ_2 值：

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$$

且在 R 点处有 $\zeta_3=0$。因此，在 R 点处有

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 1 \text{ 和 } \zeta_2 = 1 - \zeta_1$$

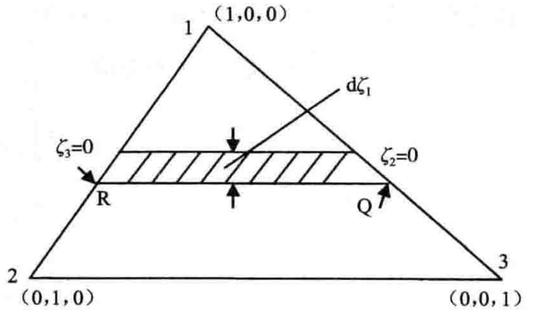


图 16D.2 面积积分的几何图形

这样，就可以得到

$$\iint_{\Delta^{(e)}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A^{(e)}\int_{\zeta_1=0}^{1}\int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} f(\zeta_1,\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1$$

计算 $\vartheta(m,n) = \int_0^{1-\zeta_1} \zeta_2^m (1-\zeta_1-\zeta_2)^n \mathrm{d}\zeta_2$

式中，m 和 n 都是整数。

令

$$u = (1-\zeta_1-\zeta_2)^n, \quad \mathrm{d}u = n(1-\zeta_1-\zeta_2)^{n-1}(-1)\mathrm{d}\zeta_2$$

$$\mathrm{d}V = \zeta_2^m \mathrm{d}\zeta_2, \quad v = \frac{1}{m+1}\zeta_2^{m+1}$$

应用分部积分法，可以得到

$$\vartheta(m,n) = (1-\zeta_1-\zeta_2)^n \frac{\zeta_2}{m+1}\Bigg|_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=1-\zeta_1} - \int \frac{1}{m+1}\zeta_2^{m+1} n(1-\zeta_1-\zeta_2)^{n-1}(-1)\mathrm{d}\zeta_2$$

$$= 0 + \int_0^{1-\zeta_1} \frac{n}{m+1}\zeta_2^{m+1}(1-\zeta_1-\zeta_2)^{n-1}\mathrm{d}\zeta_2$$

$$\therefore \vartheta(m,n) = \frac{n}{m+1}\vartheta(m+1,n-1)$$

由归纳法，可以写出

$$\vartheta(m,n)=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\vartheta(m+2,n-2)$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\vartheta(m+n,0)=\frac{m!n!}{(m+n)!}\vartheta(m+n,0)$$

$$\vartheta(m+n,0)=\int_0^{1-\zeta_1}\zeta_2^{m+n}(1-\zeta_1-\zeta_2)^0\mathrm{d}\zeta_2=\frac{1}{m+n+1}\zeta_2^{m+n+1}\Big|_0^{1-\zeta_1}$$

计算 $$I(l,m,n)=\int_0^1\int_0^{1-\zeta_1}\zeta_1^l\zeta_2^m(1-\zeta_1-\zeta_2)^n\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1$$

应用分部积分法得到

$$I(l,m,n)=\frac{n}{m+1}\int_{\zeta_1}^1\int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1}\zeta_1^l\zeta_2^{m+1}(1-\zeta_1-\zeta_2)^{n-1}\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1=\frac{n}{m+1}I(l,m+1,n-1)$$

由归纳法，可得

$$I(l,m,n)=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I(l,m+2,n-2)$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}I(l,m+n,0)=\frac{n!m!}{(m+n)!}I(l,m+n,0)$$

进一步地，将证明

$$I(l,m,n)=\frac{!m!n!}{(l+m+n)!}I(0,l+m+n,0)$$

很容易计算出 $I(0,\ l+m+n,\ 0)$，因为

$$\int_0^1\int_0^{1-\zeta_1}1\cdot\zeta_2^{l+m+n}\cdot 1\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_1=\int_0^1\frac{1}{l+m+n+1}\zeta_2^{l+m+n+1}\Big|_0^{1-\zeta_1}\mathrm{d}\zeta_1$$

$$=\int_0^1\frac{1}{l+m+n+1}[(1-\zeta_1)^{l+m+n+1}-0]\mathrm{d}\zeta_1$$

$$=\frac{-1}{l+m+n+1}\int_0^1(1-\zeta_1)^{l+m+n+1}\mathrm{d}(1-\zeta_1)$$

$$=\frac{-1}{(l+m+n+1)}\frac{(1-\zeta_1)^{l+m+n+2}}{(l+m+n+2)}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{(l+m+n+1)(l+m+n+2)}$$

所以 $$I(l,m,n)=\frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!}$$

计算 $\iint_{\Delta^{(e)}}(\zeta_1)^l(\zeta_2)^m(\zeta_3)^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$$\iint_{\Delta^{(e)}}(\zeta_1)^l(\zeta_2)^m(\zeta_3)^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2A^{(e)}\iint_{\Delta^{(e)}}(\zeta_1)^l(\zeta_2)^m(1-\zeta_1-\zeta_2)^n\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2$$

$$=2A^{(e)}I(l,m,n)=\frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!}2A^{(e)}$$

参考文献

1. Silvester, P. P. and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers*, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

附录 16E
求场问题解的数值方法[1]

Dikshitulu K. Kalluri

16E.1 简介

几乎没有几本有关电场和磁场的本科生教材介绍求场问题解的数值方法。虽然在本科生课程中不可能给出这方面的课题一个完整的叙述，但是依作者之见，一些专门为此而努力的讲稿仍然是值得的。用数字计算机求解电气问题的总趋势将证明在数值方法上花费一些时间是完全有道理的。此外，当遇到不规则形状的边界时，由于不存在精确的解析解，而应用数值方法却可以很容易地得到近似解。

16E.2 有限差分方程

为了说明这种方法，选择在 x 和 y 坐标系中的泊松方程式(16E.1)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = g(x,y) \tag{16E.1}$$

如果在场域中有限个离散点(节点)上对偏微分方程进行近似，就可以用这些节点上的电位值所满足的一组代数方程来替换上述偏微分方程。所产生的一组代数方程与给定边界条件共同构成了数值计算过程的起点。应用下面介绍的有限差分方法可以得到代数方程组。

如果方程式(16E.1)在矩形区域(图 16E.1a)中成立，其边界条件是在矩形边界上的电位值是给定的，利用正方形网格对矩形区域进行划分就可以得到一组离散点。正方形网格的交点就是一组离散点。其中的一个离散点可以记为(j，k)。节点(j，k)被其周围相邻的 4 个节点($j-1$，k)、($j+1$，k)、(j，$k-1$)和(j，$k+1$)所包围。利用泰勒级数展开，可以将节点($j+1$，k)的电位用节点(j，k)的电位来表示[2]：

$$V_{j+1,k} = V_{j,k} + h\frac{\partial}{\partial x}V_{j,k} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{j,k} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}V_{j,k} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_{j,k} \tag{16E.2}$$

类似地，可以得到

$$V_{j-1,k} = V_{j,k} - h\frac{\partial}{\partial x}V_{j,k} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{j,k} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}V_{j,k} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_{j,k} \tag{16E.3}$$

将式(16E.2)与式(16E.3)两边分别相加，可以得到

$$V_{j-1,k} + V_{j+1,k} = 2V_{j,k} + h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{j,k} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_{j,k}$$

如果允许误差大小为$(h^4/12)(\partial^4/\partial x^4)V_{j,k}$，称为离散误差，那么

$$V_{j-1,k} + V_{j+1,k} - 2V_{j,k} \approx h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{j,k} \tag{16E.4}$$

类似地，对于 y 坐标，可以得到

---

[1] 经过允许转载，资料源自 *Bull. Electrical Eng. Educ.*，28，1-12，June 1962. Manchester University Press, Manchester。

[2] 忽略了比四次项更高的项。

$$V_{j,k-1}+V_{j,k+1}-2V_{j,k}\approx h^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}V_{j,k} \tag{16E.5}$$

由式(16E.4)、式(16E.5)和式(16E.1)，可以得到

$$V_{j-1,k}+V_{j+1,k}+V_{j,k-1}+V_{j,k+1}-4V_{j,k}\approx h^2g(x,y) \tag{16E.6}$$

对于方程式(16E.1)，如果在场域中 $g(x, y)=0$，那么泊松方程就化简为拉普拉斯方程，此时式(16E.6)将化简为

$$V_{j,k}=\frac{1}{4}(V_{j-1,k}+V_{j+1,k}+V_{j,k-1}+V_{j,k+1}) \tag{16E.7}$$

当用文字来描述这个式子时，可以表述为场域内在任意对称星形结构中，中心节点的电位值是其周围相邻 4 个等距离节点上电位值的平均值。对于泊松方程，有

$$V_{j,k}=\frac{1}{4}(V_{j-1,k}+V_{j+1,k}+V_{j,k-1}+V_{j,k+1})-\frac{h^2}{4}g(x,y) \tag{16E.8a}$$

如图 16E1.a 所示，$j=0$ 或 M 的节点(k 取所有值)和 $k=0$ 或 N 的节点(j 取所有值)都位于边界上。它们的电位值由边界条件给出。

16E.3 应用迭代法而不是逆矩阵求解

因此，把有限差分近似应用于连续问题时将得到一组联立代数方程组，它的解可以利用某种迭代法或相关矩阵求逆方法而得到。在图 16E.1a 中，在离散化后得到了 63 个联立代数方程，这些方程的特征是各个方程都很简单，仅包含很少的几项。当为了最小化离散误差时，选取较小的网格空间步长会导致联立方程的数目迅速增加。被求逆的矩阵的阶数与联立方程的数目相同；对这样的一个矩阵求逆将会产生很大的舍入误差(后面将介绍)。

在逐次近似的迭代格式中，我们从各个未知量的一组猜测值开始。将这些猜测值代入如式(16E.7)所示方程的一边，就得到了 $V_{j,k}$ 的一个新值。我们现在移动到下一个节点进行计算，并且重复这一过程直到完成在所有节点上的计算，最后得到一组完整的新值；这样，我们就完成了一次迭代过程。这一组完整的新值现在就构成了第二次迭代的初始值。就这样这种迭代运算周而复始地自动循环，直到第 n 次迭代值组和第 $n+1$ 次迭代值组相同，当真正地满足代数方程时。然而，在实际计算中，当第 n_c 次迭代值组与第 n_c+1 次迭代值组之间的差值小于一个常数时，通常终止迭代。这个常数是对在终止迭代过程时所涉及的误差的度量，可以通过选择这个常数以满足精度要求。我们就说迭代过程在这一步收敛了。指定收敛准则的第二种方法是在第 n_c 次迭代值组和第 n_c+1 次迭代值组中，直到到第 A 个值都应该没有任何变化。

真解值与终止时的迭代解值之间的差称为误差。这种误差也包括在计算过程中舍入误差的影响。迭代方法是自矫正的；在计算过程中出现的算术误差将不会影响最终的结果，虽然它们可能会改变收敛的模式。

16E.4 迭代格式

规定上面所描述的迭代格式按这样的顺序执行，使得第$(j-1)$行和第$(k-1)$列在第 j 行和第 k 列之前完成迭代(在图 16E.1a 中，我们从左下角开始做起，先从左向右，然后从下向上推进)。那么，当计算节点(j, k)的第$(n+1)$次迭代值时，我们已经得到了节点$(j-1, k)$和$(j, k-1)$的第$(n+1)$次迭代值；也得到了节点$(j+1, k)$和$(j, k+1)$的第 n 次迭代值。然而，在 Richardson 方法中，只有在完成整个一次迭代过程后得到一组完整的节点值时，才使用它们；而在 Liebman 方法中，只要计算出一个值就可以使用它，虽然它可能不是一组完整解的一部分。这样，必须对式(16E.8a)进行相应地修正。

Richardson 方法：

$$V_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(V_{j-1,k}^{n} + V_{j+1,k}^{n} + V_{j,k-1}^{n} + V_{j,k+1}^{n}) - \frac{h^2}{4}g(x,y) \tag{16E. 8b}$$

式中，$V_{j,k}^{n+1}$是节点$(j-1, k)$的第 n 次迭代值，等等。

Liebman 方法：

$$V_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(V_{j-1,k}^{n} + V_{j+1,k}^{n} + V_{j,k-1}^{n+1} + V_{j,k+1}^{n}) - \frac{h^2}{4}g(x,y) \tag{16E. 8c}$$

与 Liebman 方法相比，由于在 Richardson 方法中使用的一些值是旧值，因此对于相同的误差要求，期望 Liebman 方法比 Richardson 方法收敛得更快是一件十分自然的事情。为了进一步地提高收敛速度，可以使用 Liebman 外推方法，下式给出了在这种外推法中所使用的基本算法(公式)：

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k+\omega}^{n}\left\{\frac{1}{4}[V_{j-1,k}^{n+1} + V_{j+1,k}^{n} + V_{j,k-1}^{n+1} + V_{j,k+1}^{n} - h^2 g(x,y)] - V_{j,k}^{n}\right\} \tag{16E. 8d}$$

式中，ω 称为松弛因子。

为了清楚地理解这个迭代格式的意义，可以将方括号中的量记为 $V_{j,k}^{(n+1)'}$，它是使用 Liebman 方法得到的节点(j, k)的第 $n+1$ 次的迭代值；那么式(16E. 8d)可以写为

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^{n} + \omega(V_{j,k}^{(n+1)'} - V_{j,k}^{n}) = V_{j,k}^{(n+1)'} + (\omega-1)(V_{j,k}^{(n+1)'} - V_{j,k}^{n}) \tag{16E. 9}$$

这个公式的要义可以表述为：$V_{j,k}^{n}$是前一次迭代得到的值，而 $V_{j,k}^{(n+1)'}$是用 Liebman 方法得到的值。$(V_{j,k}^{(n+1)'} - V_{j,k}^{n})$是不使用松弛因子时两次连续迭代值之间的差。为了得到下一次迭代的猜测值，可以将这个差的一部分加到 $V_{j,k}^{(n+1)'}$上，也就是说，我们试图根据以前的经验来预测下一个值以便至少减少一次迭代。因此，如果只是从逻辑上来看，采用这种松弛过程会加快收敛速度。使用 ω 的最优值将给出最快的收敛速度，而使用在 $1<\omega<2$ 范围内的任何值都会提高收敛速度。还可以进一步地看到，最好是过估计而不是欠估计。这是一个很有用的结果，因为在一般情况下最优松弛因子估计是很困难的，虽然对于像矩形边界这样一些足够简单情况可以得到最优松弛因子值。

16E. 5 迭代格式的收敛速度[1~5]

对于矩形区域中的拉普拉斯方程问题，Frankel[1] 已经求出了上面三种迭代格式的收敛速度。对于泊松方程问题，同样的结论也是成立的，因为在后者中除了有一个额外的常数外，两者的算法是相同的。由于我们分析的是误差而不是电位自身，额外的常数将不重要。现在，考虑一行有 M 个节点和一列有 N 个节点的矩形区域。

令 $V_{j,k}$是真实解，$V_{j,k}^{n}$是节点(j, k)的第 n 次迭代值，$V_{j,k}^{n_c}$是在 n_c 次迭代过程结束后的值，$V_{j,k}^{0}$是猜测值。

同样地，记 $\varepsilon_{j,k}^{n}$是第 n 步的误差。

对于 Richardson 方法：

$$V_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(V_{j-1,k}^{n} + V_{j+1,k}^{n} + V_{j,k-1}^{n} + V_{j,k+1}^{n})$$

且

$$\nabla^2 V_{j,k}^{n} = LV_{j,k}^{n} = V_{j-1,k}^{n} + V_{j+1,k}^{n} + V_{j,k-1}^{n} + V_{j,k+1}^{n} - 4V_{j,k}^{n} \quad 对于 h=1$$

因此，

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^{n}\left(1+\frac{L}{4}\right)$$

$$\varepsilon_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^{n-1} - V_{j,k} = V_{j,k}^{n} - V_{j,k} + \frac{L}{4}(V_{j,k}^{n} - V_{j,k})$$

当 $LV_{j,k}=0$ 时，$V_{j,k}$是真实解。

因此，

$$\varepsilon_{j,k}^{n+1}=\left(1+\frac{L}{4}\right)\varepsilon_{j,k}^{n}=K\varepsilon_{j,k}^{n},\quad K=\left(1+\frac{L}{4}\right)$$

进一步地，

$$\varepsilon_{j,k}^{n}=K\varepsilon_{j,k}^{n-1},\quad \varepsilon_{j,k}^{n-1}=K\varepsilon_{j,k}^{n-2},$$

所以

$$\varepsilon_{j,k}^{n}=K^{2}\varepsilon_{j,k}^{n-2}$$

在一般情况下，

$$\varepsilon_{j,k}^{n}=K^{n}\varepsilon_{j,k}^{0} \tag{16E. 10}$$

这样，我们已经用猜测值的误差表示了第 n 步的误差。无论猜测值的误差是多少，如果 $|K|^{*}<1$，对于足够大的 $n=n_{c}$，误差 εn_{c} 将小于允许的误差。因此，为了保证收敛起见，让 K^{*} ⊖ <1：

$$\varepsilon_{j,k}^{n}=K^{*n}\varepsilon_{j,k}^{0},\quad K^{*}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{M}+\cos\frac{\pi}{N}\right)\approx 1-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{M}\right)^{2}+\left(\frac{\pi}{N}\right)^{2}\right] \tag{16E. 11}$$

如果指定的误差准则是，一个值直到它的第 A 次迭代值都没有任何变化，如果猜测值 $V_{j,k}^{0}$ 等于 0，那么需要的迭代次数 n_{c} 可以计算如下：

$$K^{*n_{c}}=\frac{\varepsilon_{j,k}^{n_{c}}}{\varepsilon_{j,k}^{0}}=\frac{.000\cdots 0X_{P}X_{Q}X_{R}\cdots}{.X_{1}X_{2}X_{3}\cdots X_{A}X_{B}X_{C}X_{D}\cdots}\quad \text{（分子中有 } A \text{ 个零点）}$$

对上式两边取 lg，得到

$$n_{c}\lg K^{*}\approx(A+1)-(-1)$$

$$n_{c}\approx\frac{-A}{\lg K^{*}} \tag{16E. 12}$$

因此，对于 Richardson 方法，有

$$n_{c}=\frac{A}{-\lg\left[\frac{1}{2}(\cos\pi/M+\cos\pi/N)\right]}\approx\frac{A}{-\lg\left\{1-\frac{1}{4}\left[(\pi/M)^{2}+(\pi/N)^{2}\right]\right\}} \tag{16E. 13}$$

对于 Liebman 和 Liebman 外推方法：

按照与 Richardson 方法同样的分析过程，我们可以写出

$$\varepsilon_{j,k}^{n+1}=K(\omega)\varepsilon_{j,k}^{n} \tag{16E. 14}$$

然而，在这种情况下，K 并不是简单地与拉普拉斯算子 L 相关联。Frankel[1] 证明了，当 $\omega=1/4$ 时(Liebman 方法)，有

$$K^{*}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{M}+\cos\frac{\pi}{N}\right)^{2}\approx\left\{1-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{M}\right)^{2}+\left(\frac{\pi}{N}\right)^{2}\right]\right\}^{2} \tag{16E. 15}$$

这样，有

$$n_{c}=\frac{A}{-\lg K^{*}}=\frac{A}{-2\lg\left[\frac{1}{2}(\cos\pi/M+\cos\pi/N)\right]} \tag{16E. 16}$$

注意，根据式(16E. 13)和式(16E. 16)，Liebman 方法要比 Richardson 方法快两倍。进一步还可以证明，ω 的最优值(Liebman 外推方法的松弛因子)是

$$\omega\approx 2-\sqrt{2\pi(M^{-2}+N^{-2})^{1/2}} \tag{16E. 17}$$

以及在这种情况下，有

⊖ K 是一个算子，但是我们可以把 $K_{r,s}$ 的模值叫作它的特征值。L 的特征函数也将是 K 的特征函数。当我们用这样的特征函数来表示 $\varepsilon_{j,k}^{0}$ 时，对于 Richardson 算法来说，$K_{r,s}$(式(16E. 1))将是

$$K_{r,s}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi r}{M}+\cos\frac{\pi r}{N}\right),\quad r=1,\cdots,M-1,s=1,\cdots,N-1$$

如果 $|K_{r,s}|<1$，我们确保是收敛的。$|K_{r,s}|$ 的最大值(然而它小于 1)将贡献出最主要的和最小的收敛项。这样，整体收敛速度或多或少由 $|K_{r,s}|$ 的最大值 K^{*} 所决定。有关详细过程，请参看参考文献[1]。

$$K^* \approx 1 - \sqrt{2\pi(M^{-2} + N^{-2})^{1/2}} \tag{16E. 18}$$

$$n_c \approx \frac{A}{-\lg[1 - \sqrt{2\pi(M^{-2} + N^{-2})^{1/2}}]} \tag{16E. 19}$$

对于图 16E. 1 所示的问题，当 $a=10$、$b=8$、$h=1$ 和 $A=3$ 时，根据上式计算了三种迭代格式的收敛速度(收敛到第 3 位)，在计算中忽略了对称性。

Richardson 方法：$n_c=92.4$。

Liebman 方法：$n_c=46.2$。

Liebman 外推方法：$n_c=20.2$，$\omega=1.29$。

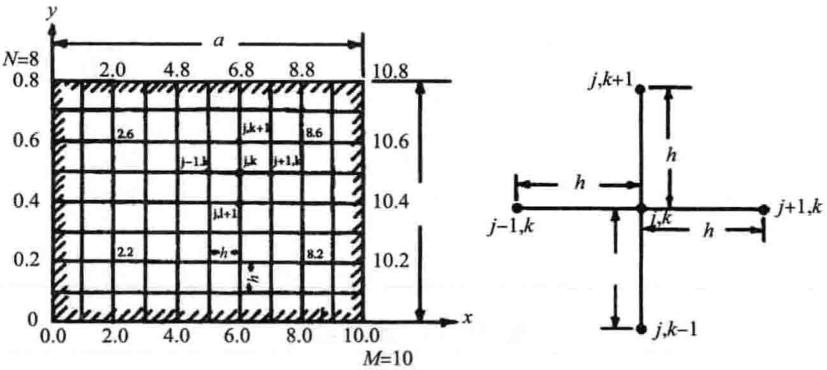


图 16E. 1 (左边)一个具有 lamare 网格的矩形区域(右边)网格中的一个典型单元

16E. 6 泊松方程问题的解

我们用 Liebman 方法和 Liebman 外推方法分别求解了 16E. 1 节所述的问题。为了进行迭代计算，在场域内各节点上的电位初始猜测值全部为 0。而且，假定$a=10$，$b=8$，$h=1$，$g(x, y)=-40$。同时，考虑了在问题中所存在的四重对称性。表 16E. 1a 和表 16E. 1b 比较了使用这两种方法所得到的第 10 组与第 20 组值。在图 16E. 2 中画出了在节点(5, 4)处这两种方法收敛到真实值的模式。

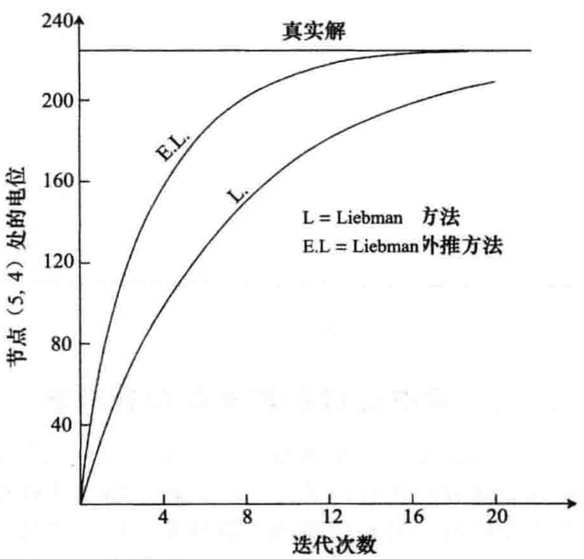


图 16E. 2 收敛模式

16E. 7 边界条件和对称性

给定边界上电位值的边界条件称为狄利赫里边界条件。另一方面，如果给定边界上电位的法向导数，这种边界条件就称为诺依曼边界条件。例如，如果我们给定沿边界上电位的法向导数等于 0，此时与边界邻近的节点上的电位值和位于边界镜像位置的节点上的电位值应该是相同的。因此，在计算边界上某一个节点上的电位值时，位于边界垂直线上且与边界邻近的节点的电位值应该加倍。对于对称线上的节点也存在同样的情况。假定场的范围只到对称线上，在计算对称线上节点的电位时将涉及

与对称线成直角(对于方形和放射状网络)的直线上且与对称线邻近的节点上的两倍电位值。

表 16E. 1A 第 10 组值

j=		1	2	3	4	5
$k=1$	L	36.85	56.40	67.38	73.68	76.88
	EL	43.40	68.69	83.75	92.25	95.73
$k=2$	L	56.25	89.58	109.3	120.9	126.7
	EL	67.68	111.4	138.5	154.1	160.3
$k=3$	L	66.50	108.0	133.5	148.6	156.0
	EL	81.46	135.8	170.4	190.4	198.3
$k=4$	L	70.73	115.7	143.7	160.2	168.1
	EL	86.45	144.7	182.1	203.6	212.0

表 16E. 1B 第 20 组值

j=		1	2	3	4	5
$k=1$	L	44.83	70.65	85.75	93.90	96.80
	EL	47.48	75.43	91.94	100.8	103.6
$k=2$	L	70.10	114.3	141.2	155.9	161.2
	EL	74.72	122.5	151.9	167.9	173.1
$k=3$	L	83.48	138.3	172.5	191.5	198.2
	EL	89.16	148.5	185.8	206.3	212.9
$k=4$	L	87.95	146.4	183.2	203.7	211.0
	EL	93.77	156.9	196.8	218.8	225.9

L—Liebman 方法;
EL—Liebman 外推方法

16E. 8 网格分级和其他类型的网格

已经证明,减小网格的空间步长(h)就可以减小离散误差。然而,一个比较稠密的网格却意味着有大量的节点,由此除了增加计算时间以外,也会增大舍入误差。如果仅要求在部分场域中具有较高的计算精度,可以将这一部分区域划分得稠密一些,而在其余部分区域中可以采用粗网格划分。这种网格划分就称为网格分级。在两种网格划分边界上的节点,我们会遇到不等距离的星形结构。在这样一些节点上,电位不再是其周围相邻 4 个节点上电位的平均值,而是它们的加权平均值。

根据边界形状的不同,可以证明使用三角形、六边形或辐射状网格来对场域进行划分可能会更有益处。这些网格的原理与正方形网格的原理是相同的。为了说明这些算法,下面给出例子[2]。

16E.9　辐射状网格：不等 ARMS[2]

如图 16E.3 所示，在圆形内边界上的电位为 10V，而在外边界上的电位为 0V。外边界由一个圆的一部分和两条线段所组成，而这两条线段的端点由圆弧相连接。图 16E.4a 所示为叠加在场域上的一种辐射状网格。

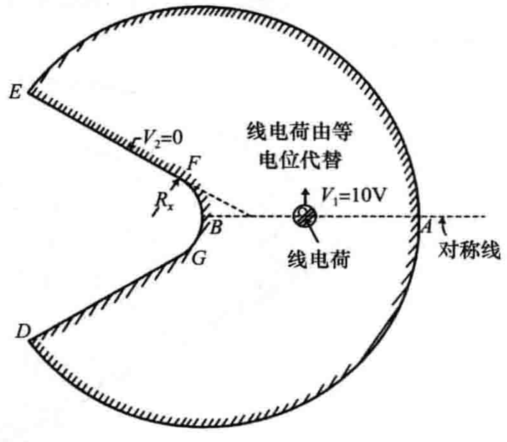


图 16E.3　径向坐标系中的拉普拉斯方程问题（图片改编自 K. Dikshitulu, *Potential gradients near rounded corners*, MS Thesis, University of Wisconsin, Submitted.）

点 B 是这种网格划分的中心点。图 16E.4b所示为节点(j, k)及其周围相邻的 4 个节点。对于给定的场域，拉普拉斯方程在极坐标系中成立：

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial V}{\partial r}\right\}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0 \tag{16E.20}$$

在这里不使用泰勒级数法展开，而应用另一种稍微不同的方法。一阶微分可以写为

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial r}\right\}_{j,j+1} \approx \frac{V_{j+1}-V_j}{\Delta r}$$

类似地，二阶微分可以用一阶微分来表示。

因此，

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial r}\right\}_{0-p} = \frac{V_p - V_0}{\Delta r_p},\quad \left\{\frac{\partial V}{\partial r}\right\}_{q-0} = \frac{V_0 - V_q}{\Delta r_q}$$

$$\begin{aligned} r\left\{\frac{\partial V}{\partial r}\right\}_{0-p} &= \left(R_0+\frac{\Delta r_p}{2}\right)\left(\frac{V_p-V_0}{\Delta r_p}\right) \\ r\left\{\frac{\partial V}{\partial r}\right\}_{q-0} &= \left(R_0+\frac{\Delta r_q}{2}\right)\left(\frac{V_0-V_q}{\Delta r_q}\right) \end{aligned} \tag{16E.21}$$

这样有，

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial V}{\partial r}\right\} = \frac{2}{\Delta r_p+\Delta r_q}\frac{2R_0+\Delta r_p}{2\Delta r_p}(V_p-V_0)+\frac{2}{\Delta r_p+\Delta r_q}\frac{2R_0-\Delta r_q}{2\Delta r_q}(V_q-V_0)$$

而且

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial \theta}\right\}_{0-1} = \frac{V_1-V_0}{\Delta\theta_1};\quad \left\{\frac{\partial V}{\partial \theta}\right\}_{2-0} = \frac{V_0-V_2}{\Delta\theta_2}$$

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right\}_0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{(\Delta\theta_1/2+\Delta\theta_2/2)}\left(\frac{V_1-V_0}{\Delta\theta_1}+\frac{V_2-V_0}{\Delta\theta_2}\right) \\ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right\}_0 &= \frac{2}{R_0(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)}\left(\frac{V_1-V_0}{\Delta\theta_1}+\frac{V_2-V_0}{\Delta\theta_2}\right) \end{aligned} \tag{16E.22}$$

由式(16E.20)、式(16E.21)和式(16E.22)，对于 Liebman 算法，可以写出

$$V_{j,k}^{n+1} = \frac{a_U}{a}V_{j-1,k}^{n+1}+\frac{a_D}{a}V_{j+1,k}^{n}+\frac{a_R}{a}V_{j,k-1}^{n+1}+\frac{a_L}{a}V_{j,k+1}^{n} \tag{16E.23}$$

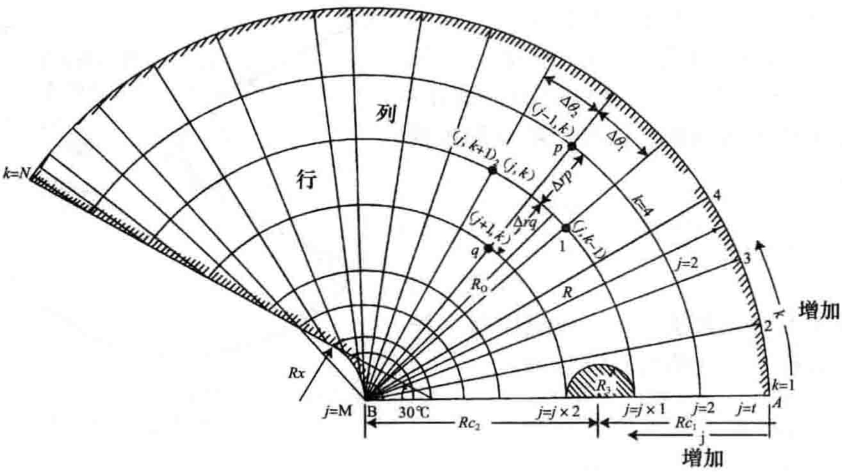
式中

$$a_U = \frac{2R_0+\Delta r_p}{\Delta r_p(\Delta r_p+\Delta r_q)},\quad a_D = \frac{2R_0-\Delta r_q}{\Delta r_q(\Delta r_p-\Delta r_q)}$$

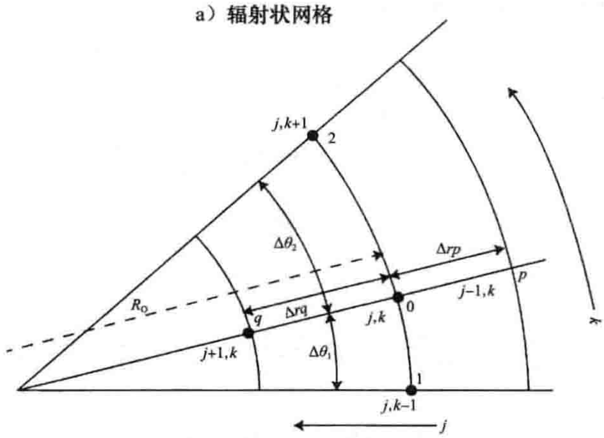
$$a_R = \frac{2}{\Delta\theta_1 R_0(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)},\quad a_L = \frac{2}{\Delta\theta_2 R_0(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)}$$

且 $a=a_U+a_D+a_R+a_L$。

这样，某一个节点上的电位仍然是其周围紧邻 4 个节点上电位的加权平均值。当然，我们不会在场域中的任一点都遇到这样的不等距星形结构。但是，式(16E. 23)是一个最普遍的方程。在图 16E. 5 中可以看到这样计算的结果。利用节点电位值进行插值之后，就可以得到等电位面(或线)。应用 Liebman 外推方法，在 IBM 650 计算机上对这个问题进行了编程计算。



a）辐射状网格



b）辐射状网格中的一个典型节点

图 16E. 4 （图片改编自 K. Dikshitulu，*Potential gradients near rounded corners*，MS Thesis，University of Wiscon*sin*，Submitted.）

16E. 10 松弛法[3]

上面描述的各种方法都非常适合于在计算机上计算，计算机的算术运算速度很高。这些方法的程式化性质使得在计算机上对其进行编程成为可能。Southwell 提出的一类松弛方法很适合于手算。在这些方法中，如果代数方程组没有真正地得到满足，那么计算出各个代数方程的余数，然后通过给定的适当移位将这些余数消除掉(减小为 0)。然而，应当体验一下这个算子以便能够成功地利用这个方法。参考文献[3]很好地叙述了这种方法。在参考文献[3]中，应用松弛法求解了在 $g(x, y)=-100$ 时的泊松方程问题。作为对上述文章的一个补充，研究这个问题会对读者有益。

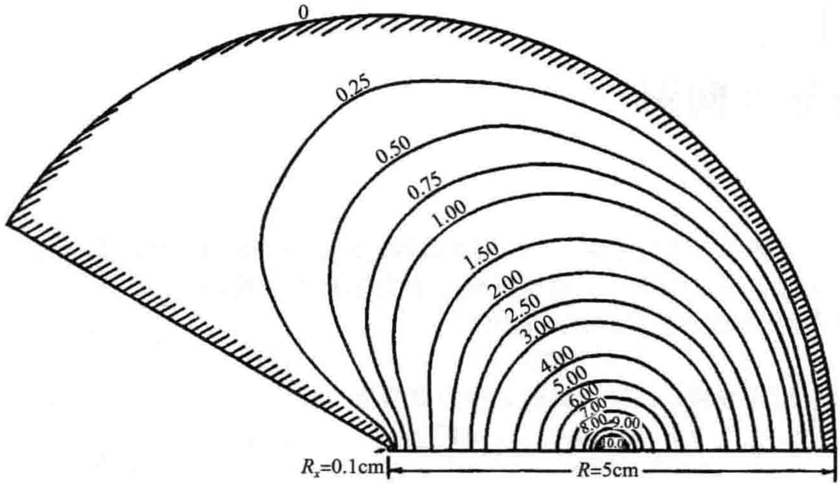


图 16E.5 在径向坐标中拉普拉斯方程问题的解(图片改编自 K. Dikshitulu, *Potential gradients near rounded corners*, MS Thesis, University of Wisconsin, Submitted.)

参考文献

1. Frankel, S. P., Convergence rates of iterative treatments, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 4, 65–75, 1950.
2. Dikshitulu, K., *Potential gradients near rounded corners*, MS Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1959.
3. Shaw, F. S., *Relaxation Methods*, Dover Publications, Inc., New York, 1953.
4. Crandal, S. H., *Engineering Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
5. Young, D., Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type, *Am. Math. Soc. Trans.* 76, 92–111, 1954.

附录 17A

场奇异性问题

如图 17A.1 所示，通过考虑一个尖锐边缘附近的点就可以研究场的奇异性[1,2]问题。

在非常靠近于一个内角为 α 的导电楔子的尖端附近，其场的形态与静态场(准静态近似)的形态相同：

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}\Phi \tag{17A.1}$$

且 Φ 满足拉普拉斯方程。因此，Φ 的方程可以写为

$$\nabla_t^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial\phi^2} = 0 \tag{17A.2}$$

在场域 $\alpha<\phi<2\pi$ 和 $\rho\sim0$ 中，其解可以写为

$$\Phi = A\rho^v\sin v(\phi+\phi_0) \tag{17A.3}$$

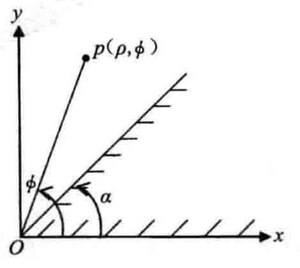


图 17A.1　内角为 α 的导电楔子的尖端

两个常数 ν 和 ϕ_0 可以由如下边界条件 1 与 2 确定：

$$\text{边界 1}: \phi = \alpha, \Phi = 0 \tag{17A.4}$$

这样，

$$\alpha + \phi_0 = 0,\quad \phi_0 = -\alpha \tag{17A.5}$$

$$\text{边界 2}: \phi = 2\pi, \Phi = 0$$

$$\sin\nu(2\pi-\alpha) = 0$$

$$\nu(2\pi-\alpha) = \pi$$

$$\nu = \frac{\pi}{2\pi-\alpha} \tag{17A.6}$$

由式(17A.1)可知，可以得到电场为

$$\overline{E} = -A\nu\rho^{\nu-1}[\hat{\rho}\sin v(\phi-\alpha) + \hat{\phi}\cos v(\phi-\alpha)] \tag{17A.7}$$

将式(17A.7)代入麦克斯韦方程中，可以得到相应的磁场：

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\overline{H} \tag{17A.8a}$$

$$\hat{z}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\phi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right] = -\mathrm{j}\omega\mu\overline{H} \tag{17A.8b}$$

式中

$$E_\rho = -A\nu\rho^{\nu-1}\sin\nu(\phi-\alpha) \tag{17A.9}$$

$$E_\phi = -A\nu\rho^{\nu-1}\cos\nu(\phi-\alpha) \tag{17A.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\phi) = \frac{\partial}{\partial\rho}[-A\nu\rho^\nu\cos v(\phi-\alpha)] = -A\nu^2\rho^{\nu-1}\cos v(\phi-\alpha)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} = -A\nu^2\rho^{\nu-1}\cos v(\phi-\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\phi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi} = 0 \tag{17A.11a}$$

上面的结果与期望的结果一样。

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = 0 \tag{17A.11b}$$

但是，从麦克斯韦第一方程，可以得到

$$\overline{\nabla}\times\overline{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\overline{E} \tag{17A.12}$$

因为已知 $\overline{H}$ 仅有 z 分量，所有可以得到

$$\hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\right)=\hat{\rho}\,\mathrm{j}\omega\varepsilon E_\rho \tag{17A.13}$$

$$\hat{\phi}\left(-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)=\hat{\phi}\,\mathrm{j}\omega\varepsilon E_\phi \tag{17A.14}$$

由式(17A.13)，可以得到

$$H_z=\int \mathrm{j}\omega\varepsilon\rho E_\rho \mathrm{d}\phi=\mathrm{j}\omega\varepsilon\int -A\nu\rho^{\nu-1}\sin\nu(\phi-\alpha)\mathrm{d}\phi=-\mathrm{j}\omega\varepsilon A\nu\rho^{\nu}(-1)\cos\nu(\phi-\alpha)\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$H_z=\mathrm{j}\omega\varepsilon A\rho^{\nu}\cos\nu(\phi-\alpha) \tag{17A.15}$$

由式(17A.14)，我们期望得到相同的答案。

由于 $E_z=0$，但是 $H_z\neq 0$，我们称为 TE 情况。现在，让我们保证 $\alpha=\pi/2$，即我们考虑在直角外面的场域。此时，由式(17A.6)、式(17A.9)、式(17A.10)和式(17A.15)，可以得到

$$\nu=\frac{\pi}{2\pi-\pi/2}=\frac{\pi}{3\pi/2}=\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned}E_\rho&=-A\nu\frac{1}{\rho^{1/3}}\sin\frac{2}{3}(\phi-\alpha)\\E_\phi&=-A\nu\frac{1}{\rho^{1/3}}\cos\frac{2}{3}(\phi-\alpha),\quad \frac{\pi}{2}<\phi<2\pi\\H_z&=\mathrm{j}\omega\varepsilon A\rho^{2/3}\cos\frac{2}{3}(\phi-\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{17A.16}$$

注意，$\overline{E}$ 的横向分量变为奇异的，然而 $\overline{H}(H_z)$的切向分量是有限的。我们可以从静磁位 Φ_{m} 开始，在 $\rho\to 0$ 的极限条件下，它满足拉普拉斯方程

$$\nabla_{\mathrm{m}}^2\Phi=0 \tag{17A.17}$$

像前面一样按同样的分析方法，可以证明(注意，关于 $H_{\tan}$的边界条件是 $\partial H_{\tan}/\partial\phi=0$)：

$$\overline{H}=-A\nu\rho^{\nu-1}[\hat{\rho}\cos v(\phi-\alpha)-\hat{\phi}\sin\nu(\phi-\alpha)]$$

$$E_z=-\mathrm{j}\omega\mu A\rho^{\nu}\sin v(\phi-\alpha)$$

在 $0<\alpha<\pi$ 和 $-1/2<v-1<0$ 区域中，因为横向分量与 $\rho^{\nu-1}$成正比，所以横向分量随 $\rho\to 0$ 而变为无穷大。内角越小，场的奇异性越强。

总之，当取极限 $\rho\to 0$ 时，在一个直角导电边缘(见图 17A.2)附近的场具有如下面变化形式：

$$E_\rho\sim\frac{1}{\rho^{1/3}}\sin\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

$$E_\phi\sim\frac{1}{\rho^{1/3}}\cos\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

$$H_z\sim\rho^{2/3}\cos\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

$$H_\rho\sim\frac{1}{\rho^{1/3}}\cos\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

$$H_\phi\sim\frac{1}{\rho^{1/3}}\sin\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

$$E_z\sim\rho^{2/3}\sin\frac{2}{3}(\phi-90°)$$

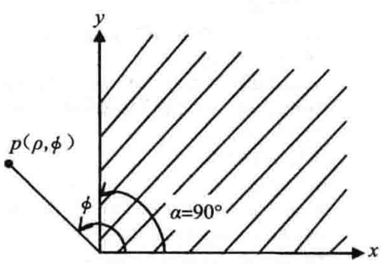


图 17A.2　直角导电楔子

在原点($\rho\to 0$)处，E_z 和 H_z 都是有限的，但是所有的横向分量 E_ρ、H_ρ、E_ϕ 和 H_ϕ 在原点处都是奇异的。

应该注意，由于我们研究的是 $\rho\to 0$ 极限情况，因此应用了准静态分析。

参考文献

1. Jin, J., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd Edition, Wiley, New York, NY, 2002.
2. Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, NY, 1964.

附录18A
输入数据

注意：对于每一个不同的问题，这些GID(生成的输入数据)都是不同的，例如，下面的数据是由一阶有限元方法所生成的。

```
ENTITIES
POINT
Num: 1 HigherEntity: 2 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Coord: -10.0 -2.0 0.0
END POINT
POINT
Num: 2 HigherEntity: 2 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Coord: -4.0 -2.0 0.0
END POINT
POINT
Num: 3 HigherEntity: 2 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Coord: -4.0 -5.0 0.0
END POINT
POINT
Num: 4 HigherEntity: 2 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Coord: -10.0 -5.0 0.0
END POINT
STLINE
Num: 1 HigherEntity: 1 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Meshing Info: (num=19,NOE=1) Elemtype=1 IsStructured=0
Meshing=Default size=18
Points: 1 2
END STLINE
STLINE
Num: 2 HigherEntity: 1 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Meshing Info: (num=17,NOE=1) Elemtype=1 IsStructured=0
Meshing=Default size=12
Points: 2 3
END STLINE
STLINE
Num: 3 HigherEntity: 1 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Meshing Info: (num=16,NOE=1) Elemtype=1 IsStructured=0
Meshing=Default size=18
Points: 3 4
END STLINE
STLINE
Num: 4 HigherEntity: 1 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
Meshing Info: (num=18,NOE=1) Elemtype=1 IsStructured=0
Meshing=Default size=12
Points: 4 1
END STLINE
NURBSURFACE
Num: 1 HigherEntity: 0 conditions: 0 material: 0
LAYER: Layer0
```

```
Meshing Info: (num=2,NOE=1) Elemtype=2 IsStructured=0 Meshing=Default
size=0
NumLines: 4
Line: 1 Orientation: DIFF1ST
Line: 4 Orientation: DIFF1ST
Line: 3 Orientation: DIFF1ST
Line: 2 Orientation: DIFF1ST
Number of Control Points=2 2 Degree=1 1
Point 1,1 coords:-4.0,-2.0,0.0
Point 1,2 coords:-10.0,-2.0,0.0
Point 2,1 coords:-4.0,-5.0,0.0
Point 2,2 coords:-10.0,-5.0,0.0
Number of knots in U=4
knot 1 value=0.0
knot 2 value=0.0
knot 3 value=1.0
knot 4 value=1.0
Number of knots in V=4
knot 1 value=0.0
knot 2 value=0.0
knot 3 value=1.0
knot 4 value=1.0
Non rational
IsTrimmed: 0
Center: -7.0 -3.5 0.0
Normal: 0.0 0.0 1.0
END NURBSURFACE
END ENTITIES
MESH dimension 3 ElemType Triangle Nnode 3
Coordinates
```

单元#	X_n	Y_n	Z_n
1	−10	−2	0
2	−10	−2.25	0
3	−9.666 666 67	−2	0
4	−9.666 666 67	−2.25	0
5	−10	−2.5	0
6	−9.666 666 67	−2.5	0
7	−9.333 333 33	−2	0
8	−9.333 333 33	−2.25	0
9	−10	−2.75	0
10	−9.666 666 67	−2.75	0
11	−9.333 333 33	−2.5	0
12	−10	−3	0
13	−9	−2	0
14	−9.333 333 33	−2.75	0
15	−9	−2.25	0
16	−9.666 666 67	−3	0
17	−9	−2.5	0
18	−9.333 333 33	−3	0
19	−9	−2.75	0
20	−10	−3.25	0
21	−9.666 666 67	−3.25	0
22	−8.666 666 67	−2	0
23	−8.666 666 67	−2.25	0
24	−9	−3	0

（续）

单元#	X_n	Y_n	Z_n
25	−9.333 333 33	−3.25	0
26	−8.666 666 67	−2.5	0
27	−10	−3.5	0
28	−8.666 666 67	−2.75	0
29	−9.666 666 67	−3.5	0
30	−9	−3.25	0
31	−9.333 333 33	−3.5	0
32	−8.333 333 33	−2	0
33	−8.666 666 67	−3	0
34	−8.333 333 33	−2.25	0
35	−8.333 333 33	−2.5	0
36	−10	−3.75	0
37	−9.666 666 67	−3.75	0
38	−9	−3.5	0
39	−8.333 333 33	−2.75	0
40	−8.666 666 67	−3.25	0
41	−9.333 333 33	−3.75	0
42	−8.333 333 33	−3	0
43	−8	−2	0
44	−10	−4	0
45	−8.666 666 67	−3.5	0
46	−9	−3.75	0
47	−8	−2.25	0
48	−9.666 666 67	−4	0
49	−8	−2.5	0
50	−8.333 333 33	−3.25	0
51	−9.333 333 33	−4	0
52	−8	−2.75	0
53	−8.666 666 67	−3.75	0
54	−8	−3	0
55	−9	−4	0
56	−8.333 333 33	−3.5	0
57	−10	−4.25	0
58	−9.666 666 67	−4.25	0
59	−9.333 333 33	−4.25	0
60	−8	−3.25	0
61	−8.666 666 67	−4	0
62	−8.333 333 33	−3.75	0
63	−9	−4.25	0
64	−10	−4.5	0
65	−8	−3.5	0
66	−9.666 666 67	−4.5	0
67	−7.666 666 67	−3	0
68	−9.333 333 33	−4.5	0
69	−8.333 333 33	−4	0
70	−8.666 666 67	−4.25	0

（续）

单元#	X_n	Y_n	Z_n
71	−7.666 666 67	−3.25	0
72	−8	−3.75	0
73	−9	−4.5	0
74	−10	−4.75	0
75	−9.666 666 67	−4.75	0
76	−7.666 666 67	−3.5	0
77	−8.333 333 33	−4.25	0
78	−8	−4	0
79	−9.333 333 33	−4.75	0
80	−8.666 666 67	−4.5	0
81	−7.333 333 33	−3	0
82	−7.666 666 67	−3.75	0
83	−9	−4.75	0
84	−7.333 333 33	−3.25	0
85	−10	−5	0
86	−8.333 333 33	−4.5	0
87	−8	−4.25	0
88	−9.666 666 67	−5	0
89	−8.666 666 67	−4.75	0
90	−7.333 333 33	−3.5	0
91	−7.666 666 67	−4	0
92	−9.333 333 33	−5	0
93	−7	−3	0
94	−9	−5	0
95	−7.333 333 33	−3.75	0
96	−8	−4.5	0
97	−8.333 333 33	−4.75	0
98	−7.666 666 67	−4.25	0
99	−7	−3.25	0
100	−8.666 666 67	−5	0
101	−7.333 333 33	−4	0
102	−7	−3.5	0
103	−8	−4.75	0
104	−7.666 666 67	−4.5	0
105	−8.333 333 33	−5	0
106	−7	−3.75	0
107	−6.666 666 67	−3	0
108	−7.333 333 33	−4.25	0
109	−6.666 666 67	−3.25	0
110	−7	−4	0
111	−8	−5	0
112	−7.666 666 67	−4.75	0
113	−6.666 666 67	−3.5	0
114	−7.333 333 33	−4.5	0
115	−7	−4.25	0
116	−6.666 666 67	−3.75	0

（续）

单元#	X_n	Y_n	Z_n
117	−6.333 333 33	−3	0
118	−7.666 666 67	−5	0
119	−7.333 333 33	−4.75	0
120	−6.333 333 33	−3.25	0
121	−6.666 666 67	−4	0
122	−7	−4.5	0
123	−6.333 333 33	−3.5	0
124	−6	−2	0
125	−6	−2.25	0
126	−7.333 333 33	−5	0
127	−6.666 666 67	−4.25	0
128	−6	−2.5	0
129	−6.333 333 33	−3.75	0
130	−6	−2.75	0
131	−7	−4.75	0
132	−6	−3	0
133	−6.666 666 67	−4.5	0
134	−6.333 333 33	−4	0
135	−6	−3.25	0
136	−7	−5	0
137	−6	−3.5	0
138	−6.333 333 33	−4.25	0
139	−6.666 666 67	−4.75	0
140	−5.666 666 67	−2	0
141	−5.666 666 67	−2.25	0
142	−5.666 666 67	−2.5	0
143	−6	−3.75	0
144	−5.666 666 67	−2.75	0
145	−6.333 333 33	−4.5	0
146	−5.666 666 67	−3	0
147	−6	−4	0
148	−6.666 666 67	−5	0
149	−5.666 666 67	−3.25	0
150	−6.333 333 33	−4.75	0
151	−5.666 666 67	−3.5	0
152	−6	−4.25	0
153	−5.333 333 33	−2	0
154	−5.666 666 67	−3.75	0
155	−5.333 333 33	−2.25	0
156	−5.333 333 33	−2.5	0
157	−6	−4.5	0
158	−5.333 333 33	−2.75	0
159	−6.333 333 33	−5	0
160	−5.666 666 67	−4	0
161	−5.333 333 33	−3	0
162	−5.333 333 33	−3.25	0

(续)

单元#	X_n	Y_n	Z_n
163	−6	−4.75	0
164	−5.666 666 67	−4.25	0
165	−5.333 333 33	−3.5	0
166	−5.333 333 33	−3.75	0
167	−5	−2	0
168	−6	−5	0
169	−5.666 666 67	−4.5	0
170	−5	−2.25	0
171	−5	−2.5	0
172	−5	−2.75	0
173	−5.333 333 33	−4	0
174	−5	−3	0
175	−5.666 666 67	−4.75	0
176	−5	−3.25	0
177	−5.333 333 33	−4.25	0
178	−5	−3.5	0
179	−5.666 666 67	−5	0
180	−5.333 333 33	−4.5	0
181	−5	−3.75	0
182	−4.666 666 67	−2	0
183	−4.666 666 67	−2.25	0
184	−4.666 666 67	−2.5	0
185	−5	−4	0
186	−4.666 666 67	−2.75	0
187	−5.333 333 33	−4.75	0
188	−4.666 666 67	−3	0
189	−4.666 666 67	−3.25	0
190	−5	−4.25	0
191	−4.666 666 67	−3.5	0
192	−5.333 333 33	−5	0
193	−5	−4.5	0
194	−4.666 666 67	−3.75	0
195	−4.333 333 33	−2	0
196	−4.333 333 33	−2.25	0
197	−4.333 333 33	−2.5	0
198	−4.666 666 67	−4	0
199	−5	−4.75	0
200	−4.333 333 33	−2.75	0
201	−4.333 333 33	−3	0
202	−4.666 666 67	−4.25	0
203	−4.333 333 33	−3.25	0
204	−5	−5	0
205	−4.333 333 33	−3.5	0
206	−4.666 666 67	−4.5	0
207	−4.333 333 33	−3.75	0
208	−4	−2	0

（续）

单元#	X_n	Y_n	Z_n
209	−4.666 666 67	−4.75	0
210	−4	−2.25	0
211	−4.333 333 33	−4	0
212	−4	−2.5	0
213	−4	−2.75	0
214	−4	−3	0
215	−4.333 333 33	−4.25	0
216	−4.666 666 67	−5	0
217	−4	−3.25	0
218	−4	−3.5	0
219	−4.333 333 33	−4.5	0
220	−4	−3.75	0
221	−4.333 333 33	−4.75	0
222	−4	−4	0
223	−4	−4.25	0
224	−4.333 333 33	−5	0
225	−4	−4.5	0
226	−4	−4.75	0
227	−4	−5	0
坐标结束			

单元#	n1L	n2L	n3L
1	195	196	208
2	196	210	208
3	182	183	195
4	183	196	195
5	167	170	182
6	170	183	182
7	153	155	167
8	155	170	167
9	140	141	153
10	141	155	153
11	124	125	140
12	125	141	140
13	32	34	43
14	34	47	43
15	22	23	32
16	23	34	32
17	13	15	22
18	15	23	22
19	7	8	13
20	8	15	13
21	3	4	7
22	4	8	7

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
23	1	2	3
24	2	4	3
25	196	197	210
26	197	212	210
27	183	184	196
28	184	197	196
29	170	171	183
30	171	184	183
31	155	156	170
32	156	171	170
33	141	142	155
34	142	156	155
35	125	128	141
36	128	142	141
37	34	35	47
38	35	49	47
39	23	26	34
40	26	35	34
41	15	17	23
42	17	26	23
43	8	11	15
44	11	17	15
45	4	6	8
46	6	11	8
47	2	5	4
48	5	6	4
49	197	200	212
50	200	213	212
51	184	186	197
52	186	200	197
53	171	172	184
54	172	186	184
55	156	158	171
56	158	172	171
57	142	144	156
58	144	158	156
59	128	130	142
60	130	144	142
61	35	39	49
62	39	52	49
63	26	28	35
64	28	39	35

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
65	17	19	26
66	19	28	26
67	11	14	17
68	14	19	17
69	6	10	11
70	10	14	11
71	5	9	6
72	9	10	6
73	200	201	213
74	201	214	213
75	186	188	200
76	188	201	200
77	172	174	186
78	174	188	186
79	158	161	172
80	161	174	172
81	144	146	158
82	146	161	158
83	130	132	144
84	132	146	144
85	39	42	52
86	42	54	52
87	28	33	39
88	33	42	39
89	19	24	28
90	24	33	28
91	14	18	19
92	18	24	19
93	10	16	14
94	16	18	14
95	9	12	10
96	12	16	10
97	201	203	214
98	203	217	214
99	188	189	201
100	189	203	201
101	174	176	188
102	176	189	188
103	161	162	174
104	162	176	174
105	146	149	161
106	149	162	161

(续)

单元#	n1L	n2L	n3L
107	132	135	146
108	135	149	146
109	117	120	132
110	120	135	132
111	107	109	117
112	109	120	117
113	93	99	107
114	99	109	107
115	81	84	93
116	84	99	93
117	67	71	81
118	71	84	81
119	54	60	67
120	60	71	67
121	42	50	54
122	50	60	54
123	33	40	42
124	40	50	42
125	24	30	33
126	30	40	33
127	18	25	24
128	25	30	24
129	16	21	18
130	21	25	18
131	12	20	16
132	20	21	16
133	203	205	217
134	205	218	217
135	189	191	203
136	191	205	203
137	176	178	189
138	178	191	189
139	162	165	176
140	165	178	176
141	149	151	162
142	151	165	162
143	135	137	149
144	137	151	149
145	120	123	135
146	123	137	135
147	109	113	120
148	113	123	120

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
149	99	102	109
150	102	113	109
151	84	90	99
152	90	102	99
153	71	76	84
154	76	90	84
155	60	65	71
156	65	76	71
157	50	56	60
158	56	65	60
159	40	45	50
160	45	56	50
161	30	38	40
162	38	45	40
163	25	31	30
164	31	38	30
165	21	29	25
166	29	31	25
167	20	27	21
168	27	29	21
169	205	207	218
170	207	220	218
171	191	194	205
172	194	207	205
173	178	181	191
174	181	194	191
175	165	166	178
176	166	181	178
177	151	154	165
178	154	166	165
179	137	143	151
180	143	154	151
181	123	129	137
182	129	143	137
183	113	116	123
184	116	129	123
185	102	106	113
186	106	116	113
187	90	95	102
188	95	106	102
189	76	82	90
190	82	95	90

(续)

单元#	n1L	n2L	n3L
191	65	72	76
192	72	82	76
193	56	62	65
194	62	72	65
195	45	53	56
196	53	62	56
197	38	46	45
198	46	53	45
199	31	41	38
200	41	46	38
201	29	37	31
202	37	41	31
203	27	36	29
204	36	37	29
205	207	211	220
206	211	222	220
207	194	198	207
208	198	211	207
209	181	185	194
210	185	198	194
211	166	173	181
212	173	185	181
213	154	160	166
214	160	173	166
215	143	147	154
216	147	160	154
217	129	134	143
218	134	147	143
219	116	121	129
220	121	134	129
221	106	110	116
222	110	121	116
223	95	101	106
224	101	110	106
225	82	91	95
226	91	101	95
227	72	78	82
228	78	91	82
229	62	69	72
230	69	78	72
231	53	61	62
232	61	69	62

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
233	46	55	53
234	55	61	53
235	41	51	46
236	51	55	46
237	37	48	41
238	48	51	41
239	36	44	37
240	44	48	37
241	211	215	222
242	215	223	222
243	198	202	211
244	202	215	211
245	185	190	198
246	190	202	198
247	173	177	185
248	177	190	185
249	160	164	173
250	164	177	173
251	147	152	160
252	152	164	160
253	134	138	147
254	138	152	147
255	121	127	134
256	127	138	134
257	110	115	121
258	115	127	121
259	101	108	110
260	108	115	110
261	91	98	101
262	98	108	101
263	78	87	91
264	87	98	91
265	69	77	78
266	77	87	78
267	61	70	69
268	70	77	69
269	55	63	61
270	63	70	61
271	51	59	55
272	59	63	55
273	48	58	51
274	58	59	51

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
275	44	57	48
276	57	58	48
277	215	219	223
278	219	225	223
279	202	206	215
280	206	219	215
281	190	193	202
282	193	206	202
283	177	180	190
284	180	193	190
285	164	169	177
286	169	180	177
287	152	157	164
288	157	169	164
289	138	145	152
290	145	157	152
291	127	133	138
292	133	145	138
293	115	122	127
294	122	133	127
295	108	114	115
296	114	122	115
297	98	104	108
298	104	114	108
299	87	96	98
300	96	104	98
301	77	86	87
302	86	96	87
303	70	80	77
304	80	86	77
305	63	73	70
306	73	80	70
307	59	68	63
308	68	73	63
309	58	66	59
310	66	68	59
311	57	64	58
312	64	66	58
313	219	221	225
314	221	226	225
315	206	209	219
316	209	221	219

（续）

单元#	n1L	n2L	n3L
317	193	199	206
318	199	209	206
319	180	187	193
320	187	199	193
321	169	175	180
322	175	187	180
323	157	163	169
324	163	175	169
325	145	150	157
326	150	163	157
327	133	139	145
328	139	150	145
329	122	131	133
330	131	139	133
331	114	119	122
332	119	131	122
333	104	112	114
334	112	119	114
335	96	103	104
336	103	112	104
337	86	97	96
338	97	103	96
339	80	89	86
340	89	97	86
341	73	83	80
342	83	89	80
343	68	79	73
344	79	83	73
345	66	75	68
346	75	79	68
347	64	74	66
348	74	75	66
349	221	224	226
350	224	227	226
351	209	216	221
352	216	224	221
353	199	204	209
354	204	216	209
355	187	192	199
356	192	204	199
357	175	179	187
358	179	192	187

(续)

单元#	n1L	n2L	n3L
359	163	168	175
360	168	179	175
361	150	159	163
362	159	168	163
363	139	148	150
364	148	159	150
365	131	136	139
366	136	148	139
367	119	126	131
368	126	136	131
369	112	118	119
370	118	126	119
371	103	111	112
372	111	118	112
373	97	105	103
374	105	111	103
375	89	100	97
376	100	105	97
377	83	94	89
378	94	100	89
379	79	92	83
380	92	94	83
381	75	88	79
382	88	92	79
383	74	85	75
384	85	88	75
单元结束			

```
PROBLEM DATA
END PROBLEM DATA
INTERVAL NUMBER: 1
INTERVAL DATA
END INTERVAL DATA
```

附录18B

主　程　序

18B.1　一阶、基于节点：主程序

```
Nn = 227; % 节点总数
Ne = 384; % 单元总数
inch = 2.54*1e-2./6;
[xn,yn,n1L,n2L,n3L,mt] = meshread('data.txt', Ne, Nn, 0);
[S,T] = GLANT(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,xn*inch,yn*inch);
% TE模式
ATE = inv(T)*S;
[EVTE, kcsqTE] = eig(ATE);
kcTE = sqrt(kcsqTE);
[N,M] = size(kcTE);
for ii = 1 : N
        KCTE(ii) = kcTE(ii,ii);
end
FTE = sort(KCTE*3e8/(2*pi))';
% TM模式
boundary = load('boundary_nodes.txt');% 读边界节点
all_nodes = 1:Nn; % 读所有节点
nce = setxor(boundary,all_nodes); % 提取自由节点
STM = S(nce,nce);
TTM = T(nce,nce);
ATM = inv(TTM)*STM;
[EVTMET,kcsqTM] = eig(ATM);
kcTM = sqrt(kcsqTM);
[N,M] = size(kcTM);
for ii = 1 : N
        KCTM(ii) = kcTM(ii,ii);
end
disp('Cutoff wavenumbers for the TM modes');
disp(sort(KCTM));
FTM = sort(KCTM*3e8/(2*pi))';
```

18B.2　基于棱边：主程序

```
Nn = 227; % 节点总数
Ne = 384; % 单元总数
inch = 2.54*1e-2./6;
[xn,yn,n1L,n2L,n3L,mt] = meshread('data.txt', Ne, Nn, 0);
[Neg,n1EL,n2EL,n3EL] = edges(n1L, n2L, n3L);
[E,F] = GLAET(Neg, Nn, Ne, n1L, n2L, n3L, n1EL, n2EL, n3EL,
xn*inch,yn*inch);
% TM模式
ATM = inv(F)*E;
[EVTM, kcsqTM] = eig(ATM);
kcTM = sqrt(kcsqTM);
[N,M] = size(kcTM);
for ii = 1 : N
        KCTM(ii) = kcTM(ii,ii);
end
FTM = sort(KCTM*3e8/(2*pi))';

% TE模式
```

```
A=intersect(abs(n2EL),abs(n3EL));
B=intersect(abs(n3EL),abs(n1EL));
nce1=union(A,B);
C=intersect(abs(n1EL),abs(n2EL));
nce=union(nce1,C); % 找出公共棱边
ETE=E(nce,nce);
FTE=F(nce,nce);
ATE=inv(FTE)*ETE;
[EVTEET,kcsqTE]=eig(ATE);
kcTE=sqrt(kcsqTE);
[N,M]=size(kcTE);
for ii=1 : N
       KCTE(ii)=kcTE(ii,ii);
end
disp('Cutoff wavenumbers for the TM modes');
disp(sort(KCTE));
FTE=sort(KCTE*3e8/(2*pi))';
```

18B.3 二阶、基于节点:主程序

```
Nn=837; % 节点总数
Ne=384; % 单元总数
inch=2.54*1e-2./6;
[xn,yn,n1L,n2L,n3L,n4L,n5L,n6L,mt]=meshread2T('2ndorder.txt', Ne, Nn,
0);
[S,T]=GLAN2T(Nn,Ne,n1L,n4L,n6L,n2L,n5L,n3L,xn*inch,yn*inch);
% TE模式
ATE=inv(T)*S;
[EVTE, kcsqTE]=eig(ATE);
kcTE=sqrt(kcsqTE);
[N,M]=size(kcTE);
for ii=1 : N
       KCTE(ii)=kcTE(ii,ii);
end
FTE=sort(KCTE*3e8/(2*pi))';
% TM模式
boundary=load('boundary_nodes.txt'); % 读边界节点
all_nodes=1:Nn; % 读全部节点
nce=setxor(boundary,all_nodes); % 提取自由节点
STM=S(nce,nce);
TTM=T(nce,nce);
ATM=inv(TTM)*STM;
[EVTMET,kcsqTM]=eig(ATM);
kcTM=sqrt(kcsqTM);
[N,M]=size(kcTM);
for ii=1 : N
       KCTM(ii)=kcTM(ii,ii);
end
disp('Cutoff wavenumbers for the TM modes');
KCTM=sort(KCTM)';
FTM=sort(KCTM*3e8/(2*pi))';
```

18B.4 非均匀波导:主程序

```
% 部分填充电介质非均匀波导
clear all
clc
Nn=227; % 节点总数
Ne=384; % 单元总数
inch=.0256/6;
[xn,yn,n1L,n2L,n3L,mt]=meshread('INHWG_Data.txt', Ne, Nn, 0); % 从GID读数据
[Neg,n1EL,n2EL,n3EL]=edges(n1L, n2L, n3L); % 生成每个单元的局部棱边
```

```
k0 = [303:5:320]; % k0循环
mur = ones(1,length(n1L));
epsr = ones(1,length(n1L));
e_r = 4; % 介电常数
diele_elements = (load('dielectric_elements.txt')); % 读电介质填充的单元
epsr(diele_elements) = e_r; % 处理电介质单元
for s = 1:length(k0)
        clear C GAMA EVIN GAMASQ diag_GAMA beta Beta
[Att,Btt,Btz,Bzz,C] = INHWGD(epsr,mur,k0(s),Neg,Nn,Ne,...
        n1L,n2L,n3L,n1EL,n2EL,n3EL,xn.*inch,yn.*inch); % 调用INHWG函数
function
% 自由边或非导电棱边
A = intersect(abs(n2EL),abs(n3EL));
B = intersect(abs(n3EL),abs(n1EL));
nce1 = union(A,B);
CC = intersect(abs(n1EL),abs(n2EL));
nce = union(nce1,CC);
%%%%%%%%%%%%%%%
% 自由节点或非导电节点
boundary = load('boundary_nodes.txt'); % 读边界节点
all_nodes = 1:Nn; % 读全部节点
ncn = setxor(boundary,all_nodes); % 提取自由节点
%%%%%%%%%%%%%%%
Attf = Att(nce,nce);
Bttf = Btt(nce,nce);
Btzf = Btz(nce,ncn);
Bzzf = Bzz(ncn,ncn);
C1f = Bttf-Btzf*inv(Bzzf)*Btzf';
C2f = inv(C1f);
Cf = C2f*Attf;
[EVINf, GAMASQf] = eig(Cf);
GAMA = sqrt((GAMASQf));
diag_GAMA = diag(GAMA);
z = 1;
% 从γ中求传播常数
for t = 1:length(diag_GAMA)
        if real(diag_GAMA(t)) == 0&&imag(diag_GAMA(t)) > 0
                beta(z) = imag(diag_GAMA(t));
                z = z + 1;
        end
end
Ko = k0(s)
Beta = fliplr(sort(beta))'
Freq = sort(k0(s)*3e8/(2*pi))
end % 结束k0循环
```

附录18C
函数程序

18C.1a GLANT MATLAB 函数程序

```
function [S,T]=GLANT(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,xn,yn);
%总体合成基于节点的三角形单元
for e=1:Ne;
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        n(3,e)=n3L(e);
end
%初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
%对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
        %各个单元节点的坐标
        for i=1:3;
                x(i)=xn(n(i,e));
                y(i)=yn(n(i,e));
        end
        %计算单元矩阵元素
        b(1)=y(2)-y(3);
        b(2)=y(3)-y(1);
        b(3)=y(1)-y(2);
        c(1)=x(3)-x(2);
        c(2)=x(1)-x(3);
        c(3)=x(2)-x(1);
        Area=0.5 * abs (b(2)*c(3)-b(3) *c(2));
        %计算单元矩阵元素
        for i=1:3;
                for j=1:3;
                        Se(i,j)=(0.25/Area)*(b(i)*b(j)+c(i)*c(j));
                        if i==j
                                Te(i,j)=Area/6;
                        else
                                Te(i,j)=Area/12;
                        end
%将单元矩阵合成到总体FEM系统中
                        S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+Se(i,j);
                        T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+Te(i,j);
                end
        end
end
```

18C.1b Meshread MATLAB 函数

```
function [xn,yn,n1L,n2L,n3L,mt]=meshread(filename, Ne, Nn, mat)
% meshread.m
% 这个函数从GID预处理器产生的ASII网格文件中读取节点坐标和连接矩阵
% 输入: Ne, Nn—单元的总数目和节点的总数目
% mat:1—读材料类型, 0—不读材料类型
% 输出:
% xn,yn—节点的坐标
```

```
% n1L,n2L,n3L—节点，每个单元有3个节点
% mt—材料类型数组[单元#材料类型]
% Andrey Semichaevsky, 08/08/02
M=zeros(Nn,4);
N=zeros(Ne,5);
mt=zeros(Ne,2);
% 打开文件
[fp, msg]=fopen (filename, 'rt');
if fp==-1
        disp (msg)
        return;
end
% 读数据
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        kk=strncmp(L,'Coordinates',11);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        if ~strcmp(L,'end coordinates')
                MM=str2num(L);
                if ~isempty(MM)
                        M(ii,1:4)=MM(1:4);
                end
        end
        kk=strncmp(L,'end coordinates',15);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        kk=strncmp(L,'Elements',8);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        if ~strcmp(L,'end elements')
                MM=str2num(L);
                if ~isempty(MM)
                        if mat==1
                                N(ii,1:5)=MM(1:5);
                        else
                                N(ii,1:4)=MM(1:4);
                        end
                end
        end
        kk=strncmp(L,'end elements',12);
        ii=ii+1;
end
% 关闭文件
[msg, errn]=ferror (fp);
if errn~=0
        disp ('An error occurred reading from file !')
        disp (msg)
end
fclose (fp);
xn(1:Nn)=M(1:Nn,2);
yn(1:Nn)=M(1:Nn,3);
n1L(1:Ne)=N(1:Ne,2);
n2L(1:Ne)=N(1:Ne,3);
```

```
n3L(1:Ne)=N(1:Ne,4);
if mat==1
mt(1:Ne,1)=N(1:Ne,1);
mt(1:Ne,2)=N(1:Ne,5);
end
```

18C.2a GLAET MATLAB 函数

```
% GLAET.M
function [E,F]=glaet(Neg, Nn, Ne, n1L, n2L, n3L, n1EL, n2EL, n3EL, xn,
yn)
for e=1:Ne
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        n(3,e)=n3L(e);
        ne(1,e)=n1EL(e);
        ne(2,e)=n2EL(e);
        ne(3,e)=n3EL(e);
end
E=zeros(Neg, Neg);
F=zeros(Neg, Neg);
for e=1:Ne
        for i=1:3;
                x(i)=xn(n(i,e));
                y(i)=yn(n(i,e));
        end
        b(1)=y(2)-y(3);
        b(2)=y(3)-y(1);
        b(3)=y(1)-y(2);
c(1)=x(3)-x(2);
c(2)=x(1)-x(3);
c(3)=x(2)-x(1);
Area=0.5*abs(b(2)*c(3)-b(3)*c(2));
l(1)=sqrt(b(3)*b(3)+c(3)*c(3));
l(2)=sqrt(b(1)*b(1)+c(1)*c(1));
l(3)=sqrt(b(2)*b(2)+c(2)*c(2));
for i=1:3
        for j=1:3
                ff(i,j)=b(i)*b(j)+c(i)*c(j);
        end
end
G(1,1)=2*(ff(2,2)-ff(1,2)+ff(1,1));
G(2,2)=2*(ff(3,3)-ff(2,3)+ff(2,2));
G(3,3)=2*(ff(1,1)-ff(3,1)+ff(3,3));
G(2,1)=G(1,2);
G(1,3)=ff(2,1)-2*ff(2,3)-ff(1,1)+ff(1,3);
G(3,1)=G(1,3);
G(2,3)=ff(3,1)-ff(3,3)-2*ff(2,1)+ff(2,3);
G(3,2)=G(2,3);

for i=1:3
        for j=1:3
                Ee(i,j)=(1/Area)*(l(i)*l(j));
                Fe(i,j)=(1/48)*(1/Area)*l(i)*l(j)*G(i,j);
                if(ne(i,e)<0)
                Ee(i,j)=-Ee(i,j);
                Fe(i,j)=-Fe(i,j);
        else;
        end;
        if(ne(j,e)<0);
                Ee(i,j)=-Ee(i,j);
                Fe(i,j)=-Fe(i,j);
        else;
        end;
```

```
                ane(i,e)=abs(ne(i,e));
                ane(j,e)=abs(ne(j,e));
                E(ane(i,e),ane(j,e))=E(ane(i,e),ane(j,e))+Ee(i,j);
                F(ane(i,e),ane(j,e))=F(ane(i,e),ane(j,e))+Fe(i,j);
                end
        end
end
```

18C.2b 棱边 MATLAB 函数

```
function [Neg, n1EL, n2EL, n3EL]=edges(n1L, n2L, n3L)
% edges.m
% 对于一个三角形有限元网格，基于连接矩阵这个函数生成棱边单元
% 输入:
% n1L,n2L,n3L—节点#(每个单元有3个节点)
% 输出:
% Neg—棱边数目,
% n1EL,n2EL,n3EL—棱边#(每个单元有3条棱边)
% Andrey Semichaevsky, 07/21/02
N=length(n1L);
n_el=zeros(N,3);
n_el(1:N,1)=linspace(1,N,N)';
n_el(1:N,2)=n1L(1:N)';
n_el(1:N,3)=n2L(1:N)';
n_el(1:N,4)=n3L(1:N)';
ed_array=zeros(N*3,3);
ed_array1=zeros(N*3,3);
% 建立节点数组
        for i=1:N
                ed_array((i-1)*3+1,2)=n_el(i,2);
                ed_array((i-1)*3+1,3)=n_el(i,3);

                ed_array((i-1)*3+2,2)=n_el(i,3);
                ed_array((i-1)*3+2,3)=n_el(i,4);

                ed_array((i-1)*3+3,2)=n_el(i,4);
                ed_array((i-1)*3+3,3)=n_el(i,2);
        end
% 检查复制
k=1; cp=0;
        for i=1:3*N
                cp=0;
        for j=1:3*N

                if ((ed_array (i, 2)) ~= (ed_array (j, 2))) & (((ed_array
                (i, 3)) ~= (ed_array (j, 3))))
                        % 如果这个条件成立，那么将这条棱边复制到细分后的表格中
                        cp=1;
                end
                if ((ed_array (i, 2)) ~= (ed_array (j, 3))) & (((ed_array (i, 3))
                ~= (ed_array (j, 2))))
                        % 颠倒顺序
                        % 如果这个条件成立，那么将这条棱边复制到细分后的表格中
                        cp=1;
                end
        end
        if cp ==1
                ed_array1(k,:)=ed_array(i,:);
                k=k+1;
                end
        end
clear ed_array;
```

```
[N2,M2]=size(ed_array1);
nn=linspace(1,N2,N2);
% 给所有的棱边编号
ed_array1(1:N2,1)=nn(1:N2)';
ed_array=ed_array1;
[Neg,M]=size(ed_array);
clear ed_array1;
ed_el=zeros(N,4);
ed_el(1:N,1)=n_el(1:N,1);
% 扫描所有连接矩阵，给棱边编号（正的或负的），根据顺时针、逆时针方向单元轮廓
for i=1:N
        aa(1,1:2)=n_el(i, [2 3]);
        aa(2,1:2)=n_el(i, [3 4]);
        aa(3,1:2)=n_el(i, [4 2]);

        for l=1:N2
        for k=1:3
                if aa(k,1:2)==ed_array(l,2:3),
                        ed_el(i,k+1)=ed_array(l,1);
                end
                if fliplr(aa(k,1:2))==ed_array(l,2:3),
                        ed_el(i,k+1)=-ed_array(l,1);
                end
        end
        end
end
ne=zeros(Neg,1);
% 最终细分的结果
for k=1:Neg
for i=1:N
        for l=2:4
                if (ed_el(i,l)==k) | (ed_el(i,l)==-k)
                        ne(k)=1;
                end
        end
        end
end
tt=zeros(Neg,2);
tt(1:Neg,1)=linspace(1,Neg,Neg)';
% 最终的棱边编号
k=1;
        for i=1:Neg
                if ne(i)~=0
                        tt(i,2)=k;
                        k=k+1;
                end
        end
% 棱边编号替换
        for kk=1:Neg
        for i=1:N
                for j=2:4
                        if ed_el(i,j)==tt(kk,1)
                                ed_el(i,j)=tt(kk,2);
                        end
                        if ed_el(i,j)==(-tt(kk,1))
                ed_el(i,j)=-tt(kk,2);
                end
                end
        end
end
Neg=k-1;
n1EL(1:N)=ed_el(1:N,2)';
```

```
n2EL(1:N)=ed_el(1:N,3)';
n3EL(1:N)=ed_el(1:N,4)';
```

18C.3a GLAN2T MATLAB 函数

```
function [S,T]=GLAN2T(Nn,Ne,n1L,n2L,n3L,n4L,n5L,n6L,xn,yn);
% 总体合成基于节点的二维二阶三角形单元
% 程序由D.K. Kalluri编写
for e=1:Ne;
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        n(3,e)=n3L(e);
        n(4,e)=n4L(e);
        n(5,e)=n5L(e);
        n(6,e)=n6L(e);
end
Q1=(1/6)*[0,0,0,0,0,0;0,8,-8,0,0,0;0,-8,8,0,0,0;
     0,0,0,3,-4,1;0,0,0,-4,8,-4;0,0,0,1,-4,3];
Q2=(1/6)*[3,0,-4,0,0,1;0,8,0,0,-8,0;-4,0,8,0,0,-4;
     0,0,0,0,0,0;0,-8,0,0,8,0;1,0,-4,0,0,3];
Q3=(1/6)*[3,-4,0,1,0,0;-4,8,0,-4,0,0;0,0,8,0,-8,0;
     1,-4,0,3,0,0;0,0,-8,0,8,0;0,0,0,0,0,0];
Tek=(1/180)*[6,0,0,-1,-4,-1;0,32,16,0,16,-4;0,16,32,-4,16,0;
      -1,0,-4,6,0,-1;-4,16,16,0,32,0;-1,-4,0,-1,0,6];
% 初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
        % 各个单元节点的坐标
        x(1)=xn(n(1,e));
        x(2)=xn(n(4,e));
        x(3)=xn(n(6,e));
        y(1)=yn(n(1,e));
        y(2)=yn(n(4,e));
        y(3)=yn(n(6,e));
% 计算单元矩阵元素
        b(1)=y(2)-y(3);
        b(2)=y(3)-y(1);
        b(3)=y(1)-y(2);
        c(1)=x(3)-x(2);
        c(2)=x(1)-x(3);
        c(3)=x(2)-x(1);
        Area=0.5*abs (b(2)*c(3)-b(3)*c(2));
        COTTH1=-(0.5/Area)*(b(2)*b(3)+c(2)*c(3));
        COTTH2=-(0.5/Area)*(b(3)*b(1)+c(3)*c(1));
        COTTH3=-(0.5/Area)*(b(1)*b(2)+c(1)*c(2));
        Te=Area*Tek;
        Se=COTTH1*Q1+COTTH2*Q2+COTTH3*Q3;
        % 计算单元矩阵元素
        for i=1:6;
               for j=1:6;
                      % 将单元矩阵合成到总体FEM矩阵中
               S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+Se(i,j);
               T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+Te(i,j);
               end
        end
end
```

18C.3b Meshread2T MATLAB 函数

```
function [xn,yn,n1L,n2L,n3L,n4L,n5L,n6L,mt]=meshread2T(filename, Ne, Nn,
mat)
% meshread.m
```

```
% 这个函数从GID预处理器产生的ASII网格文件中读取节点坐标和连接矩阵
% 输入: Ne, Nn——单元的总数和节点的总数
% mat:1——读材料类型, 0——不读材料类型
% 输出:
% xn,yn——节点坐标
% n1L,n2L,n3L——节点, 每个单元有3个节点
% mt——材料类型数组[单元#材料类型]
% Andrey Semichaevsky, 08/08/02

M=zeros(Nn,4);
N=zeros(Ne,8);
mt=zeros(Ne,2);
% 打开文件
[fp, msg]=fopen (filename, 'rt');
if fp==-1
        disp (msg)
        return;
end
% 读数据
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        kk=strncmp(L,'Coordinates',11);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        if ~strcmp(L,'end coordinates')
                MM=str2num(L);
                if ~isempty(MM)
                        M(ii,1:4)=MM(1:4);
                end
        end
        kk=strncmp(L,'end coordinates',15);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        kk=strncmp(L,'Elements',8);
        ii=ii+1;
end
kk=0; ii=1;
while kk==0
        L=fgetl(fp);
        if ~strcmp(L,'end elements')
                MM=str2num(L);
                if ~isempty(MM)
                        if mat==1
                                N(ii,1:8)=MM(1:8);
                        else
                                N(ii,1:7)=MM(1:7);
                        end
                end
        end
        kk=strncmp(L,'end elements',12);
        ii=ii+1;
end
%关闭文件
[msg, errn]=ferror (fp);
if errn~=0
        disp ('An error occurred reading from file !')
```

```
        disp (msg)
    end
    fclose (fp);
    xn(1:Nn)=M(1:Nn,2);
    yn(1:Nn)=M(1:Nn,3);
    n1L(1:Ne)=N(1:Ne,2);
    n2L(1:Ne)=N(1:Ne,3);
    n3L(1:Ne)=N(1:Ne,4);
    n4L(1:Ne)=N(1:Ne,5);
    n5L(1:Ne)=N(1:Ne,6);
    n6L(1:Ne)=N(1:Ne,7);
    if mat==1
    mt(1:Ne,1)=N(1:Ne,1);
    mt(1:Ne,2)=N(1:Ne,8);
    end
```

18C.4 INHWGD MATLAB 函数

```
function [Att,Btt,Btz,Bzz,C]=INHWGD(epr,mur,k0,Neg,Nn,Ne,...
       n1L,n2L,n3L,n1EL,n2EL,n3EL,xn,yn);
% 非均匀波导问题
% 程序由D.K. Kalluri编写
% 棱边单元表示横向场，基于节点的单元表示纵向场
% 基于棱边的二维三角形单元的总体合成
% Neg=棱边单元的总数
% Nn=节点总数
% Ne=单元总数
% n1L=包含第e个单元的第一个局部节点的总体节点编号的数组
% n2L=包含第e个单元的第二个局部节点的总体节点编号的数组
% n3L=包含第e个单元的第三个局部节点的总体节点编号的数组
% n1EL=包含第e个单元的第一个局部棱边的总体棱边编号的数组
% n2EL=包含第e个单元的第二个局部棱边的总体棱边编号的数组
% n3EL=包含第e个单元的第三个局部棱边的总体棱边编号的数组
% 负值表示总体棱边方向与局部棱边方向相反
for e=1:Ne;
       n(1,e)=n1L(e);
       n(2,e)=n2L(e);
       n(3,e)=n3L(e);
       ne(1,e)=n1EL(e);
       ne(2,e)=n2EL(e);
       ne(3,e)=n3EL(e);
end
% 初始化
Att=zeros(Neg,Neg);
Btt=zeros(Neg,Neg);
Btz=zeros(Neg,Nn);
Bzz=zeros(Nn,Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
       % 各个单元的节点坐标
       for i=1:3;
              x(i)=xn(n(i,e));
              y(i)=yn(n(i,e));
       end
       % 计算单元矩阵元素
       b(1)=y(2)-y(3);
       b(2)=y(3)-y(1);
       b(3)=y(1)-y(2);
       c(1)=x(3)-x(2);
c(2)=x(1)-x(3);
c(3)=x(2)-x(1);
Area=0.5*abs (b(2)*c(3)-b(3)*c(2));
l(1)=sqrt(b(3)*b(3)+c(3)*c(3));
l(2)=sqrt(b(1)*b(1)+c(1)*c(1));
```

```
l(3)=sqrt(b(2)*b(2)+c(2)*c(2));
K(1)=l(1)/(12*Area);
K(2)=l(2)/(12*Area);
K(3)=l(3)/(12*Area);
% 计算单元矩阵元素
for i=1:3;
        for j=1:3;
                ff(i,j)=b(i)*b(j)+c(i)*c(j);
                Se(i,j)=(0.25/Area)*(b(i)*b(j)+c(i) *c(j));
                if i ==j
                        Te(i,j) =Area/6;
                else
                        Te(i,j) =Area/12;
                end
        end;
end;
G(1,1)=2*(ff(2,2)-ff(1,2)+ff(1,1));
G(2,2)=2*(ff(3,3)-ff(2,3)+ff(2,2));
G(3,3)=2*(ff(1,1)-ff(3,1)+ff(3,3));
G(1,2)=ff(2,3)-ff(2,2)-2*ff(1,3)+ff(1,2);
G(2,1)=G(1,2);
G(1,3)=ff(2,1)-2*ff(2,3)-ff(1,1)+ff(1,3);
G(3,1)=G(1,3);
G(2,3)=ff(3,1)-ff(3,3)-2*ff(2,1)+ff(2,3);
G(3,2)=G(2,3);
Gtz(1,1)=-K(1)*(b(1)*(b(1)-b(2))+c(1)*(c(1)-c(2)));
Gtz(2,2)=-K(2)*(b(2)*(b(2)-b(3))+c(2)*(c(2)-c(3)));
Gtz(3,3)=-K(3)*(b(3)*(b(3)-b(1))+c(3)*(c(3)-c(1)));
Gtz(1,2)=K(1)*(b(2)*(b(2)-b(1))+c(2)*(c(2)-c(1)));
Gtz(2,3)=K(2)*(b(3)*(b(3)-b(2))+c(3)*(c(3)-c(2)));
Gtz(3,1)=K(3)*(b(1)*(b(1)-b(3))+c(1)*(c(1)-c(3)));
Gtz(1,3)=-K(1)*(-y(1)*b(2)-y(2)*b(1)-y(3)*b(3)...
          +x(1)*c(2)+x(2)*c(1)+x(3)*c(3));
Gtz(2,1)=-K(2)*(-y(2)*b(3)-y(3)*b(2)-y(1)*b(1)...
          +x(2)*c(3)+x(3)*c(2)+x(1)*c(1));
Gtz(3,2)=-K(3)*(-y(3)*b(1)-y(1)*b(3)-y(2)*b(2)...
          +x(3)*c(1)+x(1)*c(3)+x(2)*c(2));
for i=1:3;
        for j=1:3;
                Ee(i,j)=(1/Area)*(l(i)*l(j));
                Fe(i,j)=(1/48)*(1/Area)*l(i)*l(j)*G(i,j);
        % 将单元矩阵合成到总体FEM矩阵中
        if (ne(i,e)<0);
                Ee(i,j)=-Ee(i,j);
                Fe(i,j)=-Fe(i,j);
                Gtz(i,j)=-Gtz(i,j);
        else;
end;
if (ne(j,e)<0);
        Ee(i,j)=-Ee(i,j);
        Fe(i,j)=-Fe(i,j);
else;
end;
Atte(i,j)=(1/mur(e))*Ee(i,j)-k0*k0*epr(e)*Fe(i,j);
Btte(i,j)=(1/mur(e))*Fe(i,j);
Btze(i,j)=(1/mur(e))*Gtz(i,j);
Bzze(i,j)=(1/mur(e))*Se(i,j)-k0*k0*epr(e)*Te(i,j);
% 出于存储的目的，取ne(i,e)和ne(j,e)的绝对值，ne(i,e)和ne(j,e)可能为负数
ane(i,e)=abs(ne(i,e));
ane(j,e)=abs(ne(j,e));
Att(ane(i,e),ane(j,e))=Att(ane(i,e),ane(j,e))+Atte(i,j);
Btt(ane(i,e),ane(j,e))=Btt(ane(i,e),ane(j,e))+Btte(i,j);
```

```
                Btz(ane(i,e),n(j,e))=Btz(ane(i,e),n(j,e))+Btze(i,j);
                Bzz(n(i,e),n(j,e))=Bzz(n(i,e),n(j,e))+Bzze(i,j);
                end
        end
end
C1=Btt-Btz*inv(Bzz)*Btz';
C2=inv(C1);
C=C2*Att;
```

18C.5 GLANT MATLAB 函数

```
function [S,T,K,b]=GLANL(Nn,Ne,n1L,n2L,alphae,betae,fe,xn);
% 总体合成基于节点的一维一阶单元
% diff. eq: -d/dz(alpha d phi/dz) +beta phi=f(z)
for e=1:Ne;
        n(1,e)=n1L(e);
        n(2,e)=n2L(e);
        alpha(e)=alphae(e);
        beta(e)=betae(e);
        f(e)=fe(e);
end

% 初始化
S=zeros(Nn,Nn);
T=zeros(Nn,Nn);
K=zeros(Nn,Nn);
b=zeros(Nn,Nn);
% 对所有单元进行循环
for e=1: Ne;
        % 各个单元节点的坐标
        for i=1:2;
                x(i)=xn(n(i,e));
        end
        % 计算单元矩阵元素
        l(e)=x(2)-x(1);
        Se(1,1)=1/l(e);
        Se(1,2)=-1/l(e);
        Se(2,1)=Se(1,2);
        Se(2,2)=Se(1,1);
        Te(1,1)=l(e)/3;
        Te(1,2)=l(e)/6;
        Te(2,1)=Te(1,2);
        Te(2,2)=Te(1,1);
        % 计算Ke和be矩阵元素，将它们合成到总体FEM矩阵中
        for i=1:2;
                be(i)=l(e)*f(e)/2;
                b(n(i,e))=b(n(i,e))+be(i);
                for j=1:2;
                        Ke(i,j)=alpha(e)*Se(i,j)+beta(e)* Te(i,j);
                        S(n(i,e),n(j,e))=S(n(i,e),n(j,e))+Se(i,j);
                        T(n(i,e),n(j,e))=T(n(i,e),n(j,e))+Te(i,j);
                        K(n(i,e),n(j,e))=K(n(i,e),n(j,e))+Ke(i,j);
                end
        end
end
```

附录 21A 复坡印廷定理

在无损媒质中，有

$$\nabla\times \widetilde{\widetilde{H}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\widetilde{E}} \tag{21A.1}$$

$$\nabla\times \widetilde{\widetilde{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\widetilde{\widetilde{H}} \tag{21A.2}$$

$$\nabla\times \widetilde{\widetilde{E}}^{*} = \mathrm{j}\omega\mu\widetilde{\widetilde{H}}^{*} \tag{21A.3}$$

$$\widetilde{\widetilde{H}}\cdot\nabla\times \widetilde{\widetilde{E}}^{*} = \mathrm{j}\omega\mu\widetilde{\widetilde{H}}\cdot\widetilde{\widetilde{H}}^{*} \tag{21A.4}$$

$$\widetilde{\widetilde{E}}^{*}\cdot\nabla\times \widetilde{\widetilde{H}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\widetilde{\widetilde{E}}\cdot\widetilde{\widetilde{E}}^{*} \tag{21A.5}$$

从式(21A.4)中减去式(21A.5)，并利用式(21A.4)，可以得到

$$\nabla\cdot(\widetilde{\widetilde{H}}\times\widetilde{\widetilde{E}}^{*}) = \mathrm{j}\omega\varepsilon|\widetilde{\widetilde{E}}|^{2} - \mathrm{j}\omega\mu|\widetilde{\widetilde{H}}|^{2}$$

在体积 τ 上进行积分，可以得到

$$\iiint_{\tau}\nabla\cdot(\widetilde{\widetilde{H}}\times\widetilde{\widetilde{E}}^{*})\mathrm{d}\tau = \mathrm{j}\omega\iiint_{\tau}[\varepsilon|\widetilde{\widetilde{E}}|^{2} - \mu|\widetilde{\widetilde{H}}|^{2}]\mathrm{d}\tau \tag{21A.6}$$

利用散度定理，可以写出

$$\oint\!\!\oint_{S}(\widetilde{\widetilde{H}}\times\widetilde{\widetilde{E}}^{*})\cdot\overline{\mathrm{d}S} = \mathrm{j}\omega\iiint_{\tau}[\varepsilon|\widetilde{\widetilde{E}}|^{2} - \mu|\widetilde{\widetilde{H}}|^{2}]\mathrm{d}\tau \tag{21A.7}$$

注意，式(21A.7)表明，在由无损边界面所限定的一个无损和无源的体积内，功率流都是电抗性的。如果在 τ 中有无损媒质或有一个源 $\widetilde{J}$，就必须将 $\widetilde{J}$ 加到式(21A.1)的右端，那么复坡印廷矢量将变为

$$\oint\!\!\oint_{S}(\widetilde{\widetilde{H}}\times\widetilde{\widetilde{E}}^{*})\cdot\overline{\mathrm{d}S} = \mathrm{j}\omega\iiint_{\tau}[\varepsilon|\widetilde{\widetilde{E}}|^{2} - \mu|\widetilde{\widetilde{H}}|^{2}]\mathrm{d}\tau + \iiint_{\tau}\widetilde{\widetilde{E}}^{*}\cdot\widetilde{J}\,\mathrm{d}\tau \tag{21A.8}$$

由式(21A.8)，可以得到

$$\mathrm{Re}\oint\!\!\oint_{S}(\widetilde{\widetilde{H}}\times\widetilde{\widetilde{E}}^{*})\cdot\overline{\mathrm{d}S} = \iiint_{\tau}(\widetilde{\widetilde{E}}^{*}\cdot\widetilde{J})\mathrm{d}\tau \tag{21A.9}$$

式(21A.9)可以解释为欧姆损耗或(和)辐射功率。式(21A.9)的右端项给出了由无损体积 τ 中的源所产生的，而从包围体积 τ 的闭合曲面 S 辐射出的功率。在图 21A.1a 中，右端项表示由源所提供的有功功率和通过闭合曲面从体积中辐射出的功率。在图 21A.1b 中，右端项表示在 τ 中的功率损耗(欧姆损耗)。

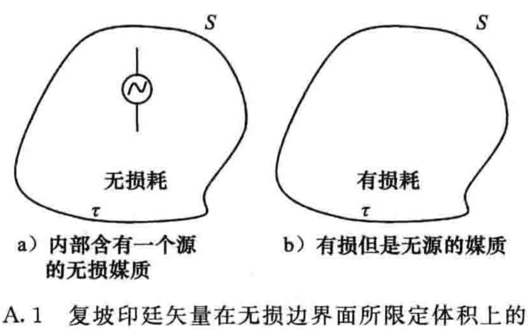


图 21A.1 复坡印廷矢量在无损边界面所限定体积上的应用

第五部分

习 题

习　　题

第 1 章

P1.1　导出简单无损耗介质中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程。

P1.2　在洛伦兹条件式(1.21)的条件下，试导出波动方程式(1.18)和式(1.19)。

P1.3　请导出式(1.27)。

P1.4　对于正弦情况，证明式(1.22)可化为式(1.50)。

P1.5　a. 如图 P1.5 所示，沿 z 轴有一段长度 h 很小的电流元，试求其滞后位 $\boldsymbol{A}$ 的复数表达式。

b. 由上面的结果求出在 P 点的电场和磁场。假设该线电流大小为 $I_0(A)$。

c. 在远区，即 $R\gg\lambda$，$h\ll\lambda$，求 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 和 $\langle \boldsymbol{S}\rangle$。

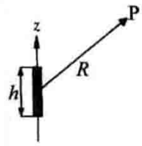


图　P1.5

P1.6　第一节主要复习了一下麦克斯韦方程，在本科必修课程中，我们花了大量时间来熟悉这些基于实验定律的方程。在这一过程中，用了很大的篇幅解释向量微积分和坐标系。这一讲的问题将使你改变你的本科背景。你可以通过浏览你在本科必修课程学习时所使用的教材本或通过上网查询来回答以下两个问题。这两个问题如下：

a. 式(1.1)～式(1.4)都是微分形式。写出相应方程的积分形式。

b. 应用式(1.1)的积分形式，即法拉第定律，可以计算出在某一个回路中的感应电压。该感应电压由两部分构成：(i)变压器电动势(ii)动生电动势。请给出一个仅有变压器电动势存在的例子；请给出一个仅有动生电动势存在的例子；请给出一个变压器电动势和动生电动势同时存在的例子。在刚才所述的第三种情况下，如果你的兴趣只是计算总感应电势，而不是将它分成独立的两部分来计算，是否有一种计算总感应电势的比较简单的方法，试举例说明。

P1.7　通过这道习题，你将想起滞后位的概念。式(1.22)和式(1.24)有助于回答这个问题。注意，式(1.22)仅当电流源为体电流时才成立，对于线电流源，应该用 $I\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 来代替 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$。

假设电流源是一个位于坐标原点且沿 y 轴的线电流，有：

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{L} = 2t\mathrm{d}y\,\hat{y}$$

试求出在点 $P(5, 10, 15)$处的微分矢量位 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}_P$。

请注意，可以用黑体字母或上方带箭头的字母来表示向量。$\hat{y}$表示在直角坐标系的 y 方向上的单位矢量。

P1.8　一个长为 l 的圆柱形电容器如图 P1.8 所示。内圆柱的半径为 a，外圆柱的半径为 b。在电容器内部，电介质的介电常数连续变化，有如下形式(K 为常数)

$$\varepsilon_r(\rho) = K\rho^2$$

证明导体中的传导电流 $I(t)$与电容器中的位移电流相同。

P1.9　一个极板面积为 A 的平行板电容器内部充满介电常数线性变化的电介质材料，在一个极板($y=0$)处 $\varepsilon=\varepsilon_1$，在另一个极板($y=d$)处 $\varepsilon=\varepsilon_2$(见图 P1.9)。忽略边缘效应，试确定该电容器电容的大小。

P1.10　两个同轴圆柱导体管的半径分别为 r_1 和 r_2，且 $r_2>r_1$(见图 P1.10)。试证明两个同轴圆柱导体管之间的位移电流与流过外电路中的电流相等。外加电压为 $V=V_0\sin\omega t$。

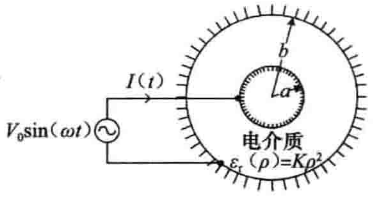


图　P1.8

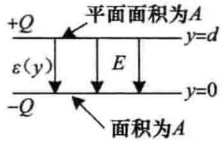


图　P1.9

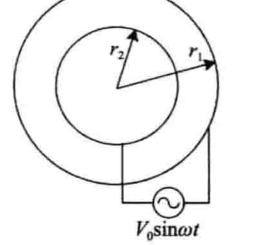


图　P1.10

第 2 章

P2.1　导出式(2.1)～式(2.3)。

P2.2　假设在一理想导体内的正弦电磁场为零。证明在理想导体的交界面上(见图 P2.3)，边界条件由式(2.23)或式(2.24)或式(2.25)或式(2.26)给出。

P2.3　本题分析感应加热的原理。将一块电导率为 σ_c 的金属板(良导体)放入交流磁场中，在表面 $z=\pm d$ 处，交流磁场的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_1=-H_1\hat{y}$。

a. 证明导体中的交流磁场为 $H(z)=H_1(\cosh\tau z/\cosh\tau d)$，其中 $\tau=(1+j)/\delta$，$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma c}}$。假设 $\delta\sim d$。

b. 证明 $\boldsymbol{J}=J\,\hat{x}$，其中，$J=\tau H_1(\sinh\tau z/\cosh\tau d)$。

c. 求在长为 1m(沿 x 轴)和宽为 1m(沿 y 轴)的金属板中消耗的功率。作为课后作业，你不必证明，但在接下来的课程中将证明当 $d\approx1.125\delta$ 时单位体积内消耗的功率最大。

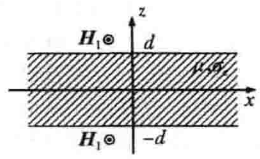


图　P2.3

P2.4　图 P2.4a 所示为一段长度为 Δz 的传输线的等效电路。

a. 导出瞬时电流 $I(z,t)$的微分方程式。

b. 假设电流在时间和空间上做正弦变化，即是，

$$I(z,t)=I\exp[\mathrm{j}(\omega t-kz)]$$

求出 ω 和 k 的关系式。

c. 图 P2.4b 给出了 $\omega_{p2}<\omega_{p1}$ 和 k 的草图。求截止频率 ω_c 的值和渐近线(虚线)的斜率。

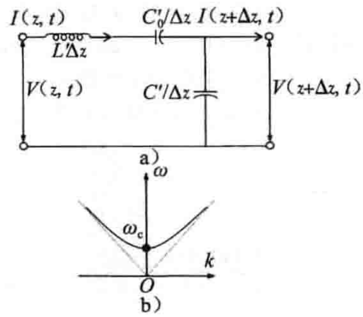


图　P2.4

P2.5　同轴电缆的横截面如图 P2.5 所示，其中的电场和磁场分别由下式给出。该线将电源与负载相连接。

在 $\rho=1$ 处：$\boldsymbol{E}=100\,\hat{a}_\rho+0.05\,\hat{a}_z\,\mathrm{V/m}$，$\boldsymbol{H}=2\,\hat{a}_\phi\,\mathrm{A/m}$

在 $\rho=2$ 处：$\boldsymbol{E}=C\,\hat{a}_\rho+0.02\,\hat{a}_z\,\mathrm{V/m}$，$\boldsymbol{H}=D\,\hat{a}_\phi\,\mathrm{A/m}$

a. 确定 C 和 D。

b. 若电缆长为 30m，求出电源功率，电缆上损耗的功率以及负载吸收的功率。

c. 上述说明“在 $\rho=2$ 处：$\boldsymbol{E}=C\,\hat{a}_\rho+0.02\,\hat{a}_z\,\mathrm{V/m}$”中可能有印刷错误。找出该印刷错误并加以纠正。给出一或两点为什么你认为此处有错误的理由。这个印刷错误或许不会影响(a)和(b)的答案。

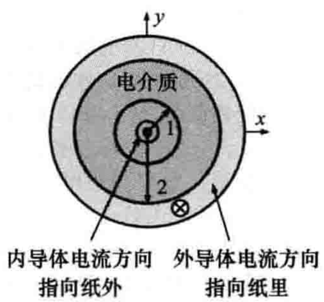


图　P2.5

P2.6　一条无损耗非均匀传输线有：

$$L'=L'(z)$$
$$C'=C'(z)$$

这里，L'、C'分别为传输线每单位长度上的电感和电容。

a. 确定瞬时电压 $V(z,t)$的偏微分方程。

b. 对指数传输线

$$L'(z)=L_0\exp(qz)$$
$$C'(z)=C_0\exp(-qz)$$

假设 $V(z,t)=V_0\exp(\mathrm{j}(\omega t-kz))$，确定 ω 和 k 的关系。

P2.7　一无畸变传输线满足条件

$$\frac{R'}{L'}=\frac{G'}{C'}$$

求该传输线的 α、β 和 Z_0。

P2.8　下式给出了一平面波的磁场的相量形式

$$\widetilde{H}(x)=2(\hat{y}+\mathrm{j}\,\hat{z})\exp(\mathrm{j}kx) \tag{P2.1}$$

a. 利用平面波的性质确定 $\overline{E}(x, t)$。

b. 由 $\overline{E}(x, t)$的表达式你可能会看出它是圆极化波，请问是左旋圆极化波还是右旋圆极化波？

c. 如果利用题 2.1 的方程来确定此极化，你将得到与(b)一样的结果。试通过画如 2.6b 或 c 所示的草图来检验这一结果。

d. 确定瞬时功率密度 $\overline{S}(x, t)$和有功功率密度$\langle \overline{S}_R(x, t)\rangle$。

P2.9 在空气中，将一特性阻抗为 $377\Omega/m^2$ 的导体薄膜放在一平板导体(PEC)之前的四分之一波长处(见图 P2.9)，来消除频率为 9GHz 的波的反射。假设忽略导体薄膜中的位移电流。在频率 6～18GHz 范围内，画出波反射功率与入射功率之比与频率的关系。

P2.10 一均匀平面波正入射到有机玻璃罩(电介质窗)上，玻璃罩两边均为自由空间，玻璃罩的厚度为 $3/8''$，相对介电常数 $\varepsilon_r = 2.8$，求反射系数和入射能量被反射的百分比。$\lambda_0 = 20$cm。当 $\lambda_0 =$ 10cm，$\lambda_0 = 3$cm 时，分别重复上述计算。并解释所求得的结果。

P2.11 在真空中，产生了一波长为 $\lambda_0 = 5.45\mu$m 的绿色离子激光束，它穿过折射率为 1.5 的玻璃窗后进入折射率为 $n = 1.34$ 的水中(见图 P2.11)。试设计一个玻璃窗，使一极化方向在入射平面内的波 **E** 在两个分界面处无反射，即求出 $\theta_{B2} - \theta_{B1}$。

P2.12 如图 P2.12 所示，一个地对空通信系统的发射天线置于距水面 10m 的高度处。接收天线与发射天线之间的水平距离为 10km，接收天线置于机载平台上。为了使水反射的反射波中无平行极化分量，试求接收系统距水面的高度 h_2。假设水面是平直的和无损耗(参考第 2 章)。

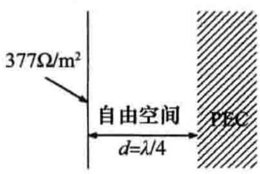


图 P2.9

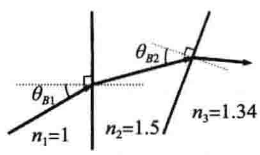


图 P2.11

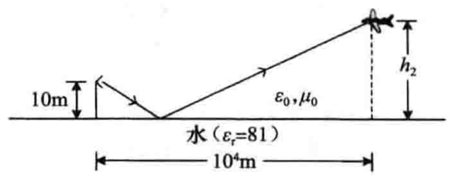


图 P2.12

P2.13 如图 P2.13 所示，一个内阻抗为 200Ω 和电压为 $V_{gs} = 60\angle 0°$的电源通过空气中的二线传输线连接到 $Z_{L1} = 200\Omega$ 的电阻负载上，传输线长度为 $l_1 = 10$cm，特性阻抗为 $Z_{01} = 50\Omega$ 的，空气中的波速为 $c = 3\times 10^8$ m/s。该负载通过长度为 $l_2 = 5$cm 的二线传输线连接到另一负载 Z_{L2} 上。用一个短路回路代替负载 Z_{L2}。在以下两个频率(f)下，试确定电流 I_{gs}：

a. $f = 60$Hz。即工频。

提示：当 βl 很小时，$\tan\beta l$ 可近似为零。

b. $f = 1.5$GHz。

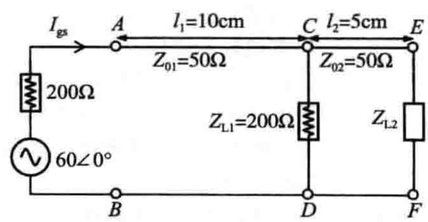


图 P2.13

P2.14 如图 P2.14 所示，一电介质板的介电常数为 ε_r。一平面波以角度 θ_i(0°$<\theta_i<$90°)斜入射到介质板一边。证明当 $\varepsilon_r \geqslant 2$ 时，无论 θ_i 的值多大，该波都将被约束在电介质板内传播。

P2.15 如图 P2.15 所示，一个各向辐射同性的电源放在水面以下 d 处。为了保证接收到辐射，水面上的一个观察者沿 x 方向(正向和负向)最多能够走多远？假设水的相对介电常数为 81，且水面平直和无损耗(参考 2.2 节)。

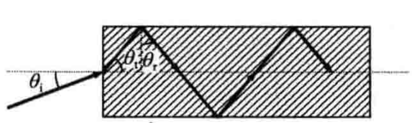


图 P2.14

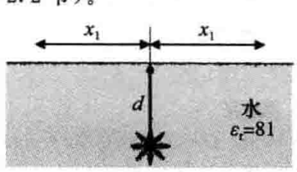


图 P2.15

P2.16 导出式(2.112)～式(2.115)。

P2.17 当 $0° < \theta_1 < \theta_c$ 时，电介质与电介质交界面的反射系数 Γ 为实数，θ_c 为临界角。当 $\theta_1 > \theta_c$ 时，发生全反射并且反射系数的模值为 1。因此，在 $\theta_c < \theta_1 < 90°$范围内，反射系数可表示为 $\Gamma = e^{j\phi}$。分别画出 s 波和 p 波的 ϕ 与 θ_1 的关系图。假设 $n_1 = 1.5$，$n_2 = 1.0$。上面的 θ_1 是入射角。

P2.18　a. 导出式(2.126)。

b. 计算离开半径为 ρ，长为 1m 的圆柱表面上的辐射功率。假设圆柱体位于远区，电源为沿 z 轴的一正弦变化长直线电流 $\tilde{I}$。

P2.19　一椭圆极化波的电场矢量的复数形式为：

$$\boldsymbol{E}(y) = \left[100\exp\left(\frac{\mathrm{j}\pi}{4}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + 50\exp\left(-\frac{\mathrm{j}\pi}{4}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right]\exp(-\mathrm{j}k_0 y)\,(\mathrm{V/m})$$

证明该电场可表示为一左旋圆极化波(LCP)和一右旋圆极化波(RCP)的电场之和。写出 LCP 波电场相量的完整表达式和 RCP 电场相量的完整表达式。

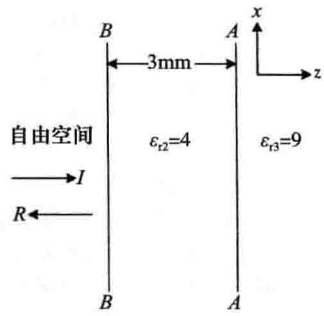


图　P2.20

P2.20　请看图 P2.20。当入射波的电场为 $E^{\mathrm{I}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi\times 10^{10}t - k_0 z]}\hat{\boldsymbol{x}}$(mV/m)时，试确定反射波($E^{\mathrm{R}}$)的电场。假设正入射。

P2.21　如图 P2.21 所示，一个地对空通信系统的发射天线放置在某一种液体上方 10m 高处。假设发射天线与接收天线之间的水平距离为 10km，接收天线安装在距液面高度为 $h_2 = 990$m 的机载平台上。试问液体的相对介电常数为何值时，被液体反射的波中无平行极化分量。假设液体表面平直且无损耗。

P2.22　一电介质板的纵断面如图 P2.22 所示。若 $\theta_1 = 30°$，θ_3 为在分界面 2 处的临界角，确定介质板的相对介电常数 ε_r。

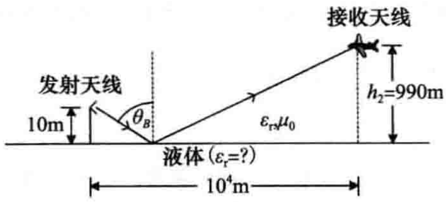


图　P2.21

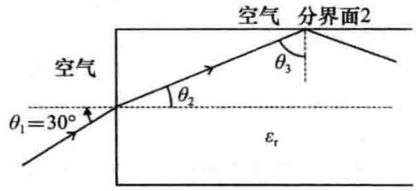


图　P2.22

P2.23　参见图 P2.23。由 s 波和 p 波所组成的入射波电场的瞬时形式由下式给出：

$$E_1 = (3\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{z}})\cos(\omega t - k_x x - k_z z) - 5\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t - k_x x - k_z z)\,(\mathrm{V/m})$$

a. 确定入射角。

b. 令 $\varepsilon_2 = A\varepsilon_0$，$\mu_2 = \mu_0$ 且入射角为布儒斯特角。试计算 A。并确定(i)Γ_s 和(ii)反射波电场的瞬时形式。

P2.24　a. 如图 P2.24a 所示，一 p 波沿 ζ 方向传播。它的电场由下式给出：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{p}} = (3\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{z}})\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_z z)]\,(\mathrm{V/m})$$

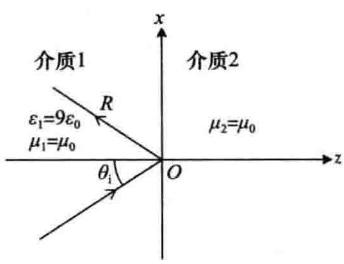


图　P2.23

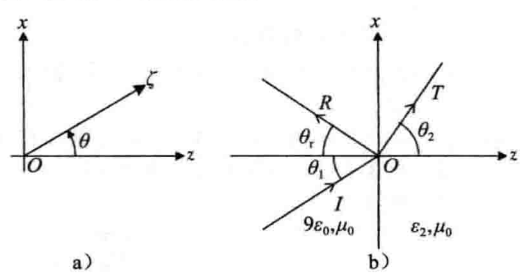


图　P2.24

确定角 θ 的值。当介质为空气时，计算 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{p}}$。

b. 由 s 波和 p 波所组成的入射波电场的瞬时形式(见图 P2.24b)由下式给出：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}} = (6\hat{\boldsymbol{x}} - 8\hat{\boldsymbol{z}})\cos(\omega t - k_x x - k_z z) + 10\,\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t - k_x x - k_z z)\,(\mathrm{V/m})$$

1) 确定角 θ_1。

2) 确定角 θ_r。

3) 若 $k_x = 0.5\mathrm{rad}/m$，计算频率 f 为多少赫兹，波长 λ 为多少米。

4) 确定入射波的极化特性。

5) 当入射角等于临界角时，求 ε_2 的值。

6）当反射波为线性极化波时，求 ε_2 的值。

7）若 $\varepsilon_2=16\varepsilon_0$，分别确定反射波电场的瞬时形式和透射波电场的瞬时形式。

8）若 $\varepsilon_2=25\varepsilon_0$，确定反射波电场的瞬时形式。

P2.25 在自由空间中，一圆极化驻波的电场强度的复数形式为：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathrm{j}\hat{\boldsymbol{y}})E_0\sin(kz) \tag{P2.2}$$

i. 确定：

a. 磁场强度$\widetilde{\boldsymbol{H}}$。

b. 瞬时功率密度。

c. 平均功率密度。

d. 假设该驻波为线性化波，且电场强度的复数形式如下：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}_0\sin(kz) \tag{P2.3}$$

确定上述(a)、(b)、(c)中的各个场量。

ii. 若让式(P2.2)给出的电场位于两个平行导电平板之间，两个导电平板分别在 $z=0$ 和 $z=d$ 处。求角频率 ω 和 d 的关系。

P2.26 在 $z=0$ 处，一面电流片的电流密度为

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}(x,y)=\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{K}_0\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}k_0x\right)(\mathrm{A/m})$$

由 K_0 分别确定(i)$z<0$(ii)$z>0$ 区域中的电场强度复矢量$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和磁场强度复矢量$\widetilde{\boldsymbol{H}}$。

P2.27 如图 P2.27 所示，s 波以角度 θ 自介质 1 入射到介质 2 中(入射面为 x-z 平面)，也即入射波的电场矢量如下：

$$\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{I}}=\hat{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{[-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta+z\cos\theta)]}(\mathrm{V/m})$$

介质 1 的相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{R1}}=16$，频率为 10GHz。

a. 确定 k_1。

b. 介质 2 为理想导体。(i)写出反射波磁场矢量 H^{R} 的表达式。(ii)反射系数 Γ_s。(iii)功率反射系数。(iv)总磁场$H(x, y, 0^-, t)$。(v)在分界面 $z=0$ 处的面电流 K。

c. 介质 2 的相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{R2}}=9$。(i)确定临界角 θ_c。(ii)取 $\theta=\theta_c+5°$。若将反射波磁场的 x 分量的瞬时表达式写成 $H_x^{\mathrm{R}}=A\cos(\omega t+bx+cz+2\phi)$，确定 ω、A、b、c、ϕ。

d. 介质 2 和(c)中一样。将一电场强度为 s 波电场强度两倍的 p 波，加入入射波中去。

i. 根据 E_0 和 θ，写出由 s 波和 p 波所组成的入射波的电场强度 E^{I} 表达式。

ii. 确定布儒斯特角 θ_{B}。

iii. 若 $\theta=\theta_{\mathrm{B}}$，写出反射波电场 E^{R} 和透射波电场 E^{T} 的瞬时表达式。

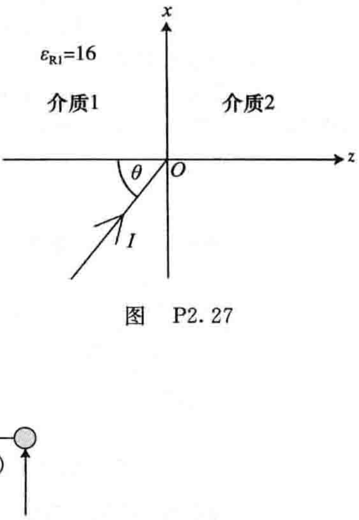


图 P2.27

P2.28 图 P2.28 所示为一段长度为 Δz 传输线的等效电路。试导出瞬时电压 $V(z, t)$所满足的微分方程。在所得结果中不能包含电流变量 $I(z, t)$。

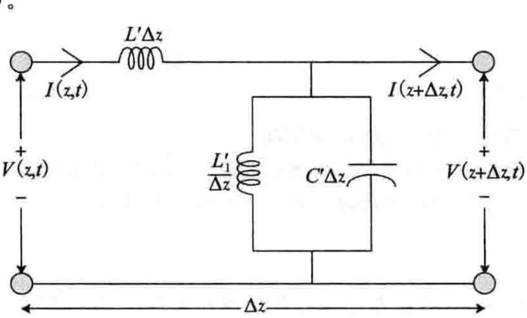


图 P2.28

P2.29　$z>0$ 区域为理想导体，$z<0$ 区域为自由空间。在自由空间中，磁场强度由下式给出：

$$\boldsymbol{H}=\hat{y}\cos(3\times10^{8}t-4x)(\mathrm{A/m})$$

a. 求$t=5\mathrm{ns}$时，点 $P(4,2,0)$处的面电流密度$\dot{J}_{s}$。

b. 求 $t=5\mathrm{ns}$ 时，点 $P(4,2,0)$处的面电荷密度 ρ_{s}。

P2.30　在 $t=0$ 时，在坐标原点处的电场强度为$(x\hat{x}-10\hat{y}+3\hat{z})(\mathrm{V/m})$。若坐标原点位于一理想导体表面上，与坐标原点相紧邻介质的 $\varepsilon_{R}=10$，$\mu_{R}=2$，$\sigma=0$。求出 $t=0$ 时刻，坐标原点处的面电荷密度。

P2.31　可以应用传输线模型来分析波在无限大良导体中的传播特性。图 P2.31 给出了一段长度为 Δz 传输线的等效电路。

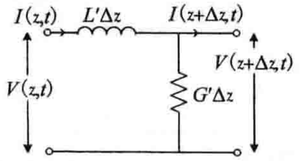


图　P2.31

a. 导出$V(z,t)$和$I(z,t)$的一阶耦合微分方程。消去V，导出I的二阶微分方程。

b. 假设电压在时间上和空间中作正弦变化，即是有：

$$I(z,t)=I_{0}\exp[\mathrm{j}(\omega t-kz)]$$

求出 ω 和 k 的关系。

c. 画出 ω-k 简图。

d. 根据你所学到的波在良导体中传播的知识，用导体的 μ 与 σ 来表示图中的L'和G'。

P2.32　图 P2.32 所示为两种非导电媒质，其分界面在 $z=0$ 处。图中还给出了媒质的相关参数和在两种媒质中的电场强度表达式。

a. 求出这些表达式中的常数 A、B、C。

b. 确定矢量 $\boldsymbol{H}_{2}$ 的表达式。

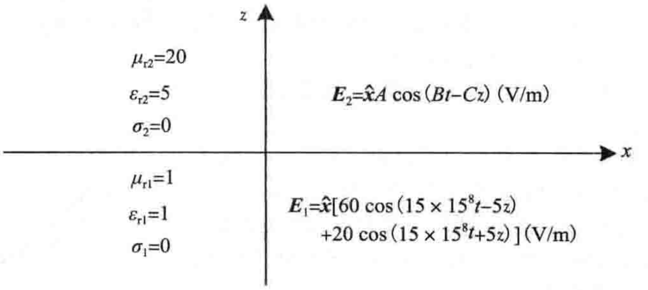


图　P2.32

P2.33　波由光密媒质(媒质 1)斜入射到光疏媒质(媒质 2)时会出现临界角。让 $n_{1}=1.5$，$n_{2}=1$。

a. 计算临界角。若入射波为 s 波，计算入射角比临界角大 5°时倏逝波的透入深度。求出沿分界面倏逝波传播的相速度。用媒质 2 中的波数来表示你得到的结果。

b. 当入射波为 p 波时，求布儒斯特角。

第 3 章

P3.1　导出式(3.29)、式(3.22)和式(3.23)。

P3.2　一个内尺寸为 $a=2.286\mathrm{cm}(0.9'')$和 $b=1.106\mathrm{cm}(0.4'')$的标准 X 波段矩形波导填充满无损耗聚苯乙烯($\varepsilon_{r}=2.56$)。对波导的低阶模式，当 $f=10\mathrm{GHz}$ 时，计算下列各个值：

a. 截止频率 $f_{c}(\mathrm{GHz})$。　　b. 波导波长 $\lambda_{g}(\mathrm{cm})$。

c. 波阻抗。　　d. 相位速度。

P3.3　证明 $1/\lambda_{g}^{2}=1/\lambda^{2}-1/\lambda_{c}^{2}$。

P3.4　在 $z=0$ 处，一电流片的电流密度为 $\boldsymbol{K}(x,y,t)=\hat{x}K_{0}\exp(\mathrm{j}\omega t)(\mathrm{A/m})$。假设介质为自由空间。

a. 写出矢量位函数 $\boldsymbol{A}$ 的微分方程。

b. 矢量位函数 $\boldsymbol{A}$ 的哪个分量将不为零？该分量与哪个坐标有关？写出该分量所满足的常微分方程。求出在 $z>0$ 区域中的解。其解中含有一个待定常数 A_{0}。

c. 由 A_{0} 计算出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

d. 利用安培定律确定 A_{0} 和 K_{0} 的关系。

e. 计算每平方米的辐射功率。

f. 若 $\omega=0$，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 将为何值？

g. 写出在 $z<0$ 区域内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

P3.5 设计一个圆波导，其中无损耗介质的相对磁导率为 1。在带宽为 1.5GHz 的范围内，波导必须在单一模式下工作。假设圆波导的半径为 1.12cm。

a. 求介质的介电常数，使得圆波导满足所期望的条件。

b. 求出工作频率的上、下限。

P3.6 设计一个用于微波炉中的矩形波导(确定 a、b)工作频率为 $f=900\text{MHz}$。取 $a/b=1.8$。选择 a 的值，使磁控管工作频率高于 TE_{10} 模型截止频率 30%时。即：

$$\frac{f}{(f_c)_{\text{TE}_{10}}}=1.3$$

确定波导波长。

P3.7 如图 P3.7 所示，已知矩形波导(TE_{10} 模型)中的电场强度为 $E_y=0.5\sin(\pi x/a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$，求在下 PEC 板上一点 $P(a/3)$，0，0)处的面电荷密度 ρ_s。

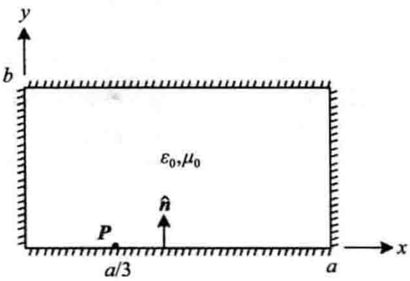


图 P3.7

P3.8 一矩形波导内，在 $z=0$ 处介质不连续，即在 $z<0$ 区域为 ε_1 和 μ_1，在 $z>0$ 区域为 ε_2 和 μ_2。

a. 计算无反射时 f/f_{c10} 的值。其中，f 为信号频率，f_{c10} 为 TE_{10} 模式的截止频率。

b. 对 TM_{mn} 模式重复上述计算，即计算无反射时 f/f_{cmn} 的值(对 TM_{mn} 模式)。

P3.9 a. 假设 $V(z,t)=V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}$，求习题 2.28 中偏微分方程的正弦稳态解，即得出 ω 和 β 的关系。

b. 图 P3.9a 所示为 ω-β 的草图。试计算 ω_c 的值和渐近线(点画线)的斜率。

c. 证明通过选择合适的 L' 和 C'，可以用习题 3.9 中的传输线来模拟在波导中传播的 TE_{mn} 模，让 $L'=\mu$，$C'=\varepsilon$。确定在波导中与传输线中的 V、I 和 L_1' 的相似量。

d. 将上述结果应用到图 P3.9b 所示矩形波导中的 TE_{23} 模式，并用 a、b 等来表示 L'。

e. 同样的传输线也能模拟 TE_{23} 模吗？请给出解释。

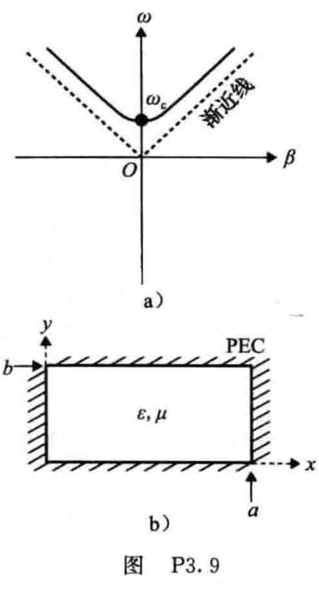


图 P3.9

P3.10 下式给出了矩形波导中 TE_{11}^z 模式的磁场的 z 分量：

$$H_z=-\mathrm{j}0.5\frac{(\pi/0.1)^2+(\pi/0.05)^2}{2\pi\times10^{10}}(3\times10^8)^2\cos(10\pi x)\cos(20\pi y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

确定：

i. a

ii. b

iii. 截止频率 f_c。

iv. 假设信号频率 $f=10^{10}\text{Hz}$，计算 β。

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8\text{m/s}$$

P3.11 图 P3.11 所示为一个导电波导管，其横截面为等腰直角三角形。

A 部分：

i. 对于 TM 模式，证明其电场的 z 分量为：

$$E_z=C_{mn}\left[\left(\frac{\sin m\pi x}{a}\right)\left(\frac{\sin n\pi y}{a}\right)-\left(\frac{\sin n\pi x}{a}\right)\left(\frac{\sin m\pi y}{a}\right)\right]$$

ii. 求 m 和 n 的允许值。

iii. 求两个最低截止频率的值。

B 部分：

i. 对 TE 模式，求 H_z。

ii. 求出 TE 模式的最低截止频率。

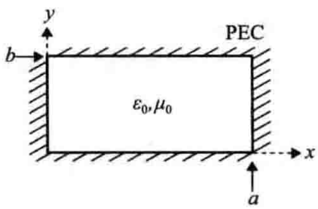


图　P3.10

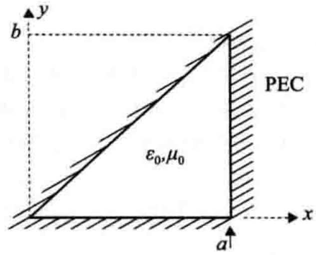


图　P3.11

第 4 章

P4.1　圆柱谐振腔如图 P4.1 所示，同时考虑 TE 和 TM 模式，求出三个最低谐振频率。

请注意：在复习了关于圆柱波导的 3.7 节和关于矩形腔波导的 4.1 节和 4.2 节之后，你可以将这些理论推广至圆柱谐振腔的分析中。

P4.2　在圆柱谐振腔中激发出的 TM_{011} 模式的谐振频率为 9.375GHz。该谐振腔由铝板($\sigma=3.5\times10^7$ S/m)做成，其高度为 2cm(见图 P4.2)。

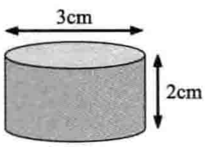


图　P4.1

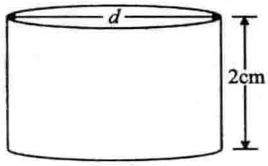


图　P4.2

a. 求该谐振腔的直径。

b. 若在谐振腔中充满湿雪(介电常数＝3.5－j0.1)，求此时的谐振频率。

P4.3　图 P4.3 所示为一圆柱谐振腔，分别求出下列模式的谐振频率。

a. TM_{212}　　　　b. TE_{222}

P4.4　设计一个高度为底面宽度的 1/2 且谐振频率为 1GHz 的矩形谐振腔，谐振腔的底面为正方形。计算下列三种情况下该谐振腔的品质因数 Q。

a. 谐振腔中为空气；

b. 腔中充满聚苯乙烯；

c. 当谐振腔的腔壁材料为铜，且内部为空气填充时。

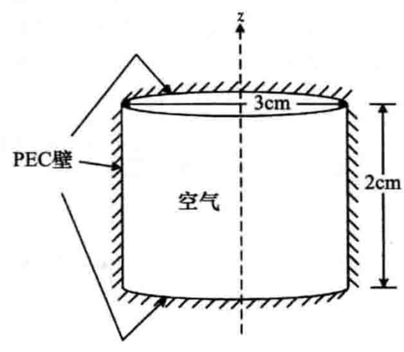


图　P4.3

第 6 章

P6.1　一个立方体盒子沿 x、y、z 方向的尺寸分别为 a、b、c。

取盒子的一个角所在点作为直角坐标系的原点，并且使盒子中各点的坐标均为正值。

位于 xy 平面上的盒子表面的电位如下：

$$V_{0xy}=V_1\sin\left(\frac{2x}{a}\pi\right)\sin\left(\frac{3y}{a}\pi\right)$$

位于 yz 平面上的盒子表面的电位如下：

$$V_{0yz}=V_2\sin\left(\frac{y}{b}\pi\right)\sin\left(\frac{5z}{c}\pi\right)$$

盒子的其他 4 个表面的电位均为零。求盒中各点的电位。

P6.2 一个矩形截面柱体，其截面沿 x 方向的边长为 a，沿 y 方向的边长为 b，其长度由 $z=0$ 延伸至 $z=\infty$。该矩形截面柱体四个侧面的电位均为零。在 $z=0$ 底面上，该矩形截面柱体盖子的电位分布如下：

$$V(x,\ y,\ 0)=0,\ 0<x<a/2,\ y\ \text{取任意值}$$

$$V(x,\ y,\ 0)=V_0,\ a/2<x<a,\ y\ \text{取任意值}$$

求矩形截面柱体中的电位 $V(x,\ y,\ z)$ 分布。

P6.3 图 P6.3 所示为一个圆柱形电容器。求电容器内、外空间中的电位分布。

P6.4 如图 P6.4 所示，圆柱导体壳的两个底面分别位于 $z=0$ 和 $z=l$ 处，其两个底面盖板的电位均为零。圆柱导体壳的半径为 a。圆柱导体壳分为两部分：

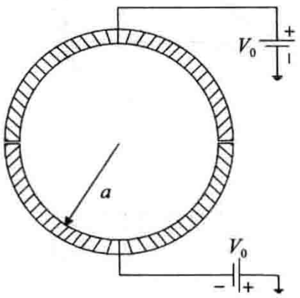


图 P6.3

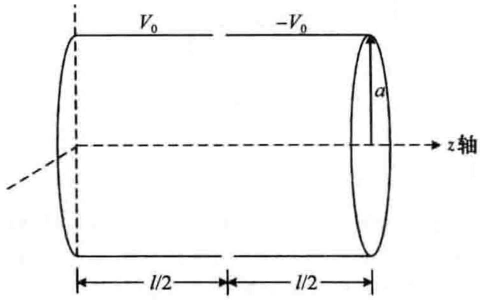


图 P6.4

从 $z=0$ 至 $z=l/2$ 部分，它的电位为 V_0；而从 $z=l/2$ 至 $z=l$ 部分，它的电位为 $-V_0$。试求圆柱导体壳内部的电位分布。

P6.5 假设将图 P6.5 中 $z=l$ 处的盖板分成许多个相互绝缘的导电环，并以适当的方式将它们连接到电源，使得电位分布近似为半径的贝塞尔函数 J：

$$\Phi(\rho,l)=CJ_0\left(\frac{p_1\rho}{a}\right)$$

$z=0$ 处的盖板电位为零。写出圆柱体内部任意一点的 $\Phi(\rho,\ z)$。

P6.6 在满足拉普拉斯方程的区域中，电位既没有最大值，也没有最小值。试证明之。

考虑一个由闭合导电表面所包围的自由空间，导电表面的电位为 100V。在该自由空间内部，某一点的电位能否为 80V？或另外一点的电位能否为 120V？能否得到在原点处的电压？能否证明在闭合表面内部，所有点的电位必须为 100V？这就是法拉第笼的工作原理。

P6.7 求出在 $0<x<\infty$，$0<y<b$ 区域内任意一点 $P(x,\ y)$处的电位。其边界上的电位分布由图 P6.7 给出。

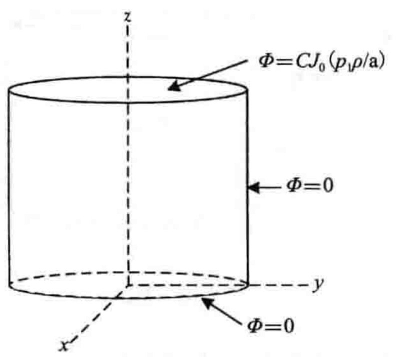


图 P6.5

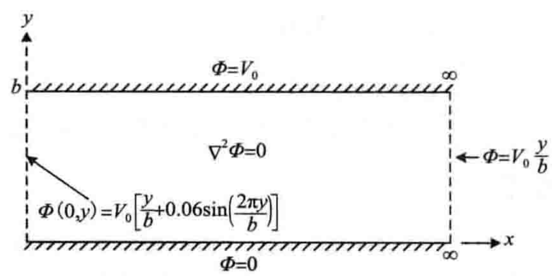


图 P6.7

P6.8 如图 P6.8 所示，一导电半球置于无限大导电平板上。在半球放上去之前，在无限大导电平板上方空间中的电场是一个均匀电场，其方向垂直于平板且值为 E_0。球的半径为 a。θ 是自平板的垂直线测得的角度。平板上方介质为空气。假设半球和平板的电位都为零。求出半球和平板导体上方各点的电位。并求$\Phi(r,\ \theta,\ \phi)$。注意，$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，当 n 为奇数时 $P_n(0)=0$，当 n 为偶数时

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}$$

P6.9 一球形电容器内部充满介电常数为 $\varepsilon_r(r)=r^3$ 的非均匀介质(见图 P6.9)。求它的电容。

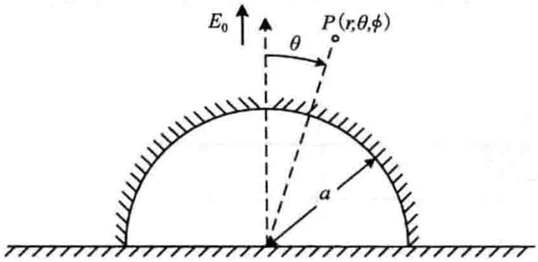


图 P6.8

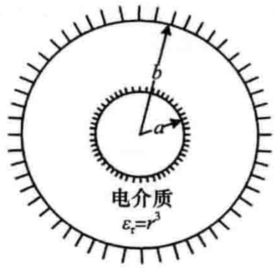


图 P6.9

P6.10 如图 P6.10 所示，$z=1$ 处盖板的电位为：

$$\Phi_1 = 100J_0\left(p_1 \frac{\rho}{a}\right)$$

$z=0$ 处盖板的电位为：

$$\Phi_2 = 20J_0\left(p_3 \frac{\rho}{a}\right)$$

这里，p_1、p_3 分别为贝塞尔函数 J_0 的第一个和第三个零点。$\rho=a$ 表面的电位为零。写出圆柱体内部任意一点的 $\Phi(\rho,\ z)$。

P6.11 如图 P6.11 所示，在这个二维问题中，圆 $\rho=a$ 上的电位变化如下：

$$\Phi(a,\phi) = \ln a + a^3\cos 3\phi$$

确定点 $P(a/2,\ 60°)$处的电位。

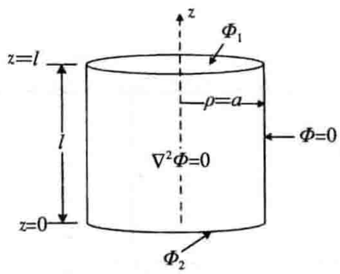


图 P6.10

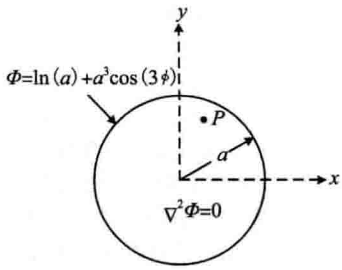


图 P6.11

P6.12 如图 P6.12 所示，在圆柱 $a<\rho<b$ 区域内，静电场的电位 V 满足拉普拉斯方程。边界条件如下：

$$V(a,\phi) = 100a^2\cos(2\phi) + (20/a^3)\cos(3\phi)$$

$$V(b,\phi) = 100b^2\cos(2\phi) + (20/b^3)\cos(3\phi)$$

已知 $b=2a$，$V(3a/2),\ 90°)=-4\text{V}$，求 a。

P6.13 如图 P6.13 所示，一块电导率为 s 的材料，其圆截面的直径为 $2a$。求出 A 与 B 面之间的电阻 R。证明当 $\frac{a}{\rho_0}\ll 1$ 时，近似值 $R=\frac{\pi\rho_0/2}{\sigma\pi a^2}=\frac{\rho_0}{2\sigma a^2}$是合理的。

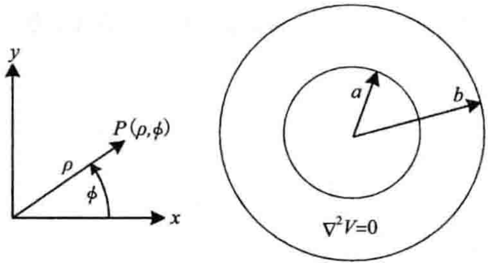


图 P6.12

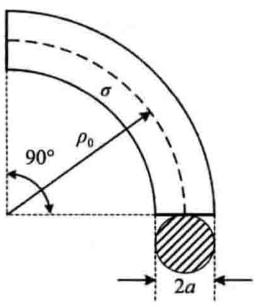


图 P6.13

P6.14 如图 P6.14 所示，有一个埋于大地（导电性能不良）中的良导体球。确定该接地系统的电阻。已知 $\sigma=10^{-2}$，$I=1000\text{A}$，求 A、B 两点之间的电压。若 A 和 B 分别代表一个人的两足，该电压是否对人有危险？

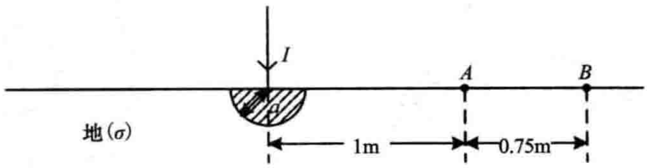


图 P6.14

P6.15 如图 P6.15 所示，在 $\rho=a$ 的圆柱面上，流过面电流 $\boldsymbol{K}=F(\phi)\hat{\boldsymbol{z}}$。求各点的 $\boldsymbol{B}$。利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 来解该习题。

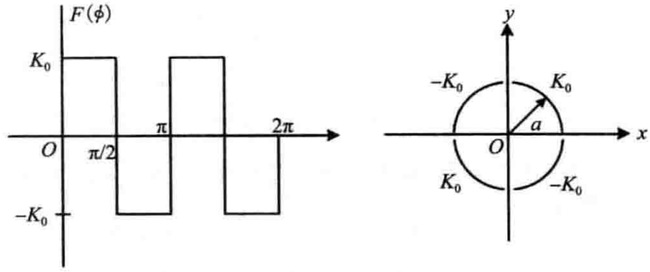


图 P6.15

P6.16 确定以下各区域中的电位：
区域 1：$0<x<c$ 且 $0<y<b$。
区域 2：$c<x<a$ 且 $0<y<b$。
如图 P6.16 所示，在 $x=c$ 处，有一电荷面密度为常数 $\rho_s(\text{C/m}^2)$ 的面电荷分布。

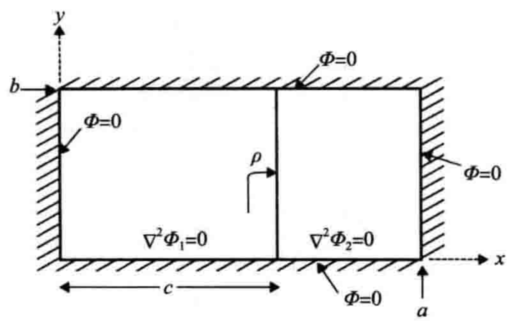


图 P6.16

P6.17 a. 在一个由闭合面 S 为所包围的区域 R 中，电位 V 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 V=0$。证明，在该区域 R 中 V 既没有最大值也没有最小值。

b. 参见图 P6.17。已知在 S 面（半径 $r=2$ 的球面）上的电压 V 为 $V_s=50+20\cos\theta$。证明，我们可以给出在球内点 C 的电位值的范围：即 $V_{\min}<V_C<V_{\max}$。求出 $V_{\min}$ 和 $V_{\max}$。

c. 可以证明，在球坐标下拉普拉斯方程的解由下式给出：

$$V=\sum_{m=0}^{\infty}A_m r^m P_m(\cos\theta)$$

这里，假设 V 与 ϕ 无关，且 $r<2$。$P_m(\cos\theta)$ 为勒让德多项式的符号，表 5.3 给出了其中一部分的表达式。

求 V_C，C 点在球坐标系中的位置为 $r=0.5$，$\theta=30°$，$\phi=120$。

P6.18 有一个沿 x、y、z 方向尺寸分别为 a、b、c 的盒子。盒内的介质为自由空间，且在盒子各个表面上电位分别满足下列方程：

$$\Phi(0,y,z)=0,\quad \frac{\partial\Phi(a,y,z)}{\partial x}=0$$

$$\Phi(x,0,z)=0,\quad \Phi(x,b,z)=0$$

$$\Phi(x,y,0)=0,\quad \Phi(x,y,c)=V_0\left[\sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)\right]$$

求出在区域：$0<x<a$，$0<y<b$，$0<z<c$ 内 $\Phi(x,y,z)$ 的值。

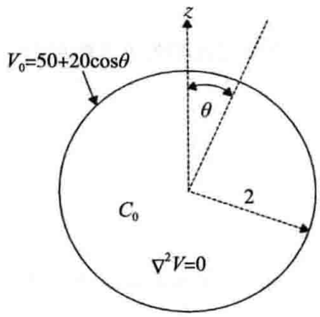


图　P6.17

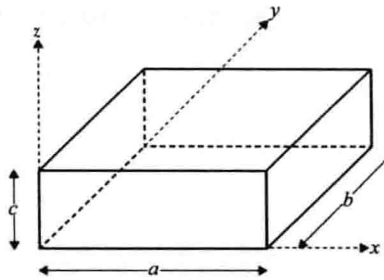


图　P6.18

P6.19　求点 $P(2, 1, 3)$的电位。如图 P6.19 所示，两块导体板的长度为$-80<z<80$。其中，一个导体板的电位为 0V，另一块导体板的电位为 50V。两块导体板之间被一小绝缘间隙隔开。请使用合适的近似值。

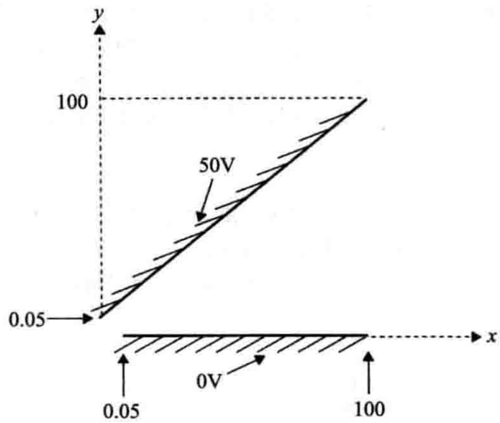


图　P6.19

第 7 章

P7.1　推导式(7.8)。

P7.2　证明，在空波导中群速度为：

$$v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

P7.3　推导式(7.30)。

P7.4　如图 P7.4 所示，令$\tilde{\bar{G}}=\hat{z}G(\rho)$和$\nabla^2 G+k_0^2 G=\delta(\bar{\rho}-\bar{\rho}')$。

求一维格林函数 $G(\bar{\rho}-\bar{\rho}')$。

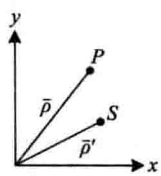


图　P7.4

P7.5　求如下微分方程的格林函数

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\delta(x-x'),\quad 0<x<L$$

其边界条件为：

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad 和 \quad G=0, x=L$$

P7.6　对下面两种情况，分别求格林函数 G：

a. $\frac{d^3G}{dx^3}=\delta(x-x')$，$x$ 的定义域是：$0<x<L$

$$G=0, x=0,\quad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad G(L)=0$$

b. $\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=\delta(x-x')$，$x$ 的定义域是无界的，即是$-\infty<x<\infty$

$$G=0,\quad x=0,\quad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad G(L)=0$$

P7.7　参考 7.3 节和图 P7.8。

已知 $Z_{11}-Z_{12}=j2$，$Z_{22}-Z_{12}=j5$，$Z_{12}=Z_{21}=j$。

求 $ABCD$ 参数和 S 参数。利用所求得的结果，求输入端的反射系数，假设输出端处于匹配状态。

P7.8　已知

$$Z_1 = Z_{11}-Z_{12} = j3$$
$$Z_2 = Z_{22}-Z_{12} = j7$$

$$Z_3 = Z_{12} - Z_{21} = \mathrm{j}1$$

求 $ABCD$ 参数。利用所求得的结果，求输入端的反射系数，假设输出端处于匹配状态。

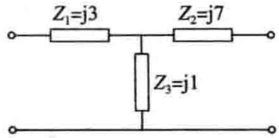


图 P7.8

P7.9 如图 P7.9 所示，p 波在厚度为 d 电介质层中传播。求 $ABCD$ 参数(考虑在电介质层中的正向行波和负向行波)。

P7.10 将上题中的波换成 s 波，重新求解。

P7.11 如图 P7.11 所示，为一段长度为 Δz 的传输线的等效电路：

a. 推导出电压 $V(z, t)$的偏微分方程。

b. 假定 $V(z, t)=V_0 e^{j(\omega t-kz)}$，求 ω 和 k 的关系。

c. 画出 ω-k 图，按照下面公式标注：

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1'}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2' C_2'}}$$

假设将这个传输线作为一个滤波器，其阻带为 5～10GHz。试选择合适的 L_1'、L_2'、C_1'、C_2' 值来实现这一目标。

对于这些选定的值，求当信号频率为 12GHz 时的群速度和相速度。

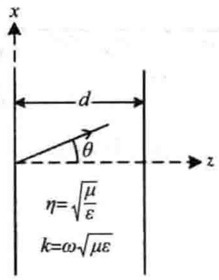


图 P7.9

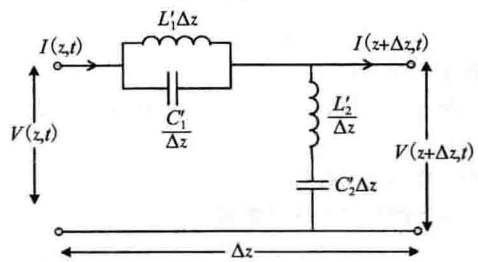


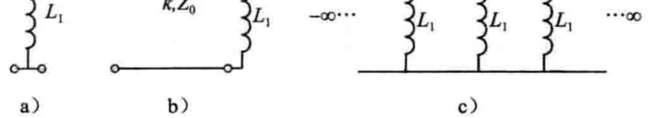
图 P7.11

P7.12 a. 求出图 P7.12 所示阻抗 Z_1 中集总电感 L_1 的 $ABCD$ 参数。

b. 在空气中，有一长度为 l 的无损耗传输线，其波数为 k 和特性阻抗为 $Z_0\Omega$。如图 b 所示，该传输线终端接有一电感负载。求出该系统的 $ABCD$ 参数。

c. 图 b 所示系统为一周期系统中的一个单元。如图 c 所示，在周期系统中有无限个单元。求该周期系统的色散关系，即周期系统的传播常数 β 与单元参数之间的关系式。

d. 求该系统的第一个通带，用 $\omega_1<\omega<\omega_2$ 的形式表示。求出 ω_1 和 ω_2。



a）　　b）　　c）

图 P7.12

P7.13 a. 求出图 P7.13 所示导纳 Y_1 中集总电容元件 C_1 的 $ABCD$ 参数。

b. 在空气中，有一长度为 l 的无损耗传输线，其波数为 k，特性导纳为 $Y_0=1/Z_0$。如图 b 所示，该传输线终端接有一电容负载。求该系统的 $ABCD$ 参数。

c. 图 P7.13b 所示系统为一周期系统中的一个单元。如图 P7.13c 所示，在周期系统中有无限个单元。求该周期系统的色散关系，即周期系统的传播常数 β 与单元参数之间的关系式。

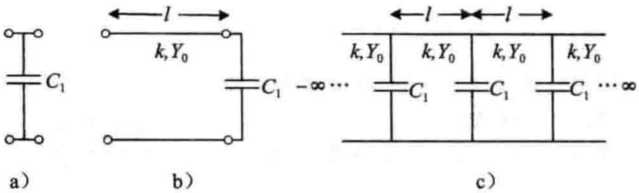


图 P7.13

第 8 章

P8.1 纯金属钠的等离子体频率为 $\omega_p=2\times10^{16}$ rad/s，碰撞频率为 $\nu=2\times10^{13}$ rad/s。在图 8.6 中已经画出了 α、β、n_R、n_I 的曲线。请在图 8.6 中标记出导电区、截止点和电介质区。

P8.2 假设图 8.7 所示等离子体媒质的碰撞频率为 ν(rad/s)。根据式(8.41)求等离子体振荡衰减的时间速率。

P8.3 证明，在无界等离子体中群速度为：

$$v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

P8.4 求等离子频率为 f_p 的等离子体介质中波导的截止频率。假设 f_c 为空波导的截止频率。

P8.5 当宇宙飞船返回大气层时，与大气层的强烈摩擦会产生 1m 厚的等离子体护层，等离子体护层中的电子密度为 $N_0=10^{13}/\text{cm}^3$，碰撞频率为 $\nu=10^{11}/\text{s}$。当信号频率分别为(a)30GHz，(b)300GHz，(c)350GHz 时，计算其功率损耗，用分贝作单位。

P8.6 在习题 19.3 中，给出了水的相对介电常数为：

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1+\mathrm{j}\omega t_0}$$

其中，ε_∞ 为在无限大频率时的介电常数，ε_s 为在零频率时的静态介电常数，t_0 为弛豫时间。当频率分别为

i. 5GHz，ii. 20GHz，iii. 50GHz 时求(a)波阻抗 η_C；(b)相速度；(c)群速度。

P8.7 计算和绘出两种介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=2$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$ 媒质的混合物的等效介电常数随 f 变化的函数曲线，其中 f 为介电常数为 ε_{r2} 的媒质在混合物中所占的体积分数。

P8.8 如图 P8.8 所示，一厚为 d 的超导体薄膜受到如下外磁场激励，其中 d 与伦敦透入深度 λ_L 在同一数量级：

$$\boldsymbol{H}(d/2) = H_1\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{H}(-d/2) = H_1\hat{\boldsymbol{y}}$$

假设为直流磁场激励，且 $d\ll w$。

a. 求在 $-d/2<z<d/2$ 范围内 $\boldsymbol{H}$ 的表达式

b. 求在 $-d/2<z<d/2$ 范围内 $\boldsymbol{J}$ 的表达式

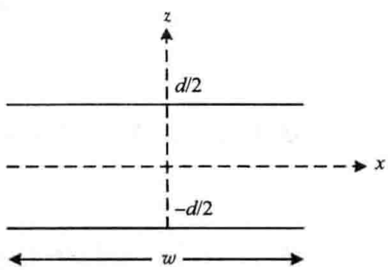


图 P8.8

P8.9 推导式(8.124)和式(8.130)。

P8.10 从式(8.135)开始，推导式(8.141)。

P8.11 一超导微带传输线的参数如下：正常电导率：$\sigma_n=0.5\times10^6$(S/m)，伦敦透入深度：$\lambda_L=0.5\times10^{-6}$m。超导体的临界温度 $T_c=92.5K$，λ_L 是在温度 $T=77$K(液氮)时的值。计算超导带的表面电阻 R_s，并将它与上面给定 σ_n 值的普通导体的表面电阻进行比较。频率 $f=10$GHz。

P8.12 a. 参考图 4.1。利用矩形谐振腔的 TE_{101} 振荡模式来设计一个毫米波电子设备，矩形谐振腔的底面为正方形($a=b$)，且高度为 h。工作频率为 $f_r=0.2$THz。为了使电子通过的时间最短，谐振腔的高度必须足够小($h=1$mm)。谐振腔中是空气，其壁材料为铜。通过计算 a 以及计算谐振腔的品质因数 Q，来设计谐振腔。

b. 假设谐振腔的腔壁是用超导材料做成的，其参数为：正常电导率：$\sigma_n=5\times10^6$(S/m)，伦敦透入深度：$\lambda_L=0.5\times10^{-6}$(m)。

求该谐振腔的 Q。

第 9 章

P9.1 如图 P9.1 所示，在传输线(长为 Δz)的等效电路中，设 $L_R=C_R=L_L=C_L=1$。

a. 画出 ω-k 图，k 从 $-\infty$ 变化到 ∞。

b. 如果 $\omega=0.8$，求(i)相速度 v_p。(ii)群速度 v_g 和(iii)波长 λ。

c. 当 $\omega=1$ 时，重复(b)。

d. 当 $\omega=1.1$ 时，重复(b)。

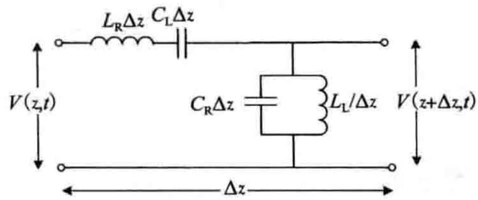


图 P9.1

P9.2 求在手征介质中传播的 L 波的波数 k_c 和波阻抗 η_C。

P9.3 一线性极化波可分解成两个圆形极化波，例如：$E_0\hat{x}=(E_0/2)(\hat{x}+\mathrm{j}\,\hat{y})+(E_0/2)(\hat{x}-\mathrm{j}\,\hat{y})$。在求解问题时，这种分解方法可能很有用。一个本构关系为式(9.93)和式(9.94)的手征介质在 10GHz 时的参数为：$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$，$\varepsilon_r=2$，$\mu=\mu_0\mu_r$，$\mu_r=1$，$\xi_c=0.005$。在这种媒质中，一线性极化平面波向正 z 轴方向传播，在 $z=0$ 平面上其电场沿 x 轴方向，且表达式为 $\boldsymbol{E}=\hat{x}\,3\cos(2\pi\times10^{10}t)\,\mathrm{V/m}$。

a. 求在 $z=2\times10^{-2}$ 处，此媒质中的电场。

b. 试确定该波在这种媒质中传播的极化性质，并且像图 2.6 一样，在 $z=2\times10^{-2}$ 平面上绘出该波。

c. 求在 $z=2\times10^{-2}$ 处该波的磁场 $\boldsymbol{H}$。

P9.4 a. 画出一手征介质层做周期性分布的无界周期媒质的 ω-k 图。假设在每个单元中各层手征介质的参数值如下：

第一层：$\varepsilon_1=2\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$\xi_{c1}=10^{-3}$，$L_1=L_0=3\mathrm{cm}$。

第二层：$\varepsilon_2=3\varepsilon_0$，$\mu_2=\mu_0$，$\xi_{c2}=-4\xi_{c1}$，$L_2=2L_0$。

b. 求第一阻带的中心位置。并且计算出第一阻带的带宽。

c. 其他参数与上面一样，仅取 $\xi_{c1}=0$，即介质层不是手征的。求第一阻带的中心位置和带宽。

第 10 章

P10.1 让 $\varepsilon_p(z,\omega)$ 由下式给出：

$$\varepsilon_p(z,\omega)=\varepsilon_1,\quad -\infty<z<0 \tag{P10.1}$$

$$=\varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\frac{z}{L},\quad 0<z<L \tag{P10.2}$$

$$=\varepsilon_2,\quad L<z<\infty \tag{P10.3}$$

证明，方程式(10.15)在下面两个区域内的解可以分别表示为：

$$E=I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1z}+R\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1z},\quad -\infty<z<0 \tag{P10.4}$$

$$=T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2z}+A\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2z},\quad L<z<\infty \tag{P10.5}$$

其中，I、R、T、A 为常数且 $k_1=k_0\sqrt{\varepsilon_1}$，$k_2=k_0\sqrt{\varepsilon_2}$。试给出取 $A=0$ 的物理解释。注意，当 $I=1$时，R、T 分别为反射系数和透射系数。假设波沿 z 轴传播。

P10.2 假设在上面的式(P10.2)和式(P10.3)中，有 $L=0$，求 $|R|^2$ 的解析表达式。

P10.3 波长为 $0.633\mu\mathrm{m}$ 的光从空气中入射到空气－铝分界面上。在波长为 $0.633\mu\mathrm{m}$ 时，铝的相对介电常数为 $\varepsilon_r=-60.56-\mathrm{j}24.86$。绘出反射率($\rho$)随 s 波入射角 θ_i 变化的曲线。

P10.4 图 P10.4 所示为几何构形。

求以 45°入射角从自由空间中入射到金属时，当 ω 满足以下条件时，p 波的反射率。

a. $\omega=8.2\times10^{15}\,\mathrm{rad/s}$

b. $\omega=1.1\sqrt{2}\times8.2\times10^{15}\,\mathrm{rad/s}$

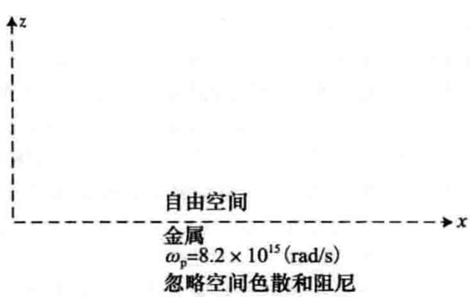


图 P10.4

P10.5　图 P10.4 所示为几何构形。

当 $\omega=4.1\times10^{15}$ rad/s 时，研究表面等离子激元 TM 在这个分界面上的传播特性。

a. 求在分界面上表面电荷波的相速度。

b. 求在自由空间中距离分界面多远时，电场强度的 z 轴分量为其在分界面的 0.3679($=e^{-1}$)。以米为单位。

c. 求在金属层内距离分界面多远时，电场强度的 z 轴分量为其在分界面的 0.3679($=e^{-1}$)。以米为单位。

P10.6　图 P10.4 所示为几何构形。

当 $\omega=9.84\times10^{15}$ rad/s 时，研究表面等离子激元 TM 在这个分界面上的传播特性。

a. 求在分界面上表面电荷波的相速度。

b. 求在自由空间中距离分界面多远时，电场强度的 z 轴分量为其在分界面的 0.3679($=e^{-1}$)。以米为单位。

c. 求在金属层内距离分界面多远时，电场强度的 z 轴分量为其在分界面的 0.3679($=e^{-1}$)。以米为单位。

P10.7　在此题中，我们研究在区域 $0<z<L$ 内方程式(10.15)的解的性质。

通过引入一个新变量 $\xi=k_0^2\varepsilon_p(z,\omega)$，证明方程式(10.15)可转化成：

$$\frac{d^2E}{d\xi^2}+\frac{\xi E}{\beta^2}=0 \tag{P10.6}$$

且

$$\beta=k_0^2\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{L} \tag{P10.7}$$

注意方程式(P10.6)的解可以用亚里函数 Ai 和 Bi 表示成如下形式：

$$E=c_1Ai(-\beta^{-2/3}\xi)+c_2Bi(-\beta^{2/3}\xi),\quad 0<z<L \tag{P10.8}$$

P10.8　求反射系数 R，并绘出功率反射系数 $|R|^2$ 随 L 变化的曲线。取 $\varepsilon_1=(4/3)^2$ 和 $\varepsilon_2=1$。在光频范围内，这些参数可以用于近似水-空气分界面。假设介电常数是一个线性函数，其表达式为：

$$\varepsilon_p(z,\omega)=\begin{cases}\varepsilon_1, & -\infty<z<0 & \text{(P10.9)}\\ \varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\dfrac{z}{L}, & 0<z<L & \text{(P10.10)}\\ \varepsilon_2, & L<z<\infty & \text{(P10.11)}\end{cases}$$

P10.9　试讨论在金属-真空分界面存在 TE 表面波模式的可能性。

P10.10　有一由电介质层交替分布所构成的无界周期性媒质，试导出该无界周期性媒质的色散关系，并画出 ω-k 图。假设在每个单元内各层介质的参数值如下：

第一层：$\varepsilon_1=2\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$L_1=L_0=3$cm。

第二层：$\varepsilon_2=3\varepsilon_0$，$\mu_2=\mu_0$，$L_2=2L_0$。

求第一阻带的中心的位置。同时，确定这个阻带的带宽。

第 12 章

P12.1　推导式(12.25)。

P12.2　证明式(12.25)与式(12.28)是相同的。

P12.3　给定 $f=2.8$GHz 和 $B_0=0.3$T，求当 L 波截止时，等离子体中的电子密度。

P12.4　给定 $f=10$GHz 和 $B_0=0.3$T，求当 R 波截止时，等离子体中的电子密度。

P12.5　一均匀等离子体位于磁场强度为 0.1T 的磁场中，现在测量一个波长为 8mm 的微波光束的法拉第旋转。测得在经过 1m 传播距离之后，极化面旋转了 90°。求等离子体中的电子密度。

P12.6　a. 对于一个哨声模式，即是 $\omega\ll\omega_p$，$\omega\ll\omega_b$，证明群速度可以近似为：

$$v_g\sim\frac{\sqrt{\omega\omega_b}}{\omega_p} \tag{P6.1}$$

b. 假设由于闪电产生了一个频率范围为 1～10kHz 的信号。这些信号沿地磁场从地球的这一半球传播到另一半球，其路径的长度为 5000km，试导出信号传播时间与频率之间的函数。各个参数取下列典型值：$f_p=0.5$MHz，$f_b=1.5$MHz。

P12.7 对于 R 波传播情况，图 12.1 所示为介电常数随频率的变化。在 0 到 ω_b 之间为哨声模式。求 ε_{pR} 最小时的频率 ω。在此频率下 ε_{pR} 的最小值为多少？

P12.8 有一频率为 $f_0=60\text{Hz}$ 的右旋圆极化电磁波，在金属钾中沿 z 轴方向传播。在接近绝对零度下，金属钾处在一静磁场 B_0 中，静磁场的方向沿 z 轴。
求(a)相速度和(b)金属中电磁波的波长。
假设金属的电子密度 N_0 使得 $\omega_p=10^{16}\text{rad/s}$。
假设 B_0 的值使得电子回旋频率为 $\omega_p=10^{12}\text{rad/s}$。
假设碰撞频率 ν 可以忽略不计。
如果应用基于上面给出的不等式中的近似值，那么计算就会得到很大的简化。试给出极低温度与上面其中一条假设的关系。

P12.9 推导式(12.52)和式(12.54)。

P12.10 推导式(12.56)和式(12.58)。

P12.11 一频率为 $f=2\text{GHz}$，沿 x 方向极化的平面波从自由空间垂直入射到磁等离子体中。图 P12.11 所示为磁等离子体中的电子密度和静磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向和大小。求功率反射系数。

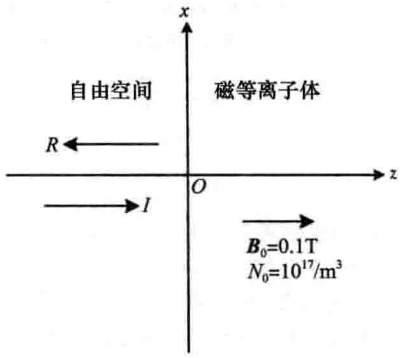


图 P12.11

第 13 章

P13.1 双轴晶体云母的主轴折射率分别为：$n_x=1.552$、$n_y=1.582$ 和 $n_z=1.588$。一平面波沿 x 轴方向传播，其在 $x=0$ 处的电场为：

$$\boldsymbol{E}=\sqrt{2}E_0(\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}})e^{j\omega t}$$

a. 求在 $x=1\text{m}$ 处的 $\boldsymbol{E}$。

b. 求在 $x=1\text{m}$ 处的 $\boldsymbol{H}$。

P13.2 已知金红石(正单轴晶体)：$n_0=2.616$，$n_e=2.903$。如图 P13.2 所示，让晶体的光轴垂直于纸面。如果 $\theta_i=30°$，求双重折射波的透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。

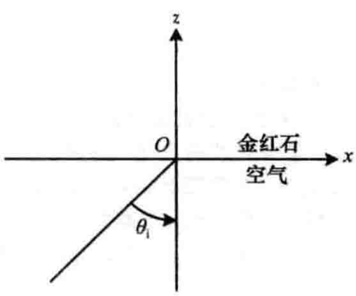


图 P13.2

P13.3 已知金红石晶体(参数与习题 13.2 中一样)，但是晶体的光轴沿 x 轴。求透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。

P13.4 金红石是晶体(参数与习题 13.2 中一样)。如图 P13.4 所示，光轴位于 x-z 平面内且与 x 轴的夹

角为－30°。求透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。

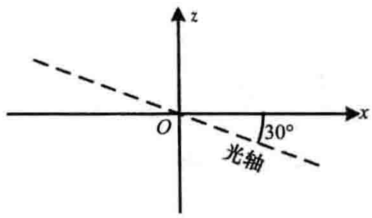


图　P13.4

P13.5　已知方解石(负单轴晶体)的 $n_0=1.658$ 和 $n_e=1.486$。让晶体的光轴垂直于纸面。如果 $\theta_i=30°$，求双折射波的透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。(除上方介质为方解石外，其图与题习题 13.2 中一样。)

P13.6　已知方解石(负单轴晶体)的 $n_0=1.658$ 和 $n_e=1.486$。让晶体的光轴沿 x 轴方向。求透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。(除上方介质为方解石外，其图与题习题 13.2 中一样。)

P13.7　已知方解石(负单轴晶体)的 $n_0=1.658$ 和 $n_e=1.486$。如图 P13.4 所示，光轴位于 x-z 平面内且与 x 轴的夹角为－30°。求透射角 θ_{to} 和 θ_{te}。

P13.8　一光束从方解石晶体($n_0=1.658$，$n_e=1.486$)内部入射到平面边界。假设晶体光轴垂直于入射的平面。求使得寻常波发生全反射时，反射角 α 的范围。

P13.9　在单轴介电晶体(光轴沿 z 轴)中，有一个 p 波在 x-z 平面内传播，单轴介电晶体的本构关系为：

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\mu_0\widetilde{\boldsymbol{H}},$$
$$\widetilde{D}_x=\varepsilon_0 n_0^2\widetilde{E}_x$$
$$\widetilde{D}_y=\varepsilon_0 n_0^2\widetilde{E}_y$$
$$\widetilde{E}_z=\varepsilon_0 n_e^2\widetilde{E}_z$$

如习题 P13.8 图所示，对于在 x-z 平面上的波传播来说，其指数形式相位因子为：

$$\psi=e^{-jk_0[Sx+qz]}$$

a. 根据参数 n_0、n_e 和 S，求 q。

b. 如图 P13.8 所示，一个 p 波从自由空间射入单轴晶体中。求 θ_t、θ_i、n_0 和 n_e 之间的关系。

c. 如果 $n_0=n_e=n=1.5$ 和 $\theta_i=30°$，求 θ_t。

(注意：p 波只有 $\widetilde{E}_x$、$\widetilde{E}_z$ 和 $\widetilde{H}_y$ 分量)

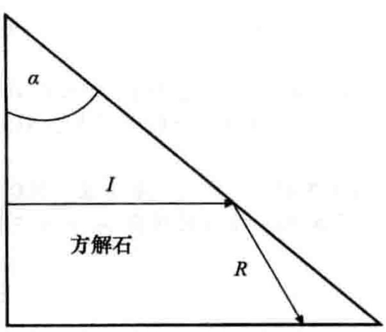


图　P13.8

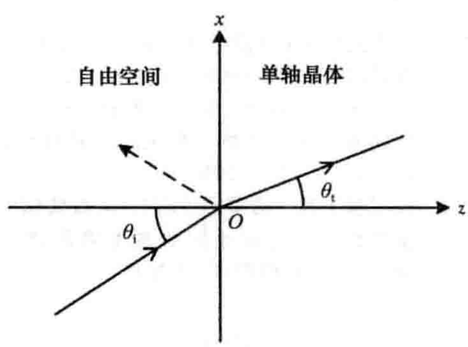


图　P13.9

第 15 章

P15.1　证明：

$$\delta=\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$$

P15.2　证明：

$$\delta=2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$\mu=\cosh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$\mu=\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)^{1/2}$$

P15.3 证明：

$$h^2D^2=\Delta^2-\Delta^3+\frac{11}{24}\Delta^4-\frac{5}{6}\Delta^5+\cdots=\delta^2-\frac{1}{12}\delta^4+\frac{1}{90}\delta^6-\cdots$$

提示：$\sinh^{-1}x=x-x^3/3+(3/40)x^5-\cdots$

P15.4 证明：$h^2D^2y_n=(1/12)(-y_{n+2}+16y_{n+1}-30y_n+16y_{n-1}-y_{n-2}+\cdots)$。

P15.5 已知

$$\frac{d^2V}{dx^2}+V=2x,\quad 0<x<1$$

$$V(0)=0,\quad \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=1}=0$$

利用加权余量法中的点匹配法，当匹配点为 $x=1/2$ 时，求 $V(1/2)$。

P15.6 已知

$$\frac{d^2V}{dx^2}+V^2+\frac{4}{9}=0,0<x<1$$

$$V(1)=0,\quad \left[\frac{dV}{dx}\right]_{x=0}=0.2V(0)$$

利用加权余量法中的点匹配法，当匹配点为 $x=1/2$ 时，求 $V(1/2)$。

提示：取试函数 $V=C_1(1-x)(1-Kx)$，选取 K 使 $x=0$ 处的边界条件得到满足。

P15.7 用有限差分法解习题 15.6。

P15.8 已知

$$\frac{d^2V}{dx^2}+V=2x,\quad 0<x<1$$

$$V(0)=0,\frac{dV}{dx}\text{在 }x=0\text{ 时为 }0。$$

利用加权余量法中的点匹配法，当匹配点为 $x=1/2$ 时，求 $V(1/2)$。

P15.9 用有限差分法解习题 15.8。取步长 $h=1/2$。

P15.10 用有限元法解 $-d^2V/dx^2=1$，$0<x<1$，$V(0)=V(1)=0$。使用三个单元，求 $V(1/4)$。

第 16 章

P16.1 用有限差分法计算矩形波导(图 16.1)中 TM 模式的最低截止频率，矩形波导的尺寸为 $a=1$ 和 $b=1/2$。在计算中取步长 $h=1/6$。单位为米，波导中的介质为空气。

P16.2 图 P16.2 所示为一等边三角形，P 为三角形内一点。在其中标出了三角形各顶点和点 P 的直角坐标值。求点 P 的面积坐标，并近似地计算点 P 的电位值。假设三个顶点的电位值分别为：$V_1=100\text{V}$、$V_2=50\text{V}$ 和 $V_3=25\text{V}$。

P16.3 应用基于的一阶节点 FEM，求最低和次低 TE 模式的截止波数 k_c。同样，求最低 TM 模式的截止波数 k_c。利用元件的谐振数阐述方法而不是求得准确值。可以使用附录 16A 中提供的 MATLAB 函数程序 GLANT。

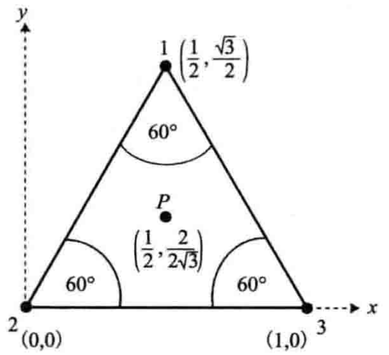


图 P16.2

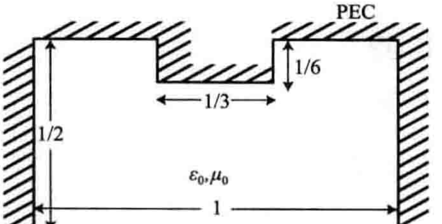


图 P16.3

P16.4 参考图 16.18 所示的矩形波导。求最低截止频率(a)TM 模式和(b)TE 模式。请利用 GLANT 求解。

P16.5 参考图 16.9。计算点 $P(1,\ 1/3)$的电位，给定 $\varepsilon_{r1}=1$，$\varepsilon_{r2}=\varepsilon_{r3}=4$。请利用 PGLANT2 求解。

P16.6 如果应用基于节点的二阶 FEM，求下面各个量的表达式：

$$S_{11}^{(e)}、S_{13}^{(e)}、S_{15}^{(e)} \text{ 和 } T_{13}^{(e)}$$

P16.7 这道习题在计算一个形状奇怪的导体的直流电阻时很有用。参考图 P16.7。在由 $ABCD$ 限定的求解区域内，拉普拉斯方程成立。

边界条件是：

在 AB 上：$\phi_0=0$；

在 CD 上：$\phi_1=1$；

在 AC 和 BD 上：满足诺依曼边界条件。

用基于节点的二阶 FEM 分别计算 E 点和 F 点的电位。请利用图 b 中所示的有限元部分。

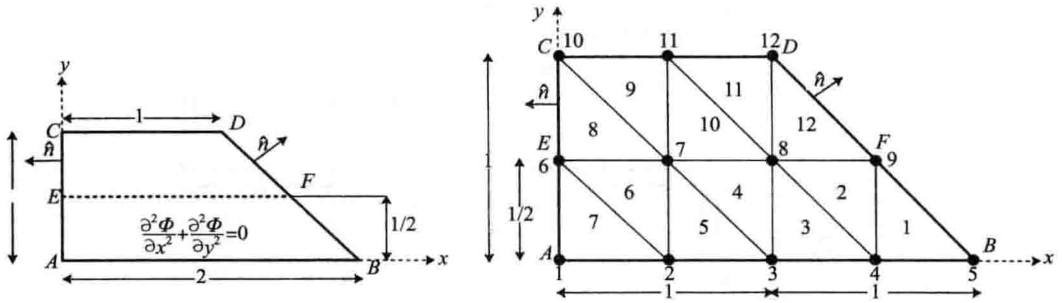


图 P16.7

P16.8 求解区域与习题 16.7 中一样，但是在其中部分填充电介质，如图 P16.8 所示。用 FEM 计算 E 点和 F 点的电位。

P16.9 求解区域与习题 16.7 中一样，但是在部分区域内满足泊松方程，如图 P16.9 所示。

假设在 AB 和 CD 上为齐次狄利赫里边界条件，以及在 AC 和 BD 上为齐次诺依曼边界条件。用 FEM 计算 E 点和 F 点的电位。使用图 P16.7b 中的有限元部分。

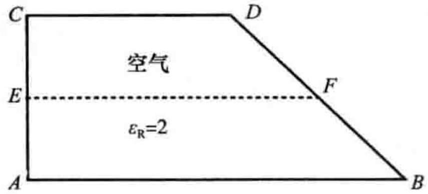


图 P16.8

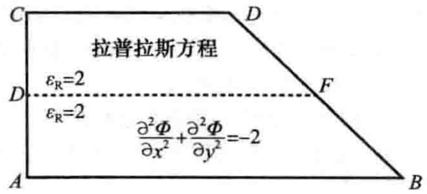


图 P16.9

P16.10 对于矢量形状函数 α_i，证明在 16.4.2 节中给出的性质 2～4。

P16.11 对于图 P16.2 所示正三角形，求矩阵$[\boldsymbol{E}]$和$[\boldsymbol{F}]$。

P16.12 如图 P16.12 所示，在矩形波导中有一个 PEC 挡板。应用棱边 FEM 计算最低模式的 k_c 值：(a) TM 模式和(b)TE 模式。在计算时，使用图示的五个单元。波导中的介质为空气。

P16.13 在自由空间中，用矩量法计算一块金属板与无穷远之间的电容，该金属板由两个子区域组成：左边子区域为一正方形平板(1m×1m)，右边子区域为一边长为 1m 的正三角形平板。像在 16.6 节所讨论过的一样，子区域的形状并不是最重要的，可用式(16.211)来计算 l_{nn}。为方便手算起见，我们只限于使用两个子区域。

P16.14 a. 用矩量法计算如图 P16.14a 所示一块导体板的电容。利用两个子区域来进行近似，如图 P16.14b所示。

b. 假定把导体板的形状变成如图 b 所示的形状。为使其电容近似地等于图 a 所示导体板的电容，求 b 的长度。

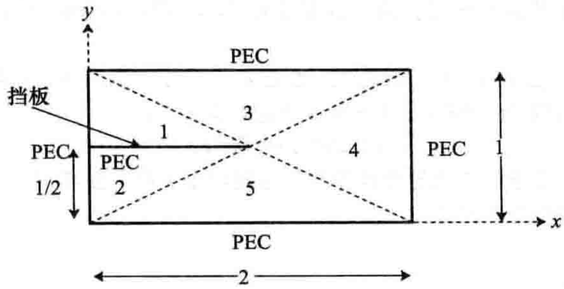
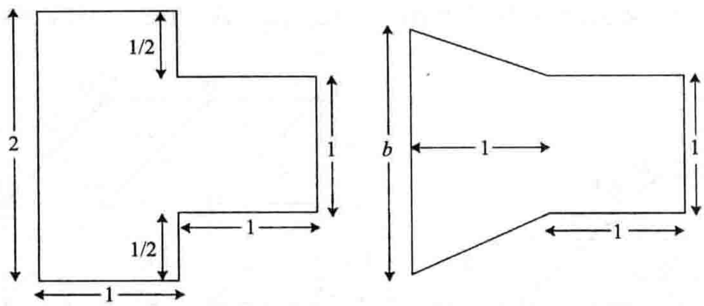


图 P16.12



a) b)

图 P16.14

P16.15 参考在 16.7 节中利用矩量法得到的一无限长圆柱导体散射的解及其相应的公式。当(a)分为 4 段和(b)分为 72 段时，在区域 $-20<\beta x<60$ 内，画出总电场沿 x 轴的分量模值随 βx 变化的函数曲线，取参数 $a=1$ 和 $\beta=3.1$，$E_z^i=1$。可使用 MATLAB 计算。

第 17 章

P17.1 此题的目的就是举例说明体积坐标在三维问题中的应用。如图 P17.1 所示为一个有四个节点的四面体。各个节点的 xyz 坐标如表 P17.1 所示。

a. 用体积坐标求四面体的体积。

b. 假设体电荷密度 $\rho_V=xy\times10^{-6}\,C/m^3$，求四面体中的总电荷。

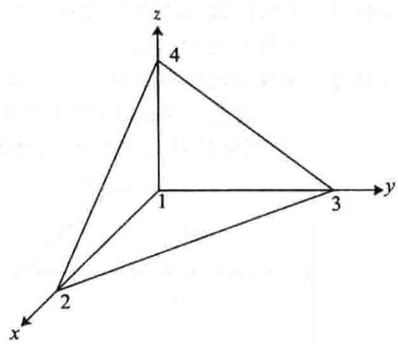


图 P17.1

表 17.1

节点 i	1	2	3	4
xi	0	1	0	0
yi	0	0	1	0
zi	0	0	0	1

P17.2 参考图 P17.1 中的四面体的坐标参数。

a. 求 b_i、c_i、d_i，$i=1,2,3,4$。

b. 如果在四面体中满足拉普拉斯方程，且节点 2、3 和 4 的电压分别为 10、20 和 30V，求节点 1 的电位。

第 19 章

P19.1 非均匀传输线的电压满足偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{3}{4x^2}V = 0, \quad 1 < x < 2$$

假设传输线在两端短路。因此，边界条件为：$V(1,t) = 0, V(2,t) = 0$。令初始条件为：$V(x,0) = (x-1)(2-x), \frac{\partial V}{\partial t}(x,t)_{t=0} = 0$。用 FDTD 求 $V(1.5, 4\Delta t)$。选取 $\Delta x = 1/4, r = c\Delta t/\Delta x = 1$。

P19.2 对于一有损耗等离子体来说，在频域内相对介电常数是复数，其表达式为：

$$\varepsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)} \tag{P19.1}$$

式中，ν(rad/s)为碰撞频率。上式称为德鲁德色散关系式，中在 $\nu \to 0$ 极限下，上式趋于式(10.14)。

证明，冷各向同性有损耗等离子体的基本场方程为式(P19.1)、式(P19.2)和

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt} + \nu\boldsymbol{J} = \varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E} \tag{P19.2}$$

假设一等离子体的等离子体频率为 $f_p = \omega_p/2\pi = 30\text{GHz}$，碰撞频率为 $\nu = 2\times10^{10}$ rad/s。在 0～90GHz 范围，绘出其介电常数的实部和虚部的曲线。

P19.3 例如，以水作为材料，在频域内它的相对介电常数可以表示为德鲁德色散关系式：

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \tag{P19.3}$$

式中，ε_∞ 为在无限大频率时的相对介电常数，ε_s 为在零频率时的静态相对介电常数，t_0 为弛豫时间。

证明，在这种媒质中，基本场方程可以描述为：

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{P19.4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{P19.5}$$

$$t_0\frac{d\boldsymbol{D}}{dt} + \boldsymbol{D} = \varepsilon_s\varepsilon_0\boldsymbol{E} + t_0\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} \tag{P19.6}$$

以及一维场方程为：

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t} \tag{P19.7}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{P19.8}$$

$$t_0\frac{dD}{dt} + D = \varepsilon_s\varepsilon_0 E + t_0\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{dE}{dt} \tag{P19.9}$$

在频域 0～80GHz 范围，绘出水的复相对介电常数的实部和虚部的曲线。假设 $\varepsilon_s = 81$，$\varepsilon_\infty = 1.8, t_0 = 9.4\times10^{-12}\text{s}$。

P19.4 二阶洛伦兹色散材料的相对介电常数为：

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega_R^2}{\omega_R^2 + 2j\omega\delta - \omega^2} \tag{P19.10}$$

式中，ω_R 为共振频率，δ 为阻尼常数。

a. 证明，在此媒质中基本场方程为：

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{P19.11}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{P19.12}$$

$$\omega_R^2\boldsymbol{D} + 2\delta\frac{d\boldsymbol{D}}{dt} + \frac{d^2\boldsymbol{D}}{dt^2} = \omega_R^2\varepsilon_s\varepsilon_0\boldsymbol{E} + 2\delta\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} + \varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} \tag{P19.13}$$

且一维场方程为：

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mu_0\frac{\partial D}{\partial t} \tag{P19.14}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial D}{\partial t} \tag{P19.15}$$

$$\omega_R^2 D+2\delta\frac{dD}{dt}+\mu_0\frac{d^2 D}{dt^2}=\omega_R^2\varepsilon_s\varepsilon_0 E+2\delta\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{dE}{dt}+\varepsilon_\infty\varepsilon_0\frac{d^2 E}{dt^2} \tag{P19.16}$$

b. 在 $\varepsilon_s=2.25$，$\varepsilon_\infty=1$，$\omega_R=4\times10^{16}\,\text{rad/s}$，$\delta=0.28\times10^{16}\,\text{s}$ 时，绘出 $\varepsilon_r(\omega)$ 的虚部和实部的曲线。在光学频段，这种洛伦兹媒质会出现共振吸收现象。

附录 1B

P1B. 1 在自由空间中，沿 z 轴在从 $z=-5$ 到 $z=5$ 的区间上有一段导电细线载有电流 $I=4t$，电流沿 $\hat{z}$ 方向流动。求出并绘出在 $-0.1\leqslant t\leqslant0.1\mu s$ 时间段内，点(0，0，10)处的 $\boldsymbol{A}(t)$。

1B. 2 已知滞后位 $\Phi=x-ct$，$\boldsymbol{A}=(x/c-t)\hat{\boldsymbol{x}}$，其中 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。

a. 证明 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu_0\varepsilon_0(\partial\Phi/\partial t)$

b. 求 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$。

c. 证明上面这些结果满足自由空间中的麦克斯韦方程。

P1B. 3 已知 $\widetilde{A}_z=C\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\cos(\pi z/d)$，求出相应的电场和磁场相量。求出电场和磁场的瞬时形式。

P1B. 4 已知 $\widetilde{A}_\phi=CJ_1(k_c r)e^{-j\beta z}$，求出电场和磁场。

附录 2B

P2B. 1 如图 P2B. 1 所示，一自由空间波长为 $\lambda_0=3\text{cm}$ 的 s 波从自由空间入射到多层电介质。计算反射系数和透射系数。$n_1=1.5$，$n_2=2.0$，$n_s=2.5$，$d_1=1\text{cm}$，$d_2=15\text{cm}$，$\theta_i=30°$。

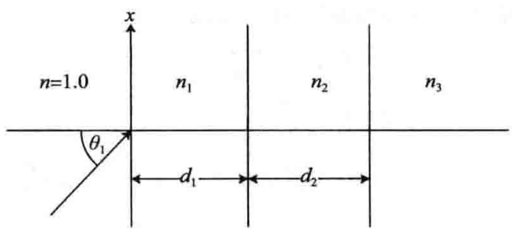


图 P2B. 1

附录 7A

P7A. 1 a. 图 P7A. 1a 示出了一接地圆柱管的横截面。证明，在表面 $\phi=\Phi_1$，$\phi=\Phi_2$，$\rho=b$ 上，满足狄利赫里边界条件的三维格林函数 G 由下面的式(P7A. 1)给出。

b. 已知 $\Phi_1=30°$ 和 $\Phi_2=120°$，求 S 并用 m 来表示。

c. 如果 $b=2$，$m=1$，求(i) k_{S1} 和(ii) k_{S2}。

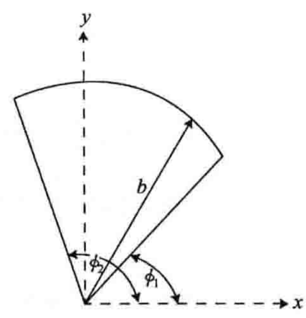


图 P7A. 1a

$$\nabla^2 G=-\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$$

$$G(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z')=\frac{4}{b^2(\phi_2-\phi_1)}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{J_s(k_{Sn}\rho)J_s(k_{Sn}\rho')}{k_{Sn}J_{S+1}^2(k_{Sn}b)}\right]\right\} \tag{P7A.1}$$

$$\times[\sin S(\phi-\phi_1)\sin S(\phi'-\phi_1)](e^{-k_{Sn}|z-z'|})$$

当 $0<\rho<b$ 时：

$$\int_0^C x[J_n(\lambda_k x)]^2 dx=\frac{c^2}{2}[J_{n+1}(\lambda_k c)]^2,\quad \lambda_k \text{ 为 } J_n(\lambda_k c)=0 \text{ 的根。}$$

附录 10D

P10D. 1 如图 P10D. 1 所示，在自由空间中有一均匀平面波沿 z 轴方向向右传播，其电场强度为 $\boldsymbol{E}^i=$

$E_0 e^{j(\omega_0 t-k_0 z)}\hat{a}_x$。

参见图 b。在 $t=0$ 时，将整个媒质突然变成一种介电常数为 ε_R 的电介质。假设媒质的这种突然转换产生了一个反射波(向左)和一个透射波(向右)，它们的电场强度分别为：

$$\boldsymbol{E}^R = Ae^{j(-\omega_R t-k_R z)}\hat{a}_x$$

$$\boldsymbol{E}^T = E_0 e^{j(\omega_T t-k_T z)}\hat{a}_x$$

a. 分别求 ω_R 和 k_R 以及 ω_T 和 k_T 的关系。

b. 根据 ω_0、k_0、ε_R 来确定 ω_R、k_R、ω_T、k_T。

c. 假设被突然开关的电介质是一种等离子体频率为 4GHz 等离子体。当频率 ω_0 为 3GHz 时，求 ω_R 和 ω_T。

注意：等离子体的介电常数是：

$$\varepsilon_R = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

其中，ω_p 为等离子体角频率，单位是 rad/s。而 ω 为信号的角频率，单位是 rad/s。

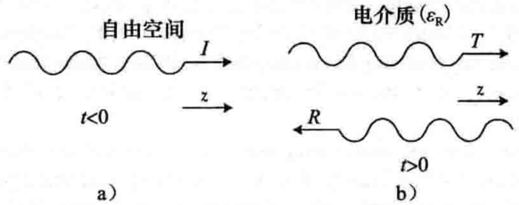


图 P10D.1

P10D.2 在一等离子体频率为 ω_{p1} 的等离子体中有一频率为 ω_1 的行波。在 $t=0$ 时，电子密度突然下降。在 $t>0$ 时，让 $\omega_p=\omega_{p2}$，其中 $\omega_{p2}<\omega_{p1}$。求在开关作用后，新的频率和所产生的全部模式的场强。

书目资源列表

1. Kraus, J. D. and Carver, K. R., *Electromagnetics* (2nd edition), McGraw-Hill, New York, NY, 1973.
2. Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, NY, 1964.
3. Ramo, S., Whinnery, J. R., and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, NY, 1967.
4. Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, NY, 1941.
5. Jackson, J. D., *Classical Electrodyanamics*, Wiley, New York, NY, 1962.
6. Hayt, W. H., Jr., *Engineering Electromagnetics* (5th edition), McGraw-Hill, New York, NY, 1989.
7. Cheng, D. K., *Field and Wave Electromagnetics* (2nd edition), Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
8. Ulabi, F. T., *Applied Electromagnetics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
9. Inan, S. A. and Inan, S. I., *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2000.
10. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, NY, 1989.
11. Ishimaru, A., *Electromagnetic Waves Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
12. Harrington, R. F., *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE Press, New York, NY, 2001.
13. Kong, J. U., *Electromagnetic Wave Theory*, EMW Publishing, Cambridge, MA, 2000.
14. Papas, C. H., *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, 1965.
15. Heald, M. A. and Wharton, C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York, NY, 1965.
16. Pelosi, G., Coccioli, G., and Selleri, S., *Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves*, Artech House, Norwood, MA, 1989.
17. Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York, NY, 1988.
18. Neelakanta, P. S., *Handbook of Electromagnetic Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
19. Caloz, C. and Tatso, I., *Electromagnetic Metamaterials*, Wiley, New York, NY, 2006.
20. Harrington, R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, NY, 1968.
21. Jin, J., *The Finite Element Method in Electromagnetics* (2nd edition), Wiley, New York, NY, 2002.
22. Volakis, J. L., Chatterjee, A., and Kempel, L. C., *Finite Element Method for Electromagnetics*, IEEE Press, New York, NY, 1998.
23. Taflove, A., *Computational Electrodynamics, The Finite Difference Time Domain, Method*, Artech House, Norwood, MA, 1995.
24. Sadiku, N. O. M., *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.